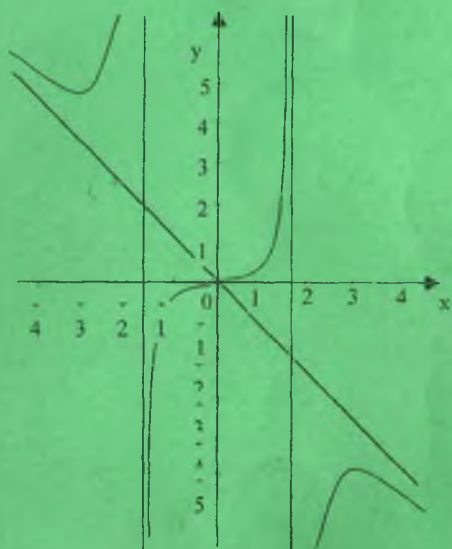


517
И49

М.Н. Ильясов

43

Сборник домашних заданий по высшей математике



Учебно-методическое пособие
I часть

Павлодар
2002

517
и 49

М.Н. Ильясов

**Сборник домашних заданий
по высшей математике**

Учебно-методическое пособие

І часть

**Павлодар
2002**

ББК 22.1 я 73
УДК 51(076.1)
И 11

Павлодарский государственный университет
им. С.Торайгырова

Рекомендовано к изданию решением
Ученого Совета ПГУ им. С. Торайгырова

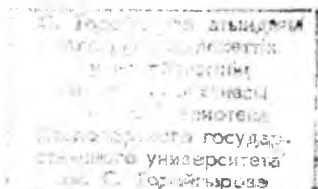
Рецензенты:

Аканбай Н.Е.- доцент, зам.декана механико-математического
факультета КазНУ им.аль-Фараби.
Аяпинов М.М. – профессор, зав.кафедрой «Математика» ПаУ.

Ильясов М.Н.

И 11 Сборник домашних заданий по высшей математике.
1 часть.- Павлодар: ПГУ, 2002.- 96 С.

Учебно-методическое пособие написано в соответствии с учебной программой по курсу высшей математики для инженерно-технических специальностей университетов. Оно содержит индивидуальные домашние задания (ИДЗ) по следующим разделам: векторная алгебра, аналитическая геометрия, пределы, дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной. Кроме ИДЗ приведены необходимые теоретические сведения и методические указания по решению задач названных разделов. Пособие предназначено для студентов и преподавателей университетов.



И 4302020000
00(05) – 02
ISBN 9965-568-73-1

ББК 22.1 я 73

© Ильясов М.Н., 2002

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время ощущается нехватка дидактического материала по общему курсу высшей математики. Имеющиеся в наших библиотеках сборники задач Кузнецова Л.А. и Рябушко А.П. уже ветшают и по количеству экземпляров не позволяют нормально строить учебный процесс. Известно, что для выработок у студентов способности усвоения материала необходимо индивидуализировать не только контрольные работы, но и домашние задания. Это мнение подкрепляется личным опытом автора и моих коллег по кафедре. Только задачки этих авторов позволяли проводить занятия с максимальной индивидуализацией заданий.

Увеличение самостоятельной работы студентов для развития их способностей предполагает соответствующее методическое обеспечение учебного процесса. Этот сборник позволяет многим преподавателям продолжить прежний метод обучения, который основывался на учебно-методических пособиях авторов, названных выше.

Данный сборник является первой частью учебно-методических пособий под названием «сборник домашних заданий по высшей математике», написанного в соответствии с действующими программами курса высшей математики для инженерно-технических и энергетических специальностей университетов. Это пособие также можно использовать и для других специальностей. Кроме того, он вполне доступен для студентов дистанционной формы обучения.

Весь комплекс учебных пособий состоит из трех частей. Материал каждой части соответствует I–III семестрам учебного процесса. Для тех специальностей, которые курс высшей математики изучают в течении двух семестров, рекомендуется сделать необходимую выборку. Охарактеризую структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний студентов. В первой части содержится материал по определителям, матрицам, линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению функций одной переменной. Весь практический материал I семестра по курсу высшей математики разделен на главы, а некоторые главы – на параграфы, в каждой из которых даются необходимые теоретические сведения (основные определения, понятия, формулы), используемые при решении задач и выполнении упражнений, изложений этих сведений иллюстрируется решенными примерами. В конце сборника приводятся индивидуальные домашние задания (ИДЗ) по материалам

I семестра, которые разделены на три части (№№1-3). Эти ИДЗ рекомендуется выдавать в три этапа по 10-12 заданий в каждом, из расчета по 2 задания на одну учебную неделю. После приема заданий одного этапа выдаются последующие. Каждое задание содержит по 20 вариантов. Практические занятия можно вести по так называемому блочно-цикловому методу оценки знаний, состоящий в следующем. Материал каждого семестра делится на три блока, по каждому из которых выполняется ИДЗ. В конце каждого цикла проводится письменная контрольная работа на одну пару, в которую входят 6–8 задач. Учет оценок за ИДЗ и контрольные работы позволяют вывести общую оценку за каждый блок и итоговую оценку за семестр.

Тогда оценка на экзамене, где в основном предлагаются теоретические вопросы будет более объективной.

В заключение отмечу, что пособие в основном ориентировано на студента средних способностей, и усвоение содержащегося в нем материала гарантирует удовлетворительные и хорошие знания по курсу высшей математики. Для отлично успевающих студентов необходимы дополнительные индивидуальные задания повышенной сложности, которыми могут быть теоретические упражнения и нестандартные задачи.

Настоящий сборник адресован преподавателям и студентам и предназначен для проведения практических занятий, контрольных работ в аудиториях и выдачи индивидуальных домашних заданий по всем разделам курса высшей математики.

ГЛАВА I

Определители. Матрицы. Системы линейных уравнений

Минором M_{km} элемента a_{km} определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется определитель, полученный из Δ вычеркиванием k -ой строки и m -го столбика.

$A_{km} = (-1)^{k+m} M_{km}$ - алгебраическое дополнение элемента a_{km} определителя Δ .

Пример 1.

Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение.

Получим на 4-ом столбике три нуля и разложим определитель по этому столбiku. Для этого вторую строку умножим на 2 и прибавим к первой, затем ее вычтем из четвертой, получим

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= 7 - 16 + 35 + 14 - 1 - 280 = -241 \end{aligned}$$

Произведением двух матриц будет матрица, все элементы которой получаются при умножении каждой строки левой матрицы на каждый столбик правой матрицы (как при скалярном произведении). Результат такого умножения записывается на то место, где пересекаются умноженные строка и столбик.

Пример 2.

Найти AB , если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4(-1) - 1(-3) + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 2 - 1(-1) + 2 \cdot 4 \\ -3(-1) + 2(-3) + 1 \cdot 1 & -3 \cdot 2 + 2(-1) + 1 \cdot 4 \\ 5(-1) + 0 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 & 5 \cdot 2 + 0(-1) - 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -2 & -4 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$$

Для каждой невырожденной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

существует обратная матрица A^{-1} , определяемая по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

где $|A| \neq 0$ - определитель матрицы A ,

$A_{11}, A_{12}, \dots$ - алгебраические дополнения.

Пример 3.

Найти A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$|A| = 16 + 6 - 16 - 16 + 2 - 48 = -56 \neq 0$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8, A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 8, A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7, A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -10, A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -32, A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -18.$$

Отсюда по формуле, получим

$$A^{-1} = \frac{1}{-56} \begin{pmatrix} -8 & -7 & -10 \\ 8 & 0 & -32 \\ 8 & -7 & -18 \end{pmatrix} = \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 8 & 7 & 10 \\ -8 & 0 & 32 \\ -8 & 7 & 18 \end{pmatrix}$$

Можно выполнить проверку, т.к.

$$A \cdot A^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь приведен пример для матрицы 3-го порядка. Однако этим методом находят обратные матрицы для всех порядков.

Рассмотрим для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

некоторые методы ее решений.

1) По формулам Крамера

Этот метод применим, если определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

не равен нулю. В этом случае неизвестные находятся по формулам

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \text{ где}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

2) Матричный метод

Этот метод применим также при $\Delta \neq 0$.

Из данной системы образуем следующие матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Тогда неизвестная матрица X находится по формуле

$$X = A^{-1}D.$$

3) метод Гаусса

Первые два метода решения системы применены не всегда. Методом Гаусса можно решать любую линейную систему. В этом методе данную систему заменяют (поэтапно) эквивалентной системой, у которой каждое следующее уравнение имеет меньше неизвестных, чем предыдущее.

Иначе говоря, матрицу системы приводят к верхнему треугольному (трапециевидному) виду.

Пример 4.

Решить систему тремя способами

$$\begin{cases} 4x - 9y - 5z = 14 \\ 7x - 4y + z = 7 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \end{cases}$$

Решение.

а) по формулам Крамера

Найдем все определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -9 & -5 \\ 7 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 64 - 27 - 175 - 60 - 20 - 252 = -470,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 14 & -9 & -5 \\ 7 & -4 & 1 \\ 23 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 224 - 204 - 175 - 460 - 70 - 252 = -940,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 14 & -5 \\ 7 & 7 & 1 \\ 3 & 23 & -4 \end{vmatrix} = -112 + 42 - 805 + 105 - 92 + 392 = -470,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -9 & 14 \\ 7 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & 23 \end{vmatrix} = -368 - 189 + 490 + 168 - 140 + 1449 = 1410$$

Отсюда по формулам Крамера получим

$$x = \frac{-940}{-470} = 2, y = \frac{-470}{-470} = 1, z = \frac{1410}{-470} = -3.$$

Ответ: (2, 1, -3).

б) матричным методом

Составим исходные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -9 & -5 \\ 7 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 23 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A^{-1} .

$$|A| = -470,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 11, A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 31, A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 47,$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -9 & -5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -61, A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1, A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -47,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -9 & -5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -29, A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -39, A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 47,$$

$$\text{Тогда } A^{-1} = \frac{1}{-470} \begin{pmatrix} 11 & -61 & -29 \\ 31 & -1 & -39 \\ 47 & -47 & 47 \end{pmatrix}.$$

Отсюда по формуле получим

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1}D = \frac{1}{-470} \begin{pmatrix} 11 & -61 & -29 \\ 31 & -1 & -39 \\ 47 & -47 & 47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 23 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{-470} \begin{pmatrix} 11 \cdot 14 - 61 \cdot 7 - 29 \cdot 23 \\ 31 \cdot 14 - 1 \cdot 7 - 39 \cdot 23 \\ 47 \cdot 14 - 47 \cdot 7 + 47 \cdot 23 \end{pmatrix} = \frac{1}{-470} \begin{pmatrix} -940 \\ -470 \\ 1410 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ответ: (2, 1, -3).

в) Методом Гаусса.

Запишем данную систему в удобном виде

$$\begin{cases} z - 4y + 7x = 7 \\ -4z + 5y + 3x = 2 \\ -5z - 9y + 4x = 1 \end{cases}$$

Первое уравнение умножаем на 4 и прибавляем ко второму, затем умножаем на 5 и прибавляем к третьему, получим

$$\begin{cases} z - 4y + 7x = 7 \\ -11y + 31x = 51 \\ -29y + 39x = 4 \end{cases}$$

Ко второму уравнению прибавляем третье и делим на -10, затем второе уравнение умножаем на 3 и вычитаем из третьего. Имеем

$$\begin{cases} z - 4y + 7x = 7 \\ 4y - 7x = -10 \\ 4y - 54x = -10 \end{cases}$$

Теперь из третьего уравнения вычитаем второе

$$\begin{cases} z - 4y + 7x = 7 \\ 4y - 7x = -10 \\ -47x = -94 \end{cases}$$

Получили систему искомого вида, эквивалентной данной системе. Теперь из последнего уравнения найдем X, затем из второго уравнения найдем Y и из первого найдем Z, т.е.

$$X = \frac{-94}{-47} = 2; 4y - 7 \cdot 2 = -10; 4y = 4; y = \frac{4}{4} = 1;$$

$$z - 4 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 7; z = 4 - 14 + 7 = -3.$$

Ответ: (2, 1, -3)

Глава II

Векторная алгебра

Для векторов $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ определены:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \text{модуль вектора } \vec{a};$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - \text{скалярное произведение};$$

$$[\vec{a} \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\} - \text{векторное}$$

произведение;

$$abc = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \text{смешанное произведение};$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 - \text{условие перпендикулярности } \vec{a} \text{ и } \vec{b};$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} - \text{условие коллинеарности } \vec{a} \text{ и } \vec{b};$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 - \text{условие компланарности } \vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c};$$

$$\cos(\angle \vec{a} \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} - \text{косинус угла между } \vec{a} \text{ и } \vec{b};$$

$$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} - \text{проекция } \vec{b} \text{ на } \vec{a}.$$

Пример 5.

Даны точки $A(-3, 1, 2)$, $B(1, -2, 3)$, $C(4, -3, 1)$, $D(-1, 2, -2)$.

Найти: а) $\vec{ab}$, б) $[\vec{ab}]$, в) $\vec{abc}$, г) Площадь ΔABC ,

д) Объем пирамиды $ABCD$, если $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AC}$, $\vec{c} = \vec{AD}$.

Решение:

$$\text{а) } \vec{a} = \vec{AB} = \{1 - (-3), -2 - 1, 3 - 2\} = \{4, -3, 1\}$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = \{7, -4, -1\} - \text{тогда}$$

$\overline{ab} = 4 \cdot 7 - 3(-4) + 1(-1) = 28 + 12 - 1 = 39 \neq 0$, поэтому вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не перпендикулярны.

$$6) [\overline{ab}] = \left[\begin{array}{cc|cc|c} -3 & 1 & 1 & 4 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -1 & 7 & 7 & -4 \end{array} \right] = \{7, 1, 1, 5\}$$

в) $\bar{c} = \overline{AD} = \{2, 1, -4\}$, тогда

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 64 + 6 + 7 + 8 + 4 - 84 = 5 \neq 0$$

поэтому вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны.

г) Площадь треугольника равна половине модуля векторного произведения векторов, образующих этот треугольник, поэтому

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{ab}| = \frac{1}{2} \sqrt{7^2 + 11^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{49 + 121 + 25} = \frac{1}{2} \sqrt{195}$$

д) объем пирамиды $ABCD$ равен шестой части модуля смешанного произведения векторов, совпадающих с тремя ребрами пирамиды, выходящих из одной вершины, поэтому

$$V_{\text{муп}} = \frac{1}{6} |\overline{abc}| = \frac{1}{6} |5| = \frac{5}{6} \text{ куб.ед.}$$

Глава III

Аналитическая геометрия

Для точки $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3), D(x_4, y_4, z_4)$ и векторов

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

Определены уравнения:

$a_1(x - x_1) + a_2(y - y_1) + a_3(z - z_1) = 0$ - плоскости, проходящей через точку А перпендикулярно вектору $\vec{a}$;

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$
 - плоскости, проходящей через три точки А, В и С;

А, В и С;

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$
 - плоскости, проходящей через две точки А, В и параллельно вектору $\vec{a}$;

А, В и параллельно вектору $\vec{a}$;

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$
 - плоскости, проходящей через точку А и параллельно двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

параллельно двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$
 - прямой, проходящей через две точки А и В;

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$$
 - прямой, проходящей через точку А

параллельно вектору $\vec{a}$.

Пример 6. Даны $A(-3, 1, 2), B(1, -2, 3), C(4, -3, 1), D(-1, 2, -2)$.

Составить уравнения

а) прямой АВ;

б) плоскости АВС;

в) прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости АВС.

Решение:

а) Подставляя в формулу, получим

$\frac{x-(-3)}{1-(-3)} = \frac{y-1}{-2-1} = \frac{z-2}{3-2}$, отсюда $\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{1}$ - каноническое уравнение прямой АВ.

б) Подставляя в формулу координаты точек А, В и С. получим

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-2 \\ 1+3 & -2-1 & 3-2 \\ 4+3 & -3-1 & 1-2 \end{vmatrix} = 0, \text{ отсюда}$$

$$(x+3)(3+4) - (y-1)(-4-7) + (z-2)(-16+21) = 0$$

$$7(x+3) + 11(y-1) + 5(z-2) = 0,$$

$$7x + 11y + 5z = 0$$

- общее уравнение искомой плоскости.

в) вектор $\vec{a} = \{7, 11, 5\}$ перпендикулярный к плоскости ABC будет параллельным к искомой прямой. поэтому из формулы получим

$\frac{x-(-1)}{7} = \frac{y-2}{11} = \frac{z-(-2)}{5}$, отсюда $\frac{x+1}{7} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+2}{5}$ - каноническое уравнение искомой прямой.

В геометрических задачах на плоскости во всех формулах отсутствуют переменные z.

В этом случае дополнительно имеются:

$y = kx + b$ - уравнения прямой с угловым коэффициентом k:

$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ - расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой

$$Ax + By + C = 0;$$

$k_1 = k_2$ - условие параллельности и

$k_1 k_2 = -1$ - условие перпендикулярности двух прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 .

Пример 7.

Даны вершины треугольника ABC: A(1,-3), B(-1,5), C(-2,3).

Найти:

а) уравнение стороны AC

б) уравнение высоты BH

в) уравнение прямой BD, параллельной AC;

г) расстояние от точки В до прямой AC.

Решение:

а) координаты точек А и С подставляем в формулу, имеем

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-(-3)}{3-(-3)}, \text{ отсюда } \frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{6}; \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2};$$

$$2(x-1) + (y+3) = 0, \\ \text{AC.}$$

$2x + y + 1 = 0$ - общее уравнение прямой

б) $BH \perp AC$, значит $K_{BH} \cdot K_{AC} = -1$. Так как $K_{AC} = -2$, то $K_{BH} = \frac{1}{2}$,

поэтому

$$y = \frac{1}{2}x + b - \text{уравнение высоты BH.}$$

Значение "b" найдем подставляя в это уравнение координаты точки В:

$$5 = \frac{1}{2}(-1) + b, \quad b = \frac{11}{2}. \quad \text{Отсюда } y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}, \quad x - 2y + 11 = 0 - \text{общее}$$

уравнение BH.

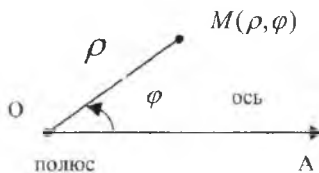
в) $BD \parallel AC$, значит $K_{BD} = K_{AC} = -2$, поэтому $y = -2x + b$ - уравнение BD. Значение "b" находим аналогично $5 = -2(-1) + b$, $b = 3$.

Отсюда $y = -2x + 3$, $2x + y - 3 = 0$ - общее уравнение BD.

г) искомое расстояние найдем по формуле, имеем

$$d = \frac{|2(-1) + 5 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

На плоскости наряду с прямоугольной системой координат имеется полярная система координат. В этой системе задаются точка O (полюс) и луч OA (полярная ось).



Тогда любая точка М плоскости определяется координатами:

$OM = \rho$ - полярный радиус;

$\angle AOM = \varphi$ - полярный угол от оси против хода часовой стрелки.

Из определения этих координат следует, что $\rho \geq 0$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Для построения кривой в этой системе координат также составляется таблица, в которой φ придают значения из области существования функции и для каждого φ находят ρ . Полученные

точки отмечаются в выбранной системе координат и по ним строят график (кривую).

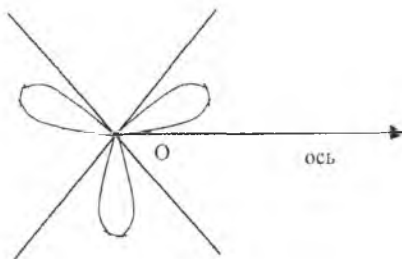
Пример 8. Построить кривую $\rho = 2 \sin 3\varphi$.

Решение. $2 \sin 3\varphi \geq 0, \sin 3\varphi \geq 0$ значит $0 \leq 3\varphi \leq \pi$ или $2\pi \leq 3\varphi \leq 3\pi$ или

$4\pi \leq 3\varphi \leq 5\pi$, т.е. $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$ - область существования данной функции. Составляем таблицу

φ	0	20°	40°	60°	120°	140°	160°	180°	240°	260°	280°	300°
ρ	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0

Эти точки отмечаем на плоскости и по ним строим кривую



Построение кривой, заданной параметрически осуществляется с помощью таблицы, в которой для каждого значения параметра t (из области его допустимых значений) находятся координаты X и Y . Затем точки с соответствующими координатами отмечаются в выбранной декартовой системе координат и по ним строят искомую кривую.

Когда параметр t является аргументом тригонометрических функции ее значение удобно брать в угловых величинах.

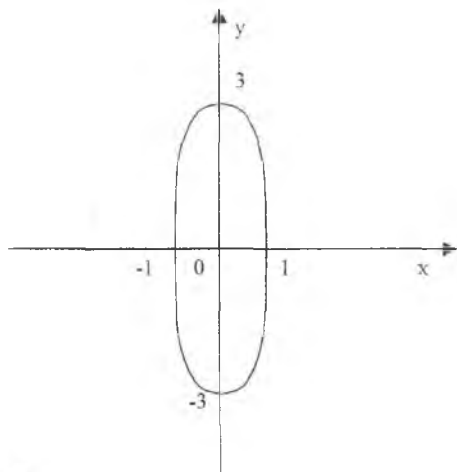
Пример 9.

Построить кривую, заданную уравнениями $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$

Решение. Придавая параметру t угловые значения от 0° до 360° найдем значение X и Y . Эти данные запишем таблицей

t	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
x	1	0,9	0,5	0	-0,5	-0,9	-1	-0,9	-0,5	0	0,5	0,9
y	0	1,5	2,6	3	2,6	1,5	0	-1,5	-2,6	-3	-2,6	-1,5

Полученные точки отмечаем на плоскости в выбранной системе координат и построим искомую кривую.



Полученная кривая является эллипсом с полуосями $a = 1, b = 3$, а его фокусы расположены на оси Oy .

Глава IV

Пределы и непрерывность функций

В основе математического анализа лежит понятие предела, которая является одним из важнейших в математике. С помощью этого понятия определяется непрерывность и дифференцируемость функции, вводится неопределенный интеграл и определяется сумма бесконечного ряда и т.д. Вот почему при изучении математики важно приобрести прочные навыки в умении находить предельные значения функций и, в частности, последовательностей.

Отыскать предельные значения данной функции - задача, вообще говоря, непростая. Дело в том, что не существует общего метода позволяющего вычислить предел для любой функции или установить, что он существует. Эта задача еще более усложняется при разыскании пределов функций многих переменных или пределов векторных функций. Поэтому при нахождении пределов в каждой конкретной задаче приходится использовать особые приемы. Существует ряд способов, которые позволяют находить пределы функций довольно просто. Цель настоящего раздела методического пособия заключается в том, чтобы разъяснить суть некоторых из этих способов на конкретных примерах.

§1. Понятие предела функции. Нахождение пределов.

В настоящем разделе будут рассмотрены задачи следующих типов: выяснение вопроса о сходимости или расходимости функции в точке; вычисление пределов функций; нахождение односторонних пределов.

При вычислении пределов некоторых функций иногда целесообразно использовать хорошо известные пределы следующих функций.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ - первый замечательный предел.}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ - второй замечательный}$$

предел

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Способы вычисления первых двух пределов приводятся почти в каждом курсе математического анализа и подробно рассматриваются на лекциях, а последние четыре легко вычисляются, если воспользоваться первыми двумя. В самом деле,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

Изменение порядка следования операций нахождения предела и взятия логарифма в данном случае допустимо, т.к. функция $\ln y$ - непрерывна и по теореме о пределе сложной функции:

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \ln \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Четвертый предел вычисляется с помощью введения новой переменной $y = a^x - 1$, откуда $a^x = 1 + y$ и $x = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$. Заметим, кроме того, что если $x \rightarrow 0$, то $y \rightarrow 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} y \frac{\ln a}{\ln(1+y)} = \ln a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = \\ &= \frac{\ln a}{\ln \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a. \end{aligned}$$

В примере пять положим $(1+x)^a - 1 = y$. Тогда $(1+x)^a = y + 1$, а $a \ln(1+x) = \ln(1+y)$.

Следовательно,

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} = \frac{y}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \frac{\ln(1+y)}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} a \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Так как $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}}{\ln(1+y)} = a.$$

Предел здесь легко вычисляется, если заметить, что

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right).$$

Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} \right)} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим теперь несколько примеров, связанных с выяснением вопроса о сходимости или расходимости последовательностей или функций.

7. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$, где $a > 0$.

Решение: Пусть $x_n = \frac{a^n}{n!}$, так как $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1}$, то (для любого

$n > a-1$) $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \right)$. Значит, последовательность $\{x_n\}$ — убывающая.

Кроме того эта последовательность ограничена снизу, например, нулем. По теореме Вейерштрасса она сходится. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$.

Для того, чтобы найти b , запишем $x_{n+1} = x_n \frac{a}{n+1}$ и перейдем в

этом равенстве к пределу. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1}$.

Откуда $b = b \cdot 0 = 0$. Таким образом $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

8. Последовательность $\{x_n\}$ определена при помощи следующего рекуррентного соотношения $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, где $x_1 = \sqrt{a}$, $a > 0$, то есть $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, $x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$, ...

Выяснить сходится ли эта последовательность и если сходится найти ее предел.

Решение: очевидно, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает. Докажем ее ограниченность сверху. Воспользуемся методом математической индукции. Ясно, что $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a+1}$. Допустим теперь, что $x_n < \sqrt{a+1}$, тогда для x_{n+1} получаем $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} < \sqrt{a+\sqrt{a+1}} < \sqrt{a+2\sqrt{a+1}} = \sqrt{(\sqrt{a+1})^2} = \sqrt{a+1}$. Итак, (для любого $n \in \mathbb{N}^+$) $x_n < \sqrt{a+1}$. По теореме Вейерштрасса последовательность $\{x_n\}$ сходится, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$.

Найдем чему равно b . Для этого перейдем к пределу в равенстве $x_{n+1}^2 = a + x_n$. Тогда получим $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}^2 = a + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Откуда $b^2 = a + b$.

Решая это уравнение находим $b = \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$. Отрицательный корень этого уравнения отбрасываем. Так как (для любого $n \in \mathbb{N}^+$) $(x_n > 0)$ и, следовательно, $b \geq 0$.

9. Выяснить, имеет ли функция $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ предел при $x \rightarrow 0$.

Решение: воспользуемся определением предела функции по

Гейне. Рассмотрим две последовательности: $x_n = \frac{1}{\pi n}$ и $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$,

$n \in \mathbb{N}^+$. Очевидно $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$ и (для любого $n \in \mathbb{N}^+$)

$(x_n \neq 0, x'_n \neq 0)$. В то же время

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x'_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1.$$

Таким образом $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$

значит $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$ не существует.

10. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

Решение: если в выражении, стоящем под знаком предела, формально подставить вместо x предельное значение 2, то получим

неопределенность $\frac{0}{0}$. Для того, чтобы раскрыть эту

неопределенность, выделим в числителе и знаменателе множитель $x-2$, который порождает эту неопределенность и сократим на него.

Тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1}.$$

Функции $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ и $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ таковы, что (для

любого $x \in U(2)$) $\left(\frac{(x^2 - 4)}{(x^2 - 3x + 2)} = \frac{(x+2)}{(x-1)} \right)$. Так как $g(x)$ —

непрерывная функция в точке $x=2$, то $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{2+2}{2-1} = 4$.

Следовательно $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = 4$.

11. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$.

Решение: как и в предыдущем примере, здесь имеет место

неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Рассмотрим два способа решения этого примера.

1. Сделаем замену переменной, полагая $1+x=y^6$. Если $x \rightarrow 0$, то $y \rightarrow 1$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1) \cdot (y^2 + y + 1)}{(y-1) \cdot (y+1)} = \frac{3}{2}.$$

2. Умножим числитель и знаменатель на соответствующие сопряженные выражения.

Получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} &= \frac{(\sqrt{1+x} - 1) \cdot (\sqrt{1+x} + 1) \cdot (\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)}{(\sqrt{1+x} + 1) \cdot (\sqrt[3]{1+x} - 1) \cdot (\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)}{(\sqrt{1+x} + 1) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

12. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 10}}$

Решение: формально подставляя вместо x символ ∞ , получим неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность разделим числитель и знаменатель на x . Тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 10}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + 10}{x^2}}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 + 10}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 10}{x^2}}}$$

Последнее равенство справедливо, поскольку кубический корень из непрерывной функции есть непрерывная функция. Так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{x^2} = 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 10}} = 1$$

13. Найти $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - x}$

Решение: здесь снова неопределенность $\frac{0}{0}$. Заменяем

переменную x , полагая $\pi - x = y$, откуда $x = \pi - y$.

Тогда при $x \rightarrow \pi$, $y \rightarrow 0$ и

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi - y}{2}\right)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{y}{2}}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{y}{4}\right)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{y}{4}\right)}{\frac{y}{4}} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{y}{4}\right)}{2} \end{aligned}$$

Так как функция $\sin\left(\frac{y}{4}\right)$ непрерывна для любого $y \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{y \rightarrow 0} \sin\left(\frac{y}{4}\right) = \sin 0 = 0.$$

Далее, $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{y}{4}\right)}{\frac{y}{4}} = 1$ — первый замечательный предел.

$$\text{Поэтому } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{y}{4}\right)}{\frac{y}{4}} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{y}{4}\right)}{2} = 1 \cdot 0 = 0$$

14. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right)$.

Решение: подстановка вместо x единицы приводит к неопределенности вида $0 \cdot \infty$. Для раскрытия этой неопределенности заменим переменную x , полагая $1 - x = y$. Если $x \rightarrow 1$, то $y \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot (1-y) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot y}{2}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi \cdot y}{2}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin\left(\frac{\pi \cdot y}{2}\right)}.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{2}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi \cdot y}{2}}{\sin\left(\frac{\pi \cdot y}{2}\right)} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}.$$

15. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6} \right)$.

Решение: здесь имеет место неопределенность вида $\infty - \infty$.

Приведем эту неопределенность к виду $\frac{0}{0}$ и затем раскроем ее.

$$\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6} = \frac{x^2-6x+9}{(x-3) \cdot (x^2-x-6)}.$$

Если в выражении справа подставить $x=3$, то получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-6x+9}{(x-3) \cdot (x^2-x-6)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{(x-3) \cdot (x-3) \cdot (x+2)} = \\ \text{Имеем} \quad &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

При нахождении пределов вида $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ могут возникнуть неопределенности типа 0^0 , ∞^0 , 1^∞ , для раскрытия которых целесообразно воспользоваться основным логарифмическим тождеством и свойством непрерывности показательной функции. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\varphi(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \ln f(x)} \quad (1)$$

Тем самым вычисление предела $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ приводится к вычислению предела $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \cdot \ln f(x)$ и к раскрытию неопределенности других типов.

Кроме того, следует иметь в виду, что: если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)} = A^B;$$

если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = +\infty, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{при } A > 1, \\ 0, & \text{при } 0 < A < 1; \end{cases}$$

если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = -\infty, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)} = \begin{cases} 0, & \text{при } A > 1, \\ \infty, & \text{при } 0 < A < 1; \end{cases}$$

если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty, \text{ то полагают } f(x) = 1 + a(x), \text{ где}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} a(x) = 0.$$

В этом случае, используя второй замечательный предел, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ [1 + a(x)]^{\frac{1}{a(x)}} \right\}^{a(x) \cdot \varphi(x)} = \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow a} [1 + a(x)]^{\frac{1}{a(x)}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow a} a(x) \cdot \varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} a(x) \cdot \varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] \cdot \varphi(x)} \end{aligned}$$

16. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{\sin x}{x}}$

Решение: так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то по правилу 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{\sin x}{x}} = \frac{3}{2}$$

17. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos 2x - 1)]^{\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ [1 + (\cos 2x - 1)]^{\frac{1}{\cos 2x - 1}} \right\}^{\frac{\cos 2x - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2}} = \\ &= e^{-2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2} = e^{-2} \end{aligned}$$

§2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Основная задача исследования на непрерывность заключается в том, чтобы определить множества точек, в которых функция непрерывна или разрывна и в выяснении вопроса о том, к какому типу точек разрыва относится та или иная точка. Рассмотрим некоторые примеры.

18. Доказать, что функция

$$f(x) = \text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

непрерывна везде за исключением точки ноль. Определить характер точки разрыва.

Решение: односторонние пределы функции в точке $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \text{sign } x = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -0} \text{sign } x = -1 \quad \text{существуют и конечны,}$$

поэтому функция терпит в нуле разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке равен $f(+0) - f(-0) = 2$.

19. Функция $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ непрерывна для любого $x \neq 1$, так как знаменатель этой дроби есть непрерывная функция при $x \neq 1$. В точке $x=1$ функция не определена и не существуют конечные односторонние пределы

$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$. Потому $x=1$ — точка разрыва второго рода.

20. Функция $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ непрерывна для любого $x \neq 0$, т.к.

если $x_0 \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{x_0}\right)$

В точке $x=0$ функция $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ не определена и в этой точке не существуют односторонние пределы, следовательно в точке $x=0$ функция $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ терпит разрыв второго рода.

21. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \text{ непрерывна на всей числовой оси}$$

Решение: в самом деле, если $x \neq 0$, то $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ — непрерывная функция, как произведение непрерывных функций. В точке $x=0$ имеем

$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$. Следовательно $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$.

22. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{1 + e^{x-a}}$, где a —

произвольное фиксированное число.

Решение: функция $f(x)$ не определена в точке $x=a$, следовательно a — точка разрыва функции f .

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{1}{1 + e^{x-a}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{1}{1 + e^{x-a}} = 1.$$

Поэтому в точке a функция терпит разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке равен $f(a+0) - f(a-0) = -1$. При $x \neq a$ функция непрерывна как частное двух непрерывных функций, если знаменатель отличен от нуля.

Глава V

Дифференциальное исчисление

В этой главе мы рассмотрим примеры на вычисления производных для функций, заданных разными способами, а также задачи, решаемые с применением производной.

§1. ОБЩИЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

$$1. y = \operatorname{ctg} x + \frac{e^x}{1-x} + \ln 2;$$

$$2. y = \frac{(1+x^2) \cdot \operatorname{arctg} x - x}{2a}, \quad a = \operatorname{const} \neq 0;$$

$$3. y = x^3 \cdot \cos x \cdot \ln x.$$

Решение:

1. Пользуясь правилами нахождения производной суммы и частного, получим

$$y' = \frac{-1}{\sin^2 x} + \frac{e^x \cdot (1-x) + e^x}{(1-x)^2} + 0 = \frac{-1}{\sin^2 x} + \frac{e^x \cdot (2-x)}{(1-x)^2};$$

2. Пользуясь правилом вынесения постоянного множителя за знак производной, а также правилами нахождения производной суммы и произведения, получим

$$y' = \frac{2x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{1+x^2}{1+x^2} - 1}{2a} = \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{a};$$

3. Пользуясь правилами нахождения производной произведения функций

$$(u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \dots \cdot u_n(x))' = u_1'(x) \cdot u_2(x) \cdot \dots \cdot u_n(x) + \\ + u_1(x) \cdot u_2'(x) \cdot u_n(x) + \dots + u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \dots \cdot u_n'(x)$$

получим

$$y' = 3x^2 \cdot \cos x \cdot \ln x + x^3 \cdot (-\sin x) \cdot \ln x + \frac{x^3 \cdot \cos x}{x} = \\ = x^2 \cdot (3 \cos x \cdot \ln x - x \cdot \sin x \cdot \ln x + \cos x)$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, вычислить производные следующих функций:

4. $y = (x^2 - 5x + 1)^{100}$;

5. $y = \cos(\ln 7x)$;

6. $y = e^{-x^3} \cdot \arcsin 5x$;

Решение:

4. Рассматривая $y = (x^2 - 5x + 1)^{100}$ как сложную функцию, её можно представить в виде $y = u^{100}$, где $u = x^2 - 5x + 1$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции находим $y' = y' \cdot u' = 100u^{99} \cdot (2x - 5)$. Остается перейти от временно введенного обозначения u и к его выражению через x .

Окончательно получим $y' = 100 \cdot (x^2 - 5x + 1)^{99} \cdot (2x - 5)$.

5. Данную функцию можно представить через элементарные следующим образом: $y = \cos u$, $u = \ln v$, $v = 7x$. По правилу дифференцирования сложной функции находим

$$y' = y' u' v' = -\sin u \cdot \frac{7}{v} \quad \text{или}$$

$$y' = -\sin(\ln 7x) \cdot \frac{7}{7x} = \frac{-\sin(\ln 7x)}{x}$$

6. Воспользуемся правилом нахождения производной произведения и производной сложной функции

$$y' = (e^{-x^3})' \cdot \arcsin 5x + e^{-x^3} \cdot (\arcsin 5x)'$$

Вычислим

отдельно производную функций $y_1 = e^{-x^3}$, $y_2 = \arcsin 5x$.

Функции y_1, y_2 можно представить в виде композиции элементарных функций:

$$y_1 = e^{u_1}, u_1 = -x^3 \quad \text{и} \quad y_2 = \arcsin u_2, u_2 = 5x.$$

Поэтому

$$(y_2)' = (y_2)' \cdot (u_2)' = \frac{5}{\sqrt{1-(u_2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}},$$

$$(y_1)' = -3x^2 \cdot e^{-x^3}$$

Окончательно получим

$$y' = -3x^2 \cdot e^{-x^3} \cdot \arcsin 5x + \frac{5e^{-x^3}}{\sqrt{1-25x^2}} =$$

$$= e^{-x^3} \cdot \frac{5 - 3x^2 \cdot \sqrt{1-25x^2} \cdot \arcsin 5x}{\sqrt{1-25x^2}}$$

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Логарифмическая производная применяется для нахождения производных функций вида $(f(x))^{\varphi(x)}$, а также функцией вида

$$\frac{f_1^{\alpha_1}(x) f_2^{\alpha_2}(x) \dots f_n^{\alpha_n}(x)}{g_1^{\beta_1}(x) g_2^{\beta_2}(x) \dots g_k^{\beta_k}(x)}$$

Вычислить производные следующих функций:

7. $y = (\cos x)^{\sin x}$;

8. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt{(x-3)^{11}}}$.

Решение:

7. Логарифмируем обе части равенства $\ln y = \sin x \cdot \ln \cos x$. Далее дифференцируем обе части по x , рассматривая левую часть как сложную функцию от x

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln \cos x - \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x},$$

откуда $y' = y \cdot (\cos x \cdot \ln \cos x - \sin x \cdot \operatorname{tg} x)$. Подставляя в правую часть равенства вместо y его выражение из условий задачи, окончательно получим

$$y' = (\cos x)^{\sin x} (\cos x \cdot \ln \cos x - \sin x \cdot \operatorname{tg} x).$$

8. Для нахождения производной этой функции также удобно применить логарифмирование, так как непосредственное вычисление производной по правилам дифференцирования произведения и частного приводит к громоздким выкладкам. Вычислим производную от логарифма модуля этой функции

$$\ln|y| = \ln \sqrt{x-1} - \ln \sqrt[3]{x+2} - \ln \sqrt{(x-3)^{11}} = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| - \frac{11}{2} \ln|x-3|.$$

Заметим, что $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, так как $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$;

$$(\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}, x < 0.$$

Поэтому

$$(\ln|x-1|)' = \frac{1}{x-1},$$

$$(\ln|x+2|)' = \frac{1}{x+2},$$

$$(\ln|x-3|)' = \frac{1}{x-3},$$

$$(\ln|y|)' = \frac{y'}{y}$$

После дифференцирования получим

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{3}(x+2) - \frac{11}{2}(x-3),$$

откуда

$$\begin{aligned} y' &= y \cdot \frac{3(x+2) \cdot (x-3) - 2(x-1) \cdot (x-3) - 33(x-1) \cdot (x+2)}{6(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)} = \\ &= \sqrt{x-1} \cdot \frac{2 \cdot (16x^2 - 14x + 21)}{\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt{(x-3)^{11}}} \cdot 6(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3) = \\ &= \frac{16x^2 - 14x + 21}{3\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{(x+2)^4} \cdot \sqrt{(x-3)^{13}}} \end{aligned}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ Вычислить:

9. y'_x для функции, задаваемой формулой

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^2 t, \\ y = b \cdot \sin^3 t \end{cases}$$

10. y''_{xx} для функции, задаваемой формулой

$$\begin{cases} x = 2e^{-t}, \\ y = e^{2t} \end{cases}$$

Решение:

9. Производная функции, заданной параметрически, вычисляется по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3b \cdot \sin^2 t \cdot \cos t}{2a \cdot \cos t \cdot (-\sin t)} = \frac{-3b \cdot \sin t}{2a}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^2 t, \\ y'_x = \frac{-3b \cdot \sin t}{2a} \end{cases}$$

10. Вычислим сначала производную первого порядка y'_x

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2e^{2t}}{-2e^{-t}} = -e^{3t}. \text{ Следовательно, } \begin{cases} x = 2e^{-t}, \\ y'_x = -e^{3t}. \end{cases}$$

Далее дифференцируем по x уже найденную производную y'_x . Она также выражается через параметр t , поэтому нужно еще раз применить правило для дифференцирования функции, заданной параметрически, к y'_x .

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-3e^{3t}}{-2e^{-t}} = \frac{3e^{4t}}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = 2e^{-t}, \\ y''_{xx} = \frac{3e^{4t}}{2}. \end{cases}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНО

Вычислить производные следующих функций:

11. $x^3 + y^3 - 3axy = 0;$

12. $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln \frac{x^2 + y^2}{2}.$

Решение: для нахождения производной y'_x функции, заданной неявно, надо продифференцировать уравнение по x , считая y сложной

функцией, зависящей от x , а затем решить получившееся уравнение относительно y' .

$$11. 3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3a \cdot (y + xy') = 0;$$

$$y^2 \cdot y' - axy' = ay - x^2;$$

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

$$12. \frac{\frac{y'x - y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{y'x - y}{x^2 + y^2} = \frac{x + yy'}{x^2 + y^2},$$

откуда, $y'x - y = x + yy'$,

$$y' \cdot (x - y) = x + y,$$

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

УРАВНЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К КРИВОЙ.

13. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$ в

точке $\left(2; \frac{1}{5}\right)$.

14. Написать уравнение касательной к кривой $y = 4x^2 - 6x + 3$;

а) параллельной прямой $y = 2x$;

б) перпендикулярно прямой $y = \frac{x}{4}$;

Решение: касательная к кривой в точке $(x_0; y_0)$ имеет уравнение $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Нормаль $y - y_0 = -\frac{(x - x_0)}{y'(x_0)}$
или

$$x - x_0 = -y'(x_0) \cdot (y - y_0)$$

13. Находим $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. Находим угловой коэффициент касательной в точке $\left(2; \frac{1}{5}\right)$.

$y'(2) = \frac{-4}{25}$, подставляем в уравнение касательной и получим

$y - \frac{1}{5} = \frac{-4(x-2)}{25}$, или $4x + 25y - 13 = 0$. Уравнение нормали будет

иметь вид $y - \frac{1}{5} = \frac{25(x-2)}{4}$ или $125x - 20y - 246 = 0$.

14. Пусть точка касания имеет координаты $(x_0; y_0)$. Находим угловой коэффициент касательной в точке $(x_0; y_0)$. $y'(x_0) = 8x_0 - 6$;

а) Для того, чтобы касательная была параллельна прямой $y = 2x$, угловой коэффициент касательной должен быть равен угловому коэффициенту прямой $8x_0 - 6 = 2$, где $x_0 = 1$ — абсцисса точки касания.

Находим $y_0 = y(x_0) = 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = 1$ — ордината точки касания.

Уравнения касательной $y - 1 = 2(x - 1)$ или $y - 2x + 1 = 0$;

б) Для того, чтобы касательная была перпендикулярна прямой, необходимо, чтобы их угловые коэффициенты удовлетворяли

условию $k_{\text{кас}} = \frac{-1}{k_{\text{пр}}}$, так как $k_{\text{пр}} = \frac{1}{4}$ получим уравнение

$8x_0 - 6 = -4$, откуда $x_0 = \frac{1}{4}$ — абсцисса точки касания, ордината точки касания

$$y_0 = y(x_0) = 4 \cdot \frac{1}{4^2} - 6 \cdot \frac{1}{4} + 3 = \frac{7}{4}$$

Уравнение касательной $y - \frac{7}{4} = -4 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)$ или $16x + 4y - 11 = 0$.

§2. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ.

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt[3]{1+2x}+1) = \lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{2+x}+x) = 0$, то имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Применяем правило Лопиталя.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2}{3}(1+2x)^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}(2+x)^{-\frac{1}{2}}+1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{4}{9}$$

Правило Лопиталя применимо, так как предел отношения производных существует (мы этот предел просто вычислили и получили, что он равен $\frac{4}{9}$). Если предел отношения производных опять

приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, можно попробовать применить правило Лопиталя еще раз.

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

Первые три предела в этой цепочке равенств — это неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Из существования $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$

следует существование предыдущего $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ и т.д.

При $x \rightarrow \infty$ функции x^a ($a > 0$), $\log_a x$ ($a > 1$), a^x ($a > 1$) являются бесконечно большими. Выясним какая из этих функций растет быстрее.

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot \ln a \cdot a x^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a \ln a \cdot x^a} = 0$$

(в этом пределе правило Лопиталя было применено к неопределенности вида « $\frac{\infty}{\infty}$ »).

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a x^{a-1}}{a^x \ln a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(a-1) \cdot x^{a-2}}{a^x \ln^2 a} = \dots = 0$$

(каждый раз применяя правило Лопиталя к неопределенности вида « $\frac{\infty}{\infty}$ »; делаем это до тех пор, пока степень x в числителе дроби не станет равной нулю – для целых a – или меньшей нуля – для нецелых a ; тем самым мы и раскрываем неопределенность). Следовательно, при $x \rightarrow +\infty$ степенная функция x^a ($a > 0$) растет быстрее логарифмической $\log_a x$ ($a > 1$), а показательная функция a^x ($a > 1$) – быстрее степенной x^a ($a > 0$).

Неопределенность другого вида (не « $\frac{0}{0}$ » или « $\frac{\infty}{\infty}$ ») нужно тем или иным образом сводить к этим неопределенностям.

$$5. \lim_{x \rightarrow 0+} \sin x \cdot \ln x. \text{ Имеем неопределенность вида «} 0 \cdot \infty \text{»}.$$

Используя отрицательные степени преобразуем ее в дробь. При этом получится неопределенность вида « $\frac{\infty}{\infty}$ », к которой и применимо правило Лопиталя.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \sin x \cdot \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-(\sin x)^{-2} \cdot \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \cos x} = - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{\cos x} = -1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

В общем случае неопределенность вида « $0 \cdot \infty$ » рекомендуется представлять так

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, \text{ это неопределенность вида «} \frac{0}{0} \text{» или «} \frac{\infty}{\infty} \text{»}.$$

В каждом примере такого типа нужно выбирать, какую из двух функций переводить в знаменатель дроби. Практика показывает, что, как правило, логарифмическую функцию стоит оставлять в

числителе. Например $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{(\ln x)^{-1}}$.

Это неопределенность вида « $\frac{0}{0}$ ». Однако применение правила Лопиталья снова приводит к неопределенности (вида « $0 \cdot \infty$ »), только ситуация ухудшается из-за увеличения степени у логарифмической функции

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{(\ln x)^{-1}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{-(\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln^2 x = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln^2 x \end{aligned}$$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$. Имеем неопределенность вида « $\infty - \infty$ ». Приведем

к общему знаменателю, получим неопределенность вида « $\frac{0}{0}$ », к которой и применим правило Лопиталья.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1) \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} \end{aligned}$$

К этой неопределенности вида « $\frac{0}{0}$ » применяем правило Лопиталья еще раз

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}$$

7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$. Имеем неопределенность вида « ∞^0 ».

Обозначим $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$ и вместо предела $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} y$ рассмотрим

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{ctg} x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{ctg} x)^{-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0\end{aligned}$$

(Здесь неопределенность вида « $\infty \cdot 0$ » была сведена к неопределенности вида « $\frac{0}{0}$ », к которой и было применено правило Лопиталя).

Раз $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \ln y = 0$, то из непрерывности показательной функции e^x

следует что $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} y = e^0 = 1$. Итак $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = 1$.

8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos 2x) \cdot \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3 \ln \cos 2x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln \cos 2x}{x^2}}$$

В последнем переходе используется непрерывность показательной функции e^x . Применяя далее для удобства записи обозначение $e^a = \exp\{a\}$, имеем

$$\begin{aligned}e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln \cos 2x}{x^2}} &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln \cos 2x}{x^2}\right\} = \\ &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0} 3(-\sin 2x) \cdot \frac{2}{2x \cos 2x}\right\} = \\ &= \exp\left\{-6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x}\right\} = \exp\{-6\} = e^{-6}\end{aligned}$$

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Начнем с более простого варианта — формулы Тейлора для многочлена степени n :

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0) \cdot (x - x_0) + P''(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \\ + P^{(n)}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

9. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ при $x_0 = 2$

$$P(x_0) = 8 - 8 + 6 + 5 = 11$$

$$P'(x) = 3x^2 - 4x + 3, \quad P'(x_0) = 12 - 8 + 3 = 7$$

$$P''(x) = 6x - 4, \quad P''(x_0) = 12 - 4 = 8 \quad ;$$

$$P'''(x) = 6, \quad P'''(x_0) = 6$$

Таким образом, $P(x) = 11 + 7(x - 2) + 4(x - 2)^2 + (x - 2)^3$

Перейдем теперь к формуле Тейлора для функции $f(x)$, $(n+1)$ раз дифференцируемой в окрестности точки x_0 (с остаточным членом в форме Лагранжа):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f''(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \\ + f^{(n)}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

где $c = c(x)$ – некоторая точка между x_0 и x , $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Особенностью такой формы записи остаточного члена является то, что хотя точка $c = c(x)$ нам и не известна, но остаточный член можно оценить.

10. Написать 10 членов формулы Тейлора для функции $f(x) = \ln(1+x)$ при $x_0 = 0$ и оценить остаточный член (т.е. погрешность) этой формулы для $x \in [0, 1]$. При $x_0 = 0$ формула Тейлора имеет вид

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \\ + f^{(n+1)}(\theta x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Это формула Маклорена.

Для нашего примера

$$f(0) = 0; f'(x) = \frac{1}{1+x}; f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}; f''(0) = -1; f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}; f'''(0) = 2;$$

$$f^{(4)}(x) = -2 \cdot \frac{3}{(1+x)^4}; f^{(4)}(0) = -3!; \dots;$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}; f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!;$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Отсюда имеем ($n = 9$).

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - 3! \frac{x^4}{4!} + \dots + 8! \frac{x^9}{9!} - \frac{9! x^{10}}{10!(1+\theta x)^{10}},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10 \cdot (1+\theta x)^{10}}, 0 < \theta < 1$$

Это формула справедлива, например, для $x \in (-1, 1]$, так как $x = -1$ - точка разрыва функции $\ln(1+x)$. Оценим остаточный член этой формулы для $x \in (0, 1)$,

$|r(x)| = P \left| \frac{x^{10}}{10(1+\theta x)^{10}} \right| \leq \frac{1}{10(1+\theta x)^{10}} \leq \frac{1}{10}$, так как наибольшее значение этой дроби будет при наименьшем значении знаменателя, т.е. при $x = 0$.

11. $f(x) = e^x$. Разложить по формуле Маклорена. При помощи этой формулы найти число e с точностью до 0.001.

$$f(0) = 1; f'(x) = e^x; f'(0) = 1; f''(x) = e^x; f''(0) = 1; \dots;$$

$$f^{(n)}(x) = e^x; f^{(n)}(0) = 1; f^{(n+1)}(x) = e^x.$$

Таким образом

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + e^{\theta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

В этой формуле $x \in (-\infty, \infty)$, $0 < \theta < 1$.

Для $x = 1$ $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$

По условию задачи и достаточно взять таким, чтобы

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} \leq \frac{1}{1000}, \text{ т.е. } (n+1)! \geq 3000.$$

Так как $6! = 720$, $7! = 5040$, то $n+1 = 7$, $n = 6$. Тогда

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2,781.$$

12. Написав три члена формулы Тейлора, вычислить приближенно

$\sqrt[5]{33}$ и оценить погрешность полученного результата.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[5]{x}$ и разложим его по формуле Тейлора при $x_0 = 32$ (три члена и остаточный член).

$$f(x_0) = \sqrt[5]{32} = 2; f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}; f'(x_0) = \frac{1}{5 \cdot 2^4} = \frac{1}{80};$$

$$f''(x) = \frac{-4}{25\sqrt[5]{x^9}}; f''(x_0) = \frac{-4}{25 \cdot 2^9} = \frac{-1}{3200}; f'''(x) = \frac{36}{125\sqrt[5]{x^{14}}}$$

$$\text{Отсюда } \sqrt[5]{x} = 2 + \frac{x-32}{80} - \frac{(x-32)^2}{6400} + \frac{6(x-32)^3}{125\sqrt[5]{c^{14}}}.$$

$$\text{Беря в этой формуле } x = 33, \text{ имеем } \sqrt[5]{33} = 2 + \frac{1}{80} - \frac{1}{6400}$$

$$\text{Погрешность этой формулы } r = \frac{6}{125\sqrt[5]{c^{14}}}, c \in [32, 33].$$

Тогда $|r| < \frac{6}{125\sqrt[3]{32^{14}}} = \frac{6}{125 \cdot 2^{14}} = \frac{3}{1024000}$. (С самого начала

было ясно, что $\sqrt[3]{33} = 2$. Мы изучали вопрос, насколько же $\sqrt[3]{33}$ отличается от 2).

При разложении по формуле Маклорена часто бывает полезно использовать как готовое разложение следующих функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}), \quad (3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}), \quad (4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad (5)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \left(\frac{a(a-1)}{2!} \right) \cdot x^2 + \dots + o(x^n) \quad (6)$$

13. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x - x^2 e^{-x}$ по формуле Маклорена до члена x^4 включительно.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) \right] = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$x^2 e^{-x} = x^2 \cdot \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \right) = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\text{Отсюда } f(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} - x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^3 - \frac{5x^4}{6} + o(x^4).$$

(При решении этого примера мы использовали разложение (4) с заменой x на $2x$ и разложение (2) с заменой x на $-x$).

14. Разложить функцию $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ по формуле Маклорена до члена с x^4 включительно.

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + 0(x^5) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + 0(x^5)$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + 0(x^4)}$$

Теперь применим разложение (6) при $a = -1$.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + 0(x^n)$$

с заменой x на $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + 0(x^4)$. При этом, возводя это выражение в различные степени, мы выписываем только члены, содержащие x в степенях меньших или равных 4. Получим

$$f(x) = 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) -$$

$$- \left(\frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8} \right) + \frac{x^4}{16} + 0(x^4) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + 0(x^4)$$

(Заметим, что для того, чтобы разложить дробь $\frac{x}{e^x - 1}$ до члена с x^4 включительно, нам пришлось разложить её знаменатель до члена с x^5 включительно. Правильность этих действий была подтверждена дальнейшими вычислениями).

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ

Решение задач этого раздела основывается на прочном усвоении учащимися основных положений математического анализа в той его части, которая касается вопросов исследования поведения функций: теорема Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши о среднем значении дифференцируемых функций, признак монотонности, теоремы об отыскании наибольших и наименьших значений, точка перегиба, о существовании асимптот графика функций.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Методические указания этого параграфа относятся к решению задач по следующим темам:

1. Возрастание и убывание функций;
2. Экстремумы функций;
3. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба;
4. Асимптоты.

Возрастание и убывание функций. При решении задач по указанной теме используется достаточный признак монотонности функций. Напомним, что для того, чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ возростала (убывала) на этом интервале достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была положительна (отрицательна) всюду на (a, b) , т.е.
 $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), $x \in (a, b)$.

1. Найти интервалы возрастания и убывания функции
 $y = x^3 - 30x^2 + 225x + 1$

Решение:

1. Рассматриваемая функция – многочлен, поэтому её область определения – $(-\infty, +\infty)$.

2. Найдем ее производную

$$f'(x) = 3x^2 - 60x + 225 = 3(x - 5) \cdot (x - 15)$$

3. Определим точки, в которых $f'(x) = 0$. Для этого решим уравнение $(x - 5)(x - 15) = 0$. Имеем $x_1 = 5$, $x_2 = 15$

Критические точки $x_1 = 5$ и $x_2 = 15$ разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty, 5)$, $(5, 15)$, $(15, +\infty)$.

4. Исследуем знак производной $f'(x)$ на каждом из этих интервалов. Если $x < 5$, то $(x-5) < 0$, и $(x-15) < 0$, поэтому $f'(x) > 0$. Если $5 < x < 15$ то $(x-5) > 0$, $(x-15) < 0$ и $f'(x) < 0$. Если $x > 15$, то и $(x-5) > 0$ и $(x-15) > 0$, поэтому $f'(x) > 0$. Полученные результаты удобно свести в таблицу:

X	$(-\infty, 5)$	$(5, 15)$	$(15, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Ответ: на интервалах $(-\infty, 5)$ и $(15, +\infty)$ функция возрастает, а на интервале $(5, 15)$ убывает.

Экстремумы функций. При решении задач на нахождение экстремумов функций следует помнить, что точка x_0 будет точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 верно строгое правило $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). Обычно слово «локальный» опускают и пишут просто «точка максимума» или «точка минимума». Точки максимума и минимума функции есть точки экстремума, а значения функции в этих точках – экстремумы этой функции. Экстремумы функции ищутся среди ее критических точек.

2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$

Решение:

1. Найдем критические точки функции.

$$\text{Имеем } f'(x) = \frac{1-3x}{3x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}}.$$

Производная функции обращается в ноль при $x = \frac{1}{3}$, а не существует в точках $x=0$ и $x=1$ т.е., критические точки функции:

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 0, x_3 = 1.$$

2. Исследуем поведение производной в окрестности точек

x_1, x_2, x_3 . Пусть $0 < h < \frac{1}{3}$, тогда

$$f'\left(\frac{1}{3}-h\right) > 0, f'\left(\frac{1}{3}+h\right) < 0, f'(-h) > 0, f'(h) > 0,$$

$$f'(1-h) < 0, f'(1+h) > 0$$

Следовательно, при $x = \frac{1}{3}$ функция имеет максимум равный

$$f_{\max} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{4}}{3}. \text{ При } x_2 = 0 \text{ экстремума нет, а при } x_3 = 1 \text{ функция}$$

имеет минимум, равный $f_{\min} = f(1) = 0$.

Ответ: в точке $x = \frac{1}{3}$ имеет максимум, а в точке $x = 1$ — минимум.

Выпуклость, вогнутость. Точки перегиба. К задачам этого раздела относятся следующие: определение выпуклости или вогнутости графика функции в окрестности точки или на заданном интервале; определение интервалов выпуклости и вогнутости графика функции и точек перегиба.

Напомним, что график дифференцируемой в интервале (a, b) функции $y = f(x)$ имеет на нем выпуклость (вогнутость), если он лежит в пределах указанного интервала выше (ниже) любой своей касательной. Достаточным условием выпуклости (вогнутости) графика функций, если функция всюду на интервале (a, b) имеет конечную вторую производную, является выполнение неравенства $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), $x \in (a, b)$.

При решении задач, относящихся к первой группе, нужно: вычислить вторую производную функции $f''(x)$; исследовать знак

второй производной в окрестности точки или на заданном интервале.

3. Выяснить является ли график функции $y = x^5 - 5x^3 - 15x^2 + 30$ выпуклым или вогнутым в окрестностях точек (1,11) и (3,3).

Решение:

1. Найдем вторую производную функции

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 30x, \quad f''(x) = 20x^3 - 30x - 30.$$

2. Исследуем знак второй производной в окрестностях точек (1,11) и

(3,3). Пусть $0 < h < \frac{1}{3}$ тогда

$$f'(1-h) < 0, \quad f''(1) < 0, \quad f''(1+h) < 0, \quad f''(3-h) > 0, \quad f''(3) > 0, \\ f''(3+h) > 0$$

Следовательно в окрестности точки (1,11) график функции является выпуклым, а в окрестности точки (3,3) – вогнутым.

4. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = 3x^2 - x^3$

Решение:

1. Область определения рассматриваемой функции интервал $(-\infty, +\infty)$.

2. Найдем ее вторую производную. Имеем

$$f'(x) = 6x - 3x^2, \quad f''(x) = 6 - 6x = 6(1 - x).$$

3. При $x = 1$ $f''(x)$ обращается в ноль. Получаем два интервала выпуклости и вогнутости: $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$.

2. Исследуя знак второй производной в каждом из этих интервалов, выводим, что график функции является вогнутым на интервале $(-\infty, 1)$ и выпуклым на интервале $(1, +\infty)$. Следовательно точка (1,2) является точкой перегиба графика функции. Полученные результаты удобно свести в таблицу:

X	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	вогн.	2	выпукл.

Ответ: точка (1,2) – точка перегиба функции, график функции является вогнутым на интервале $(-\infty, 1)$, и выпуклым на интервале $(1, +\infty)$.

Асимптоты. Прямая L называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние точки $M(x, y)$ графика функции от прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат.

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если существуют пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$$

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx]$$

5. Найти асимптоты графика функции $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$

Решение: функция определена в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$.

Так как $\lim_{x \rightarrow 2+} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty$, то прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика этой функции.

Найдем пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty$ так как эти пределы не являются конечными величинами, горизонтальных асимптот график не имеет.

Определим наклонные асимптоты. Имеем

1.

$$\begin{aligned}
 k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = 1 \\
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (x - x + 2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right)} = 1
 \end{aligned}$$

т.е. существует правая наклонная асимптота $y = x + 1$.

$$2. \quad k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} = -1$$

Разделим числитель и знаменатель на положительную величину $(-x)$, получаем

$$\begin{aligned}
 k &= -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2}{x}}} = -1; \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{-x} + x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} = \\
 &= -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\sqrt{-x} - \sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-x - 2 + x)}{\sqrt{2-x}(\sqrt{-x} + \sqrt{2-x})} = -1
 \end{aligned}$$

Итак, существует левая наклонная асимптота $y = -x - 1$.

Ответ: прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота, прямые $y = x + 1$ и $y = -x - 1$ – наклонные асимптоты графика функции

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}.$$

ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ

Напомним что для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ нужно из значений функций на границах отрезка и в критических точках, принадлежащих этому отрезку, выбрать наибольшее (наименьшее).

6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8$ на отрезке $[-3, 6]$.

Решение:

1. Найдем экстремумы функций. Вычисляем производную $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x+2)(x-3)$. Отсюда имеем $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$ – критические точки. Обе критические точки принадлежат отрезку $[-3, 6]$. Находим вторую производную $f''(x) = 12x - 6$. Так как $f''(-2) < 0$, а $f''(3) > 0$, то в точке $x = -2$ максимум, а в точке $x = 3$ – минимум.

Вычисляем значения функции в точках экстремума и в концах заданного отрезка

$$f(-3) = 19, f(-2) = 36, f(3) = -89, f(6) = 100.$$

Таким образом, наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $[-3, 6]$ равны:

$$\max f(x) = \max\{19, 36, 100\} = 100;$$

$$\min f(x) = \min\{19, -89, 100\} = -89$$

Ответ: наибольшее значение функции на отрезке $[-3, 6]$ равно 100, а наименьшее – (-89).

7. Определить размеры, закрытой коробки объема V с квадратным основанием, на изготовление которой расходуется наименьшее кол-во материала.

Решение:

1. Обозначим через x сторону основания коробки, через z ее высоту. Пусть y ее полная поверхность. По условию задачи введенные переменные удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$y = 2x^2 + 4xz;$$

$$V = x^2 z$$

Выразим y через V и x , тогда $y = 2x^2 + 4 \frac{V}{x}$

По условию задачи необходимо найти минимум функции

$$f(x) = 2x^2 + 4 \frac{V}{x}, \text{ где } V = \text{const}.$$

2. Интервал $(0, +\infty)$ – есть промежуток изменения аргумента этой функции.

Найдем $y' : y' = 4 \left(x - \frac{V}{x^2} \right)$. Уравнение $y'(x) = 0$ при $x > 0$ имеет

единственное решение $x = \sqrt[3]{V}$. При переходе через эту точку производная функции $f(x)$ меняет знак с минуса на плюс и, следовательно, функция достигает в этой точке своего минимума.

Подставляя значения $x = \sqrt[3]{V}$ в уравнение $V = x^2 z$, получим

$$z = \frac{V}{x^2} = \sqrt[3]{V}. \text{ Высота коробки должна быть равна стороне}$$

основания, т.е. коробка должна быть кубом с ребром $\sqrt[3]{V}$.

Ответ: сторона основания и высота коробки равны $\sqrt[3]{V}$.

8. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

Решение:

1. Обозначим x и y неизвестные слагаемые. Пусть S – число, равное сумме кубов чисел x и y . По условию задачи эти числа удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$x + y = 8;$$

$$x^3 + y^3 = S$$

Тогда имеем $S = x^3 + y^3 = x^3 + (8 - x)^3 = 24x^2 - 192x + 512$, область определения которой – интервал $(-\infty, +\infty)$.

2. Найдем $S'(x)$: $S'(x) = 48x - 192 = 48(x - 4)$. Производная этой функции обращается в ноль при $x_0 = 4$. Легко заметить, что при $x < x_0$ $S' < 0$, а при $x > x_0$ $S' > 0$, т.е. точка $x_0 = 4$ – точка минимума функции $S(x)$. Следовательно первое слагаемое $x = 4$, а второе $y = 4$.

Ответ: первое и второе слагаемые равны 4.

§4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЁ ГРАФИКА

При построении графиков функций можно придерживаться следующей схемы:

найти область определения функции;

проверить, является ли функция чётной, нечётной, периодической;

найти точки пересечения графика с осями координат, промежутки, где значения функции положительны, отрицательны;

найти точки разрыва функции. Найти односторонние пределы функции в граничных точках области определения и в точках разрыва;

найти асимптоты графика;

вычислить первую производную функции, найти экстремумы и промежутки возрастания и убывания функции;

вычислить вторую производную функции;

найти точки перегиба графика, промежутки выпуклости или вогнутости. Найти угловой коэффициент касательной в точках перегиба;

нарисовать график функции, предварительно вычислив координаты нескольких дополнительных точек, чтобы уточнить поведение кривой на отдельных участках.

По мере выполнения всех пунктов исследования функции данные наносятся на график либо в виде точек, либо в виде стрелок, указывающих на поведение функции вблизи точек разрыва функции или на концах интервалов существования функции. Строятся также асимптоты графика функции, а в точках перегиба касательные к графику функции.

1. Провести исследование и построить график функции $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$.

1. Функция существует всюду, кроме точек $x = \pm\sqrt{3}$, т.е.
 $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

2. Функция нечётная, так как $f(-x) = \frac{(-x)^3}{3 - (-x)^2} = -f(x)$.

Следовательно, её график симметричен относительно начала координат. На этом основании можно ограничиться исследованием и построением графика только для $x \geq 0$, затем, пользуясь симметричностью, можно легко получить и остальную часть графика. Функция неперiodическая.

3. График пересекает ось Ox в точках, где $y = 0$, т.е. $\frac{x^3}{3 - x^2} = 0$ при $x = 0$ (в начале координат).

$y > 0$ или $\frac{x^3}{3 - x^2} > 0$ при $0 < x < \sqrt{3}$ и

$y < 0$ или $\frac{x^3}{3 - x^2} < 0$ при $\sqrt{3} < x < +\infty$,

что видно при решении соответствующих неравенств. Неравенства можно решить методом интервалов.

$$\frac{x^3}{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)} > 0 \Rightarrow \frac{x^3}{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)} < 0 \Rightarrow x \in (0, \sqrt{3})$$

Аналогично < 0 при $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$.

4. Функция имеет разрыв второго рода в точке $x = \sqrt{3}$, причём

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} \frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty.$$

Кроме того $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty$.

5. Из п.4. следует, что $x = \sqrt{3}$ – вертикальная асимптота графика. Наклонная асимптота $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(3-x^2)} = -1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3-x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{3-x^2} = 0$$

Отсюда $y = -x$ является наклонной асимптотой графика.

6. Находим производную

$$y' = \frac{(3-x^2)(3x^2 + 2xx^3)}{(3-x^2)^2} = \frac{9x^2 - x^4}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x)(3+x)}{(3-x^2)^2},$$

приравняем её к нулю $\frac{x^2(3-x)(3+x)}{(3-x^2)^2} = 0$.

Тогда $x^2(3-x)(3+x) = 0$. Последнее имеет место при $x = 3$, $x = -3$, $x = 0$.

В соответствии с установленным, нам придётся исследовать на экстремум только точку $x = 3$. Знак производной слева и справа от точки $x = 3$ будет зависеть только от знака числителя в выражении производной, так как знаменатель всегда положителен. В окрестности точки $x = 3$ имеем $y'(3-\varepsilon) > 0$ и $y'(3+\varepsilon) < 0$, где $\varepsilon > 0$.

Следовательно, в точке $x = 3$ функция имеет максимум

$$y = \frac{-27}{6} = -4,5$$

При $x \in (0, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$ функция возрастает, при $x \in (3, \infty)$ функция убывает.

Те же результаты можно получить, исследуя знак первой производной по методу интервалов. На оси Ox отмечаем точки $x = 0$, $x = \sqrt{3}$, $x = 3$ и проверяем знак первой производной на каждом из полученных интервалов:

$$y'(x) \xrightarrow{\quad + \quad} \underset{0}{\cdot} \xrightarrow{\quad + \quad} \underset{\sqrt{3}}{\cdot} \xrightarrow{\quad + \quad} \underset{3}{\cdot} \xrightarrow{\quad - \quad} \rightarrow$$

7. Исследуем кривую на выпуклость и вогнутость, перегибы. Находим вторую производную.

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{9x^2 - x^4}{(3 - x^2)^2} \right)' = \\ &= \frac{(3 - x^2)^2 (18x - 4x^3) + (9x^2 - x^4) \cdot 2(3 - x^2) \cdot 2x}{(3 - x^2)^4} = \\ &= \frac{(3 - x^2)^2 (18x - 4x^3) + 4x(9x^2 - x^4)}{(3 - x^2)^3} = \\ &= \frac{54x - 18x^3 - 12x^3 + 4x^5 + 36x^3 - 4x^5}{(3 - x^2)^3} = \\ &= \frac{54x + 6x^3}{(3 - x^2)^3} = \frac{6x \cdot (9 + x^2)}{(3 - x^2)^3} \end{aligned}$$

Мы видим, что $y'' = 0$ только при $x = 0$.

При этом в окрестности точки $x = 0$ будет $y''(0 - \varepsilon) < 0$ и $y''(0 + \varepsilon) > 0$, где $\varepsilon > 0$.

Следовательно, в начале координат кривая имеет перегиб (впрочем, и наличие перегиба в начале координат обнаружилось бы и после симметричного продолжения графика налево от оси Oy). Иногда направление вогнутости может измениться при переходе через разрыв кривой, поэтому следует выяснить знак y'' и около точек разрыва функции. В данном случае $y'' > 0$ на промежутке $(0, \sqrt{3})$ и $y'' < 0$ на промежутке $(\sqrt{3}, \infty)$. Следовательно кривая вогнута на промежутке $(0, \sqrt{3})$ и выпукла на промежутке $(\sqrt{3}, \infty)$.

Те же результаты можно получить, исследуя знак второй производной по методу интервалов. На оси Ox отмечаем точки $x = 0$ и $x = \sqrt{3}$ и проверяем знак второй производной на каждом из полученных интервалов:

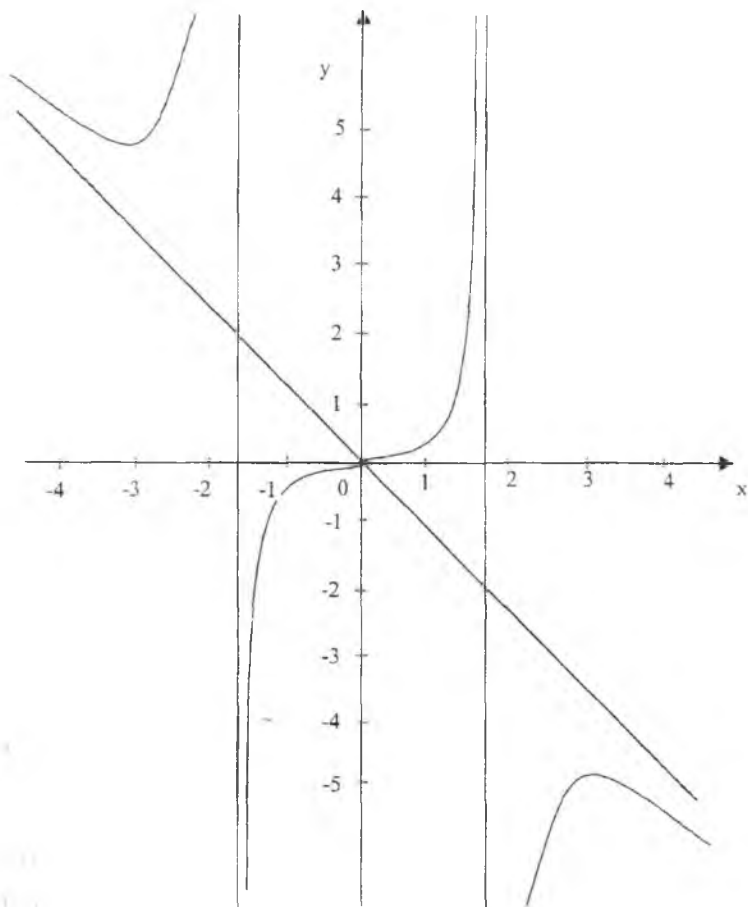
$$y''(x) \xrightarrow{-} \underset{0}{\bullet} \xrightarrow{+} \underset{\sqrt{3}}{\bullet} \xrightarrow{-} \rightarrow$$

Угловой коэффициент касательной в точке перегиба $k = f'(0) = 0$.

8. Вычислив $f(1)=0,5$; $f(0,5)=0,04$; $f(3,5)=4,6$.

Рисуем график функции.

При этом для $x < 0$ пользуемся симметричностью графика.



Глава VI

Интегральное исчисление

В связи с тем, что не существует удобного на практике общего метода вычисления неопределённых интегралов, приходится рассматривать способы интегрирования некоторых частных классов функций, интегралы от которых часто встречаются на практике.

§1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ.

Рациональную дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, где $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ - некоторые многочлены степени m и n ($n \geq 1$), называют правильной, если $m < n$, иначе дробь называется неправильной. Каждая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби. Поэтому вопрос об интегрировании рациональных дробей сводится к вопросу об интегрировании правильных дробей.

1 случай.

$n = 1$. Имеем $\int \frac{A}{ax+b} dx$, где A, a, b - действительные числа, $a \neq 0$.

Решение:

$$\int \frac{A}{ax+b} dx = \left| \begin{array}{l} t = ax+b \\ dt = a dx \end{array} \right| = \int \frac{A}{t} \cdot \frac{dt}{a} = \frac{A}{a} \ln|t| + C = \frac{A}{a} \ln|ax+b| + C$$

Пример 1: $\int \frac{3dx}{1-2x} = -\frac{3}{2} \ln|1-2x| + C$

2 случай.

$n = 2$. Имеем $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$, где A, B, p, q - действительные числа, $p^2 < 4q$

Решение:

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \\
&+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \\
&+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C = \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \\
&+ \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q - p^2}} + C
\end{aligned}$$

Пример 2:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+1}{x^2+3x+5} dx &= \int \frac{\frac{3}{2} \cdot (2x+3) - \frac{7}{2}}{x^2+3x+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx - \\
&- \frac{7}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} = \frac{3}{2} \ln(x^2+3x+5) - \frac{7}{\sqrt{11}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{11}} + C
\end{aligned}$$

3 случай.

$n \geq 3$. Имеем $\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, где $m < n$.

Решение. Разлагаем знаменатель на линейные и квадратные множители и представляем данную дробь в виде суммы дробей случаев 1 и 2 с неопределёнными числителями.

Пример3:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2+1}{x^3-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}, \\ x^2+1 &= A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) \\ \int \frac{x^2+1}{x^3-1} dx &= \left. \begin{aligned} x=0: 1 &= A-C \\ x=1: 2 &= 3A \\ x=-1: 2 &= A-2(C-B) \end{aligned} \right\} A = \frac{2}{3}, C = -\frac{1}{3} = \\ 2B &= 2 - A + 2C = 2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{3} \end{aligned} \right| =$$

$$\begin{aligned} &= \int \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x-1}{x^2+x+1} \right) dx = \frac{2}{3} \ln|x-1| + \\ &+ \frac{1}{3} \int \frac{1 \cdot (2x+1) - \frac{3}{2}}{x^2+x+1} dx = \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \\ &- \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

Рассмотрим случаи, когда знаменатели дробей случаев 1 и 2 в натуральной степени.

Интеграл $\int \frac{A dx}{(ax+b)^n}$ вычисляется так же как и в случае 1.

Имеем $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$, который теми же методами сводится к

интегралу $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$ сделаем замены

$$t = x + \frac{p}{2}, \quad a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \\ &- \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \cdot J_{n-1} - \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^n} = \end{aligned}$$

$$= \left. \begin{aligned} u &= t \\ dV &= \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} \\ du &= dt \\ V &= \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}} \end{aligned} \right| = \frac{1}{a^2} \cdot J_{n-1} -$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{a^2} \left[-\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} \right] = \\ &= \frac{1}{a^2} \cdot J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot J_{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } J_n = \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{2n-3}{n-1} \cdot J_{n-1}$$

По этой рекуррентной формуле из значения J_1 находим J_2 , а затем J_3 и т.д.

Пример 4:
$$\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \left| \begin{matrix} x-1=t \\ a=1 \end{matrix} \right| = \int \frac{dx}{(t^2 + 1)^2} = J_2$$

Найдём $J_1 = \int \frac{dx}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C$, тогда

$$J_2 = \frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2} \cdot J_1 = \frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{x-1}{2(x^2 - 2x + 2)} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}(x-1) + C$$

Хотя описанная выше методика интегрирования рациональных функций и обладает общностью, не всякий раз имеет смысл её придерживаться, так как в отдельных случаях интеграл может быть значительно проще вычислен.

Пример 5:

$$\int \frac{6x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x} dx = \int \frac{(6x^2 + 5x + 4)x^3}{(x^3 + x^2 + x)x^3} dx = \int \frac{6x^5 + 5x^4 + 4x^3}{x^6 + x^5 + x^4} dx =$$

$$= \ln|x^6 + x^5 + x^4| + C$$

Пример 6:

$$\int \frac{xdx}{2x^4 - 2x^2 + 1} = \int \frac{2xdx}{4x^4 - 4x^2 + 2} = \left| \begin{matrix} t=2x^2-1 \\ dt=4xdx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}(2x^2 - 1) + C$$

Пример 7:

$$\int \frac{x^7 + x^4 - x^3 + 1}{x^8 - 1} dx = \int \frac{x^3(x^4 - 1) + x^4 + 1}{(x^4 - 1)(x^4 + 1)} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \left(\frac{x^3}{x^4+1} + \frac{1}{x^4-1} \right) dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3 dx}{x^4+1} + \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x^2-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1} \right) dx = \\
 &= \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C
 \end{aligned}$$

§2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Основным методом интегрирования иррациональных функций является метод, основанный на рационализации подынтегральной функции путём надлежащим образом подобранной подстановки.

Здесь мы остановимся на применении этого метода в основном к трём простейшим классам иррациональностей.

1 случай.

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{P_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{P_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{P_n} \right] dx, \quad \text{где}$$

$P_1, P_2, \dots, P_n$ - дроби, a, b, c, d - действительные числа, причём $ad - bc \neq 0$, R - рациональная функция от своих аргументов.

Для рационализации применим подстановку $\frac{ax+b}{cx+d} = t^S$, где

S - наименьшее общее кратное знаменателей дробей $P_1, P_2, \dots, P_n$.

Пример 1:

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{(\sqrt[6]{x-1} - \sqrt[6]{x+1}) dx}{\sqrt{(x+1)^5} \cdot (\sqrt[6]{(x-1)^2(x+1)} + \sqrt{x-1})} = \\
 &= \int \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1}{(x+1)^2 \left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right)} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x-1}{x+1} = t^6, \quad x = \frac{t^6+1}{1-t^6}, \\ dx = \frac{12t^5 dt}{(1-t^6)^2} \end{array} \right| =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{t-1}{\left(\frac{2}{1-t^6}\right)^2 (t^2+t^3)} \cdot \frac{12t^5 dt}{(1-t^6)^2} = 3 \int \frac{(t-1)t^3 dt}{t+1} = \\
 &= 3 \int \left(t^3 - 2t^2 + 2t - 2 + \frac{2}{t+1} \right) dt = \\
 &= 3 \cdot \left(\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + t^2 - 2t + 2 \ln|t+1| \right) + C = \frac{3}{4} \cdot 3 \sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2} - \\
 &- 2 \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 3 \cdot 3 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 6 \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 2 \ln \left| 6 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1 \right| + C
 \end{aligned}$$

2 случай: $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, где a, b, c — действительные числа, R — рациональная функция.

Для рационализации применим подстановки Эйлера:

- 1) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t$, если $a > 0$
- 2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + xt$, если $c > 0, a < 0$
- 3) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \cdot (x - \alpha)$, если $c < 0, a < 0$

где α — корень квадратного трёхчлена.

Возведя обе части подстановки в квадрат можно найти X и затем dx . Тогда через t данный интеграл будет от рациональной функции.

Пример 2:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x + 4}} &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2 - 2x + 4} = x + t, \quad x^2 - 2x + 4 = x^2 + 2xt + t^2 \\ x = \frac{4 - t^2}{2t + 2}, \quad dx = \frac{-2 \cdot (t^2 + 2t + 4)}{(2t + 2)^2} dt \end{array} \right| = \\
 &= \int \frac{-2 \cdot (t^2 + 2t + 4)}{(2t + 2)^2} dt \\
 &= \int \frac{(2t + 2)^2}{4 - t^2} \cdot \frac{4 - t^2}{2t + 2} dt = -2 \int \frac{t^2 + 2t + 4}{(4 - t^2)(4 - t^2 + 2t^2 + 2t)} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 4} =
 \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x - 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x + 2} \right| + C$$

Нередко подстановки Эйлера ведут к громоздким вычислениям. Поэтому при вычислении интегралов вида:

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \quad \int (Ax + B) \sqrt{ax^2 + bx + c} dx,$$

$$\int \frac{dx}{(Ax + B) \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

проще принять другие подстановки.

Пример 3:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2) + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx + \\ &+ 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} = \\ &= \sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2 \ln |x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}| + C \end{aligned}$$

Пример 4:

$$\begin{aligned} \int (x+1) \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx &= \int \left[\frac{1}{2}(2x-2) + 2 \right] \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (2x-2) \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx + 2 \int \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx = \\ &= \frac{1}{3} (x^2 - 2x + 5)^{\frac{3}{2}} + 2 \int \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx \end{aligned}$$

Полученный интеграл вычислим отдельно

$$J = \int \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{x^2 - 2x + 5}, \quad v = x \\ dv = dx, \quad du = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= x\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \int \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx = x\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \\
&- \int \frac{(x^2 - 2x + 5) + x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx = x\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \int \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx - \\
&- \int \frac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx
\end{aligned}$$

Отсюда $J = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \frac{1}{2} \int \frac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx$. Этот интеграл вычисляется как в примере 3.

Пример 5:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 6}} &= \left| \begin{array}{l} x+1 = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{1 \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{4}{t} + 9}} = \\
&= -\int \frac{dt}{\sqrt{1 - 4t + 9t^2}} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{4}{9}t + \frac{1}{9}}} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t - \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{1}{9} - \frac{4}{81}}} = \\
&= -\frac{1}{3} \ln \left| t - \frac{2}{9} + \sqrt{t^2 - \frac{4}{9}t + \frac{1}{9}} \right| + C = -\frac{1}{3} \ln \left| 9t - 2 + 3\sqrt{9t^2 - 4t + 1} \right| + C = \\
&= -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{9}{x+1} - 2 + 3\sqrt{\frac{9}{(x+1)^2} - \frac{4}{x+1} + 1} \right| + C = \frac{1}{3} \ln |x+1| - \\
&- \frac{1}{3} \ln |7 - 2x + 3\sqrt{x^2 - 2x + 6}| + C
\end{aligned}$$

При вычислении интегралов вида:

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, \int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$$

удобны подстановки:

$x = a \cdot \sin t$, $x = a \cdot \sec t$, $x = a \cdot \operatorname{tg} t$ соответственно.

Пример 6:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}} = \left| \begin{array}{l} x = 3 \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{3dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{3dt}{\cos^2 t}}{9 \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \cdot 3 \frac{1}{\cos t}} = \frac{1}{9} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} =$$

$$= -\frac{1}{9 \sin t} + C = -\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{9x} + C$$

3 случай.

$\int x^m \cdot (ax^n + b)^p dx$, где m, n, p – рациональные числа, a, b – действительные числа.

П.Л. Чебышев доказал, что этот интеграл в конечном виде вычисляется: при p – целом, заменой $x = t^S$, где S – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m, n ; при $\frac{m+1}{n}$ – целом (p – дробное), заменой $t^S = ax^n + b$, где S – знаменатель дроби p ; при $\frac{m+1}{n} + p$ – целом (p и $\frac{m+1}{n}$ – дроби), заменой $x^n t^S = ax^n + b$, где S – знаменатель дроби p .

Все эти замены являются рационализирующими, т.е. интегралы будут от рациональных функций по переменной t .

Пример 7:

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int x^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{3}} - 1 \right)^{-1} dx = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{t^2 - 1} =$$

$$= 6 \int \frac{t^8 dt}{t^2 - 1} = 6 \int \frac{(t^8 - 1) + 1}{t^2 - 1} dt = 6 \int \left(\frac{t^8 - 1}{t^2 - 1} + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt =$$

$$= 6 \int \left(t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt =$$

$$= 6 \left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C = 6\sqrt[6]{x}.$$

$$\left(\frac{x}{7} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x}}{3} + 1 \right) + 3 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1} \right| + C$$

Пример 8:

$$\int x^7 \sqrt{1+x^4} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{m+1}{n} = \frac{7+1}{4} = 2, \quad 1+x^4 = t^2, \\ x = (t^2-1)^{\frac{1}{4}}, \quad dx = \frac{1}{4}(t^2-1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2t dt \end{array} \right| =$$

$$= \int (t^2-1)^{\frac{7}{4}} t \cdot \frac{1}{2} (t^2-1)^{-\frac{3}{4}} t dt = \frac{1}{2} \int t^2 (t^2-1) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int (t^4 - t^2) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + C = \frac{t^3}{2} \left(\frac{t^2}{5} - \frac{1}{3} \right) + C =$$

$$= \frac{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \left(\frac{1+x^4}{5} - \frac{1}{3} \right) + C = \sqrt{(1+x^4)^3} \left(\frac{x^4}{10} - \frac{1}{15} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{30} \sqrt{(1+x^4)^3} (3x^4 - 2) + C$$

Пример 9:

$$\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^5}} = \int x^{-2} (x^3+1)^{-\frac{5}{3}} dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{m+1}{n} + p = \frac{-2+1}{3} - \frac{5}{3} = -2 \\ 1+x^3 = t^3 x^3, \quad x = (t^3-1)^{\frac{1}{3}} \\ dx = -t^2 (t^3-1)^{-\frac{4}{3}} dt \end{array} \right| = \int (t^3-1)^{\frac{2}{3}} t^{-5} (t^3-1)^{\frac{5}{3}} \cdot$$

$$(-t^2) (t^3-1)^{-\frac{4}{3}} dt = - \int \frac{t^3-1}{t^3} dt = - \int (1-t^{-3}) dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= -t + \frac{t^{-2}}{-2} + C = -t - \frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1+2t^3}{2t^2} + C = \\
 &= -\frac{1+2\frac{1+x^3}{x^3}}{2\left(\frac{1+x^3}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}}} + C = -\frac{2+3x^3}{2x^3\sqrt[3]{(1+x^3)^2}} + C
 \end{aligned}$$

§3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R - рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, для которых выработаны удобные приёмы интегрирования.

1 случай. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ или

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

тогда рационализирующими являются замены $t = \cos x$ и $t = \sin x$ соответственно.

2 случай.

А) $\int \sin^{2n} x \cos^{2m} x dx$, где n, m - целые неотрицательные числа.

Такой интеграл вычисляется понижением степени с помощью

$$\text{тождеств } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Б) $\int \sin^n x \cos^m x dx$, где $m + n$ - чётное. Здесь рационализирующей является замена $t = \operatorname{tg} x$.

3 случай.

$\int \frac{dx}{\sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x}$, где n, m - целые неотрицательные числа. Такие

интегралы приводятся к интегралам $\int \frac{\sin^k x dx}{\cos^{k+2} x}$ и $\int \frac{\cos^k x dx}{\sin^{k+2} x}$, где $k \neq -1$, которые вычисляются заменой и будут считаться в дальнейшем табличными.

$$\int \frac{\sin^k x dx}{\cos^{k+2} x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int t^k dt = \frac{t^{k+1}}{k+1} + C = \frac{\operatorname{tg}^{k+1} x}{k+1} + C$$

$$\int \frac{\cos^k x dx}{\sin^{k+2} x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{ctg} x \\ dt = -\frac{dx}{\sin^2 x} \end{array} \right| = -\int t^k dt = -\frac{t^{k+1}}{k+1} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^{k+1} x}{k+1} + C$$

Тогда $\int \frac{dx}{\sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^{n+m-1}}{\sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x} dx$ после раскрытия скобок и почленного деления получим табличные интегралы.

4 случай.

$\int \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2m} x} dx$, где m – натуральное число, n – целое неотрицательное число.

А) $n \geq m$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2m} x} dx &= \int \frac{\sin^{2m-2} x \cdot (\sin^2 x)^{n-m+1}}{\cos^{2m} x} dx = \\ &= \int \frac{\sin^{2m-2} x (1 - \cos^2 x)^{n-m+1}}{\cos^{2m} x} dx \end{aligned}$$

После раскрытия скобок и почленного деления, получим табличные интегралы, интегралы этого же вида или интегралы 2 случая.

Б) $n < m$.

Тогда

$$\int \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2m} x} dx = \int \frac{\sin^{2n} x (\sin^2 x + \cos^2 x)^{m-n-1}}{\cos^{2m} x} dx$$

после раскрытия скобок и почленного деления получим табличные интегралы.

Пример 1:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx \text{ (1 случай)} &= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = \\ &= \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \sin x dx = \int (1 - t^2) t^4 (-dt) = \int (t^6 - t^4) dt = \\ &= \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

Пример 2:

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx \text{ (2 случай А)} &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \\
 &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x) \sin^2 2x dx = \frac{1}{16} \int (1 + \cos 2x)(1 - \cos 4x) dx = \\
 &= \frac{1}{16} \int (1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cdot \cos 4x) dx = \\
 &= \frac{1}{16} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{1}{32} \int (\cos 6x + \cos 2x) dx = \\
 &= \frac{1}{16} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{1}{32} \left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C = \\
 &= \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C
 \end{aligned}$$

Пример 3:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^6 x} \text{ (3 случай)} &= \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 dx}{\sin^2 x \cdot \cos^6 x} = \\
 &= \int \left(\frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} + 3 \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \\
 &+ \operatorname{tg}^3 x + 3 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C
 \end{aligned}$$

Пример 4:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\cos^4 x}{\sin^{10} x} dx \text{ (4 случай Б)} &= \int \frac{\cos^4 x (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 dx}{\sin^{10} x} = \\
 &= \int \left(\frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} + 2 \frac{\cos^6 x}{\sin^5 x} + \frac{\cos^8 x}{\sin^4 x} \right) dx = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} - \\
 &-\frac{2 \operatorname{ctg}^7 x}{7} - \frac{\operatorname{ctg}^9 x}{9} + C
 \end{aligned}$$

Пример 5:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx \text{ (4 случай A)} &= \int \frac{\cos^2 x (\cos^2 x)^2}{\sin^4 x} dx = \\ &= \int \frac{\cos^2 x (1 - \sin^2 x)^2}{\sin^4 x} dx = \int \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} - 2 \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \cos^2 x \right) dx = \\ &= -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - 2 \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx + \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \\ &+ 2 \operatorname{ctg} x + 2x + \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C = \frac{5}{2} x + \frac{\sin 2x}{4} + 2 \operatorname{ctg} x - \\ &- \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

Интегралы, не относящиеся к изученным 4 случаям, можно вычислять

с помощью замены $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Тогда

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Пример 6:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 - \sin x} &= \left| t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 - \frac{2t}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{3t^2 - 2t + 3} = \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{2}{3}t + 1} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \operatorname{arctg} \frac{t - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}} + \\ &+ C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3t - 1}{\sqrt{8}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{8}} + C \end{aligned}$$

§4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \text{гиперболический синус.}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \text{гиперболический косинус.}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - \text{гиперболические тангенс и котангенс.}$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx, \text{ где } R - \text{рациональная функция от } \operatorname{sh} x \text{ и } \operatorname{ch} x.$$

При интегрировании применяются первые 4 способа для тригонометрических функций с использованием аналогичных

$$\text{тождеств } 1 = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2}$$

и табличных интегралов

$$\int \frac{\operatorname{sh}^k x}{\operatorname{ch}^{k+2} x} dx = \frac{\operatorname{th}^{k+1} x}{k+1} + C, \quad \int \frac{\operatorname{ch}^k x}{\operatorname{sh}^{k+2} x} dx = -\frac{\operatorname{cth}^{k+1} x}{k+1} + C$$

Пример 1:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^3 x \, dx \quad (1 \text{ случай}) &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{sh} x \\ dt = \operatorname{ch} x \, dx \end{array} \right| = \int t^2 \cdot \operatorname{ch}^2 x \, dx = \\ &= \int t^2 (1 + \operatorname{sh}^2 x) \, dt = \int t^2 (1 + t^2) \, dt = \int (t^2 + t^4) \, dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \\ &= \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{sh}^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

Пример 2:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh}^4 x \cdot \operatorname{ch}^2 x \, dx \quad (2 \text{ случай}) &= \int \left(\frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} \right)^2 \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2} \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \operatorname{sh}^2 2x \cdot (\operatorname{ch} 2x - 1) \, dx = \frac{1}{16} \int (\operatorname{ch} 4x - 1)(\operatorname{ch} 2x - 1) \, dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (\operatorname{ch} 4x \cdot \operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} 4x + 1) \, dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16} \int \left(\frac{1}{2} \operatorname{ch} 6x + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} 4x + 1 \right) dx = \\
&= \frac{1}{16} \left(\frac{\operatorname{sh} 6x}{12} - \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{\operatorname{sh} 4x}{4} + x \right) + C
\end{aligned}$$

Пример 3:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x \cdot \operatorname{ch}^4 x} \quad (3 \text{ случай}) &= \int \frac{(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)^3 dx}{\operatorname{sh}^4 x \cdot \operatorname{ch}^4 x} = \\
&= \int \left(\frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^4 x} - \frac{3}{\operatorname{sh}^2 x} + \frac{3}{\operatorname{ch}^2 x} - \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^4 x} \right) dx = -\frac{\operatorname{cth}^3 x}{3} + 3 \operatorname{cth} x + \\
&+ 3 \operatorname{th} x - \frac{\operatorname{th}^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

Пример 4:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^8 x} \quad (4 \text{ случай Б}) &= \int \frac{\operatorname{sh}^2 x (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)^2 dx}{\operatorname{ch}^8 x} = \\
&= \int \left(\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^4 x} - 2 \frac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch}^6 x} + \frac{\operatorname{sh}^6 x}{\operatorname{ch}^8 x} \right) dx = \frac{\operatorname{th}^3 x}{3} - 2 \frac{\operatorname{th}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{th}^7 x}{7} + C
\end{aligned}$$

Пример 5:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{ch}^6 x}{\operatorname{sh}^4 x} \quad (4 \text{ случай А}) &= \int \frac{\operatorname{ch}^2 x \cdot (\operatorname{ch}^2 x)^2 dx}{\operatorname{sh}^4 x} = \\
&= \int \frac{\operatorname{ch}^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 x)^2}{\operatorname{sh}^4 x} dx = \int \left(\frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^4 x} + \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} + \operatorname{ch}^2 x \right) dx = \\
&= -\frac{\operatorname{cth}^3 x}{3} + \int \left(\frac{1 + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} + \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2} \right) dx = -\frac{\operatorname{cth}^3 x}{3} - \operatorname{cth} x + x + \\
&+ \frac{1}{2} x + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + C = \frac{3}{2} x + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \operatorname{cth} x - \frac{\operatorname{cth}^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

Интеграл, не относящийся к приведённым выше случаям, надо вычислять перейдя к экспонентам.

Пример 6:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x dx}{1 + \operatorname{sh} x} &= \int \frac{e^x dx}{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{2}} = 2 \int \frac{e^x dx}{2 + e^x - e^{-x}} = \\&= 2 \int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} + 2e^x - 1} = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = 2 \int \frac{t dt}{t^2 + 2t - 1} = \\&= 2 \int \frac{\frac{1}{2}(2t + 2) - 1}{t^2 + 2t - 1} dt = \int \frac{2t + 2}{t^2 + 2t - 1} dt - 2 \int \frac{dt}{(t + 1)^2 - 2} = \\&= \ln |t^2 + 2t - 1| - 2 \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t + 1 - \sqrt{2}}{t + 1 + \sqrt{2}} \right| + C = \\&= \ln |e^{2x} + 2e^x - 1| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{e^x + 1 - \sqrt{2}}{e^x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C\end{aligned}$$

Индивидуальные домашние задания № 1

ИДЗ 1.1

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

а) получив предварительно нули в строке или столбике;

б) разложив его по элементам k-й строки;

в) разложив его по элементам m-ого столбца.

Данные в таблицах 1,2. См. пример 1 (Глава I).

Таблица 1.

Задания		Варианты									
№ 1	№ 2,3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a ₁₁	a ₁₁	3	-2	2	0	2	1	2	3	1	-1
a ₁₂	a ₁₂	1	0	3	1	0	-2	1	-4	0	2
a ₁₃	a ₁₃	3	-1	1	-1	-2	3	-1	1	3	3
a ₁₄	a ₂₁	0	4	1	3	3	-1	0	4	-3	4
a ₂₁	a ₂₂	-2	1	-1	-4	-1	1	4	1	-2	-2
a ₂₂	a ₂₃	1	1	-3	-2	-3	-1	-2	2	1	1
a ₂₃	a ₃₁	2	1	0	1	2	-4	1	1	2	4
a ₂₄	a ₃₂	2	3	-1	6	1	2	2	0	-2	3
a ₃₁	a ₃₃	1	2	1	4	2	2	-3	2	3	0
a ₃₂	b ₁₁	0	-3	1	1	-1	4	-1	-1	-3	-4
a ₃₃	b ₁₂	-1	0	-2	2	1	1	2	-3	2	1
a ₃₄	b ₁₃	1	-2	0	-2	-5	3	1	2	1	2
a ₄₁	b ₂₁	2	4	4	3	1	2	-4	2	2	4
a ₄₂	b ₂₂	-3	3	1	1	3	0	3	-3	-2	3
a ₄₃	b ₂₃	2	2	2	3	0	-1	-1	-2	1	-2
a ₄₄	b ₃₁	-4	-1	6	2	-3	4	4	1	-1	1
k	b ₃₂	3	1	2	4	1	2	3	4	2	3
m	b ₃₃	2	3	4	3	2	3	1	2	1	4

ИДЗ 1.2

Даны матрицы:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

Найти: а) AB; б) A⁻¹; в) A⁻¹ · A

Данные в таблицах 1,2. См. пример 2 и 3 (Глава I).

Таблица 2.

Задания		Варианты									
№ 1	№ 2,3	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_{11}	a_{11}	-1	4	1	2	1	0	3	2	2	4
a_{12}	a_{12}	4	-3	0	3	3	1	1	-1	-2	-2
a_{13}	a_{13}	2	1	1	-1	-1	4	2	4	3	2
a_{14}	a_{21}	1	2	2	-3	0	3	-1	-3	-1	-1
a_{21}	a_{22}	-2	-5	1	1	2	2	4	0	2	2
a_{22}	a_{23}	1	2	-2	-1	1	1	2	3	3	-4
a_{23}	a_{31}	0	-4	2	2	-3	-2	3	1	-2	0
a_{24}	a_{32}	3	1	4	6	-2	2	-4	-2	1	1
a_{31}	a_{33}	1	0	1	0	3	-1	-1	2	1	-2
a_{32}	b_{11}	-2	4	-1	3	2	2	0	-3	4	1
a_{33}	b_{12}	3	-1	1	2	0	-1	2	-2	2	2
a_{34}	b_{13}	2	2	0	-1	1	1	-3	1	-1	-3
a_{41}	b_{21}	3	3	1	4	-1	2	3	3	-2	3
a_{42}	b_{22}	-2	-2	4	-1	-2	1	-3	5	3	2
a_{43}	b_{23}	2	-1	-1	3	1	-4	4	-3	0	-3
a_{44}	b_{31}	-1	1	-3	1	3	3	2	1	4	1
k	b_{32}	1	1	4	2	3	2	3	4	3	2
m	b_{33}	2	3	3	1	2	4	1	2	4	3

ИДЗ – 1.3

Решить систему:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_{11}, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_{12}, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_{13} \end{cases}$$

а) по формулам Крамера;

б) матричным методом ;

в) методом Гаусса.

Данные в таблицах 1,2. См. пример 4 (гл. I).

ИДЗ – 1.4

Даны векторы $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$. Найти: а) $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$; б) $[\vec{a} \vec{b}]$; в) p , чтобы $\vec{a} \perp (p\vec{b} + \vec{c})$; г) проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$; д) q , чтобы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $(\vec{b} + q\vec{c})$ были компланарны.

Данные в таблицах 3,4. См. пример 5 (Глава II).

Таблица 3.

Задания	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4, 5, 6										
a_1	2	1	1	8	5	4	-6	10	4	6
a_2	5	4	-6	-6	7	-4	2	-1	1	-4
a_3	-1	2	4	1	-2	2	3	2	-3	1
b_1	-3	-5	-3	-4	0	-1	-3	-4	7	-4
b_2	1	1	3	2	-4	8	8	1	-3	2
b_3	2	3	-1	3	3	1	2	-3	1	-2
c_1	0	8	3	2	-5	6	0	6	-3	4
c_2	4	-2	4	6	2	2	-5	9	-1	10
c_3	3	1	-2	-2	4	-3	4	1	2	-1
d_1	3	-1	1	3	5	1	-1	2	1	-3
d_2	-1	2	7	5	8	2	0	4	1	7
d_3	2	1	3	4	3	-2	2	3	5	1

Таблица 4.

Задания	Варианты									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4, 5, 6										
a_1	3	5	-5	-3	-4	-2	3	3	7	-2
a_2	-1	-5	4	1	-5	-6	-8	2	0	4
a_3	2	1	-2	4	1	2	-1	2	-2	3
b_1	-6	-7	9	10	8	-3	-7	-7	1	1
b_2	2	4	6	-2	1	5	-2	-4	4	-3
b_3	-1	2	1	3	-2	3	1	1	3	2
c_1	11	-7	-1	4	-3	4	-4	0	-8	0
c_2	3	-2	-4	-5	-1	0	6	2	-4	7
c_3	1	3	3	2	2	1	2	3	1	-1
d_1	2	1	1	3	6	4	1	4	2	3
d_2	-1	6	-1	5	1	2	2	2	7	2
d_3	5	3	4	1	1	-1	6	5	1	4

ИДЗ – 1.5

Вершины пирамиды находятся в точках $A(a_1, a_2, a_3)$,
 $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ и $D(d_1, d_2, d_3)$.

Найти: а) площадь грани ABC; б) объем пирамиды ABCD;

- в) уравнение грани ABC; г) уравнение высоты из вершины D на ABC;
д) синус угла между прямой AD и плоскостью ABC.

Данные в таблицах 3,4. См. пример 5 и 6 (гл. II, III).

ИДЗ – 1.6

Вершины треугольника находятся в точках $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$.

- Найти: а) уравнение высоты AH; б) уравнение медианы BM;
в) длину высоты из вершины C; г) точку пересечения прямых AH и BM.

Данные в таблицах 3,4. См. пример 7 (гл. III).

ИДЗ 1.7

Решить следующие задачи.

1. Найти проекцию точки $A(-8, 12)$ на прямую, проходящую через точки $B(2, -3)$ и $C(-5, 1)$. (Ответ: $A_1(-12, 5)$)
2. Даны две вершины треугольника ABC: $A(-4, 4)$, $B(4, -12)$ и точка $M(4, 2)$ пересечения его высот. Найти вершину C. (Ответ: $C(8, 4)$.)
3. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y - x = 3$. (Ответ: $x - 2y + 4 = 0$)
4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -3)$ и точку пересечения прямых $2x - y = 5$ и $x + y = 1$. (Ответ: $x = 1$)
5. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, 1)$ перпендикулярно к прямой BC, если $B(2, 5)$, $C(1, 0)$. (Ответ: $x + 5y - 8 = 0$)
6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 1)$ параллельно прямой MN, если $M(-3, -2)$, $N(1, 6)$. (Ответ: $2x - y + 5 = 0$)
7. Найти точку, симметричную точке $M(2, -1)$ относительно прямой $x - 2y + 3 = 0$. (Ответ: $M_1(-4/5, 23/5)$.)
8. Через точку пересечения прямых $6x - 4y + 5 = 0$, $2x + 5y + 8 = 0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс. (Ответ: $y = -1$).

9. Известны уравнения стороны АВ треугольника ABC $4x + y = 12$, его высот ВН $5x + 4y = 12$ и АМ $x + y = 6$. Найти уравнения двух других сторон треугольника ABC. (Ответ: $7x - 7y - 16 = 0$, $4x + 5y - 28 = 0$)
10. Найти уравнения высот треугольника ABC, проходящих через вершины А и В, если А(-4, 2), В(3, -5), С(5, 0). (Ответ: $3x + 5y + 2 = 0$, $9x + 2y - 28 = 0$).
11. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки А(2, 3), В(0, -3), С(6, -3). (Ответ: М(3, -2/3).)
12. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину А треугольника ABC, зная уравнения его сторон: АВ $-2x - y - 3 = 0$, АС $-x + 5y - 7 = 0$, ВС $-3x - 2y + 13 = 0$. (Ответ: $2x + 3y - 7 = 0$).
13. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$. (Ответ: $6x + 11y = 0$)
14. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x + 5y - 15 = 0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат. (Ответ: $5x - 3y - 25 = 0$, $5x - 3y + 9 = 0$).
15. Даны уравнения сторон четырехугольника: $x - y = 0$, $x + 3y = 0$, $x - y - 4 = 0$, $3x + y - 12 = 0$. Найти уравнения его диагоналей. (Ответ: $y = 0$, $x = 3$).
16. Составить уравнения медианы СМ и высоты СК треугольника ABC, если А(4, 6), В (-4, 0), С(-1, -4). (Ответ: $7x - y + 3 = 0$ (СМ), $4x + 3y + 16 = 0$ (СК))
17. Через точку Р(5, 2) провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси Ох; в) параллельную оси Оу. (Ответ: $x + y - 7 = 0$, $y = 2$, $x = 5$).
18. Какую ординату имеет точка С, лежащая на одной прямой с точками А(-6, -6) и В(-3, -1) и имеющая абсциссу, равную 3? (Ответ: $y = 9$)
19. Найти точку Е пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки А(-3, 1), В(7, 5) и С(5, -3). (Ответ: Е(3, 1))
20. Даны уравнения высот треугольника ABC $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ и координаты его вершины А(2, 3). Найти

уравнения сторон АВ и АС треугольника.

(Ответ: $2x - y - 1 = 0$ (АВ), $3x + 2y - 12 = 0$ (АС))

См. пример 7 (Глава III).

ИДЗ 1.8

Составить уравнение окружности с центром в точке $A(a_1, a_2)$, проходящей через точку $B(b_1, b_2)$.

Данные в таблицах 3 и 4.

ИДЗ 1.9

Построить кривую, заданную уравнением в полярной системе координат.

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\rho = 3 \sin 2\varphi$ | 2. $\rho = 2 \sin 4\varphi$ | 3. $\rho = 2 \cos 2\varphi$ |
| 4. $\rho = 1 - \cos 3\varphi$ | 5. $\rho = 1 - \cos 2\varphi$ | 6. $\rho = 1 - \sin 3\varphi$ |
| 7. $\rho = 1 + \cos 3\varphi$ | 8. $\rho = \cos 3\varphi$ | 9. $\rho = 1 + \sin 2\varphi$ |
| 10. $\rho = 1 + \cos 2\varphi$ | 11. $\rho = 1 + \cos 2\varphi$ | 12. $\rho = 2 - \cos 2\varphi$ |
| 13. $\rho = 3 \sin \varphi$ | 14. $\rho = 2 - \sin 3\varphi$ | 15. $\rho = 2 \cos \varphi$ |
| 16. $\rho = 2 + \sin \varphi$ | 17. $\rho = 2 + \cos 2\varphi$ | 18. $\rho = 3 \cos 4\varphi$ |
| 19. $\rho = 2 + \sin 2\varphi$ | 20. $\rho = 1 - \sin 2\varphi$ | См. пример 8 (Глава III). |

ИДЗ 1.10

Построить кривую, заданную параметрическим уравнением ($0 \leq t \leq 2\pi$).

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\begin{cases} x = 4 \cos 2t \\ y = 3 \sin 2t \end{cases}$ | 2. $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases}$ | 3. $\begin{cases} x = 2 \sin t \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ |
| 4. $\begin{cases} x = 5 \sin t \\ y = 4 \cos t \end{cases}$ | 5. $\begin{cases} x = 2 \sin 2t \\ y = \cos 2t \end{cases}$ | 6. $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$ |
| 7. $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases}$ | 8. $\begin{cases} x = 3 \cos 2t \\ y = 2 \sin 2t \end{cases}$ | 9. $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ |
| 10. $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = 3 \sin 2t \end{cases}$ | 11. $\begin{cases} x = 4 \cos 3t \\ y = 2 \sin 3t \end{cases}$ | 12. $\begin{cases} x = 3 \sin t \\ y = 5 \cos t \end{cases}$ |
| 13. $\begin{cases} x = 2 \sin 3t \\ y = 3 \cos 3t \end{cases}$ | 14. $\begin{cases} x = 3 \cos 2t \\ y = 2(1 - \sin 2t) \end{cases}$ | 15. $\begin{cases} x = 2(1 - \cos 2t) \\ y = 3 \sin 2t \end{cases}$ |
| 16. $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 1 - \sin t \end{cases}$ | 17. $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3(1 - \sin t) \end{cases}$ | 18. $\begin{cases} x = 2 - \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$ |
| 19. $\begin{cases} x = 2 \sin t \\ y = 1 + \cos t \end{cases}$ | 20. $\begin{cases} x = 1 + \sin t \\ y = 2 \cos t \end{cases}$ | См. пример 9 (Глава III). |

Индивидуальные домашние задания № 2

ИДЗ 2.1

Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-5}}$
2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{-x}}{x^2 - x - 2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{\sqrt{x+2} - 2}$
4. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{3x^2 + x - 10}$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{\sqrt{4x-3} - \sqrt{x}}$
6. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+4} - 1}{2x^2 + x - 15}$
7. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + x - 3}{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}}$
8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 + x - 6}$
9. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x+4} - 1}$
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{10-x}}{3x^2 - x - 2}$
11. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{\sqrt{x+5} - \sqrt{-x-1}}$
12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}{x^2 + x - 12}$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{4x^2 - x}$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{\sqrt{x+4} - 2}$
15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{3 - \sqrt{2x+5}}$
16. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3} - 1}{\sqrt{2x+8} - 2}$
17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{2-x}}{2 - \sqrt{x+3}}$
18. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x+7} - 2}{3 - \sqrt{8-x}}$
19. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1} - 2}$
20. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4 - \sqrt{7-3x}}{1 - \sqrt{x+4}}$

См. пример 11 (Глава IV).

ИДЗ 2.2

Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^{2x}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5-x}{3-x} \right)^x$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-x}{x^2+x} \right)^x$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{x}{x-2}}$
6. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)^{\frac{x+1}{x-1}}$
7. $\lim_{x \rightarrow -2} (x+3)^{\frac{x-2}{x+2}}$
8. $\lim_{x \rightarrow 1} (2+x)^{\frac{x-1}{x+1}}$
9. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x}{3+x} \right)^{\frac{x}{x-3}}$
10. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$
11. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{1-x}}$
12. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{x-1}}$
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x-1} \right)^{-x}$
14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-2x+2}{x^2-x-3} \right)^{2x}$
15. $\lim_{x \rightarrow -1} (2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$
16. $\lim_{x \rightarrow -2} (2x+5)^{\frac{2x}{x+2}}$
17. $\lim_{x \rightarrow -3} (x+4)^{\frac{1-x}{x+3}}$
18. $\lim_{x \rightarrow 3} (x-2)^{\frac{1-x}{x-3}}$
19. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}}$
20. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3+2x}{x+2} \right)^{\frac{2}{x+1}}$

См. пример 17 (Глава IV)

ИДЗ 2.3

Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 2x}{3x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{3x^2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x^2 - x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x + \sin 3x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \operatorname{tg} \frac{5x}{2}$
8. $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \operatorname{tg} \frac{5x}{2}$
9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$
10. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{x^2 + 2x}$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 4x}{2x^2 - x}$
13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{2x - \pi}$
14. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$
15. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$
16. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(2x - \pi)^2}$
17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1}$
18. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sin \pi x}$
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2}$
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin^2 x}{x^2 + 2x}$ См. пример 13 (Глава IV)

ИДЗ 2.4

Исследовать функцию на непрерывность и построить график.

1. $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ x^2+1, & 0 < x \leq 2, \\ -x+4, & x > 2 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} x+4, & x \leq -1, \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & x > 1 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2 \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x \leq -1, \\ (x+1)^2, & -1 < x < 0, \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x+5, & x > 3 \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \leq 0, \\ x+2, & 0 < x \leq 4, \\ -x+5, & x > 4 \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0, \\ x^2+1, & 0 < x \leq 2, \\ x, & x > 2 \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$
11. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$
12. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2-1, & 0 \leq x < 1, \\ 1-x, & x \geq 1 \end{cases}$
13. $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0, \\ x^2+1, & 0 \leq x < 2, \\ x+1, & x \geq 2 \end{cases}$
14. $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ x^2-1, & 0 < x < 3, \\ 3x-1, & x \geq 3 \end{cases}$
15. $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq -1, \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1, \\ x+3, & x > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 16. f'(x) &= \begin{cases} 2-x, & x < -2, \\ x^2 - 2, & -2 \leq x < 1, \\ x+3, & x \geq 1 \end{cases} & 17. f(x) &= \begin{cases} 3x+4, & x \leq -1, \\ x^2 - 2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2 \end{cases} & 18. f(x) &= \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x \leq 3, \\ 1-x, & x > 3 \end{cases} \\
 19. f(x) &= \begin{cases} x-1, & x < 1, \\ x^2 - 2, & 1 \leq x \leq 4, \\ 3x+2, & x > 4 \end{cases} & 20. f(x) &= \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ 4-x^2, & 0 < x < 2, \\ 2-x, & x \geq 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

См. пример 18 (Глава IV).

ИДЗ 2.5

Найти y' и y'' функции, заданной неявно.

1. $y = x + \operatorname{arctg} y$
2. $y^2 - x = \cos y$
3. $\operatorname{tg} y = 3x + 5y$
4. $y^5 = e^x + 4x$
5. $y^2 + x^2 = \sin y$
6. $\operatorname{ctg} y = 4y + 3x$
7. $xy - x = \cos y$
8. $3y = 2x + xy^2$
9. $y^2 = x + \ln y$
10. $x^2 y^2 + x = 3y$
11. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = y^2$
12. $\ln y - \frac{y}{x} = 7x$
13. $e^x = 4x + y$
14. $3y^2 - x = \sin y$
15. $\ln y + \cos y = x$
16. $\sin(xy) + y = x^2$
17. $\cos(xy) - y^2 = 5x^2$
18. $\operatorname{tg}(xy) - y = 2x$
19. $\ln(xy) + \frac{y}{x} = 3x$
20. $y^2 - xy = x^3$

См. примеры 11, 12 (Глава V, §1).

ИДЗ 2.6

Найти $y^{(n)}$

1. $y = \ln x$
2. $y = \frac{1}{x}$
3. $y = e^{-2x}$
4. $y = \sqrt{x}$
5. $y = \frac{1}{x-2}$
6. $y = \ln(2x-1)$
7. $y = e^{3x}$
8. $y = xe^x$
9. $y = \frac{2}{x+1}$
10. $y = \sqrt{2x+3}$
11. $y = xe^{2x}$
12. $y = xe^{-3x}$
13. $y = x \cdot 2^x$
14. $y = x \cdot 3^x$
15. $y = \frac{x}{x+2}$
16. $y = \ln \frac{3}{x-1}$
17. $y = \ln(x^3 + 3)$
18. $y = \sin 2x$
19. $y = \cos 3x$
20. $y = \frac{x}{1-x}$

См. пример 10 (Глава V, §2).

ИДЗ 2.7

Найти производную функции, заданной параметрически.

$$1. \begin{cases} x = (2t+1)\sin t \\ y = 2t^3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = e^{3t} \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = t^3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = 3t + t^2 \\ y = t^2 - 3t^3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = 2^t \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x = 3^t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x = \arctg t \\ y = t^3 + 3t \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \cos t \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = \arcsin t \\ y = 1+t^3 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = t^3 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x = \sqrt{t^2+3} \\ y = 2^t \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \ln t \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x = \ln^2 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x = 6t^2 - 1 \\ y = te^t \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x = \sin 2t \\ y = te^{-t} \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = t \cdot 3^t \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 \cdot 2^t \end{cases}$$

См. пример 9 (Глава V, §1)

ИДЗ 2.8

Решить задачу.

1. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 7x + 3$ в точке с абсциссой $x = 1$
2. Записать уравнение касательной к линии $y = \sqrt{x-4}$ в точке с абсциссой $x = 8$
3. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ в точке $(2, 1)$
4. Определить угловой коэффициент касательной к кривой $x^2 - y^2 + xy - 11 = 0$ в точке $(3, 2)$
5. В какой точке кривой $y^2 = 4x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $x + 3y - 1 = 0$?

6. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 6x + 2$ в точке с абсциссой $x = 2$
7. Записать уравнение касательной к кривой $y = \frac{x^2}{4} - x + 5$ в точке с абсциссой $x = 4$
8. Записать уравнение касательной к кривой $y = -\frac{x^2}{2} + 7x - \frac{15}{2}$ в точке с абсциссой $x = 3$
9. Записать уравнение касательной к кривой $y = 4 \operatorname{tg} 3x$ в точке с абсциссой $x = \pi/9$
10. Записать уравнение касательной к кривой $y = 4 \sin 6x$ в точке с абсциссой $x = \pi/18$
11. Выяснить, в каких точках кривой $y = \sin 2x$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi/4$
12. Выяснить, в какой точке кривой $y = 2x^3 - 1$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi/3$
13. Выяснить, в какой точке кривой $y = x^3/3 - x^2/2 - 7x + 9$ касательная составляет с осью Ox угол $-\pi/4$
14. Выяснить, в каких точках кривой $y = x^3/3 - 5x^2/2 + 7x + 4$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi/4$
15. Найти точки на кривой $y = x^3/3 - 9x^2/2 + 20x - 7$, в которых касательные параллельны оси Ox
16. Найти точку на кривой $y = x^4/4 - 7$, касательная в которой параллельна прямой $y = 8x - 4$
17. Найти точку на кривой $y = -3x^2 + 4x + 7$, касательная в которой перпендикулярна к прямой $x - 20y + 5 = 0$
18. Найти точку на кривой $y = 3x^2 - 4x + 6$, касательная в которой параллельна прямой $8x - y - 5 = 0$
19. Найти точку на кривой $y = 5x^2 - 4x + 1$, касательная в которой перпендикулярна к прямой $x + 6y + 15 = 0$

20. Найти точку на кривой $y = 3x^2 - 5x - 11$, касательная в которой параллельна прямой $x - y + 10 = 0$

См. примеры 13,14 (Глава V, §1)

ИДЗ 2.9

Вычислить приближенно

- | | | | |
|--------------------------|---------------------------------------|----------------------|--------------------------|
| 1. $\sqrt[3]{34}$ | 2. $\sqrt[3]{70}$ | 3. $\sqrt[4]{17}$ | 4. $(1,01)^3 + (1,01)^2$ |
| 5. $\sqrt{16 + (2,9)^2}$ | 6. $\sqrt{\frac{4 - 3,01}{1 + 3,01}}$ | 7. $\sqrt[3]{130}$ | 8. $\sqrt[10]{1025}$ |
| 9. $(2,02)^3 + (2,02)^2$ | 10. $\arctg 1,03$ | 11. $\cos 61^\circ$ | 12. $\sin 29^\circ$ |
| 13. $e^{0,2}$ | 14. $e^{1,1}$ | 15. $\lg 46^\circ$ | 16. $\arcsin 0,95$ |
| 17. $\ln(e+0,1)$ | 18. $\sqrt{3+1,1^2}$ | 19. $\cos 119^\circ$ | 20. $\sin 151^\circ$ |

См. пример 11 (Глава V, §2)

ИДЗ 2.10

Провести полное исследование функции и построить график

- | | | |
|--------------------------------------|--|--------------------------------------|
| 1. $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ | 2. $y = \frac{2x - x^2}{x}$ | 3. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x}$ |
| 4. $y = \frac{x^2}{x^3 - 4}$ | 5. $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x}$ | 6. $y = \frac{(x - 1)^2}{x + 1}$ |
| 7. $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$ | 8. $y = \frac{2x + 1}{(x - 1)^2}$ | 9. $y = \frac{1 - 2x}{1 - x^2}$ |
| 10. $y = x + \frac{1}{x}$ | 11. $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}$ | 12. $y = \frac{x}{4 - x^2}$ |
| 13. $y = \frac{x^2 + 4x + 1}{2 - x}$ | 14. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$ | 15. $y = \frac{x^3}{(x + 2)^2}$ |
| 16. $y = \frac{x^2 - 2}{x}$ | 17. $y = \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^2$ | 18. $y = \frac{(x + 1)^2}{x - 3}$ |
| 19. $y = 2x - \frac{1}{x}$ | 20. $y = \frac{x^3}{x^2 - 9}$ | См. пример 1 (Глава V, §4) |

Индивидуальные домашние задания № 3

ИДЗ 3.1

Найти неопределенные интегралы, выполнить проверку

1. $\int (1-3x)^4 dx$

2. $\int \sqrt{5-4x} dx$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5+2x}}$

4. $\int \frac{dx}{(1+2x)^3}$

5. $\int \sqrt[3]{3+2x} dx$

6. $\int \sin(2-3x) dx$

7. $\int \cos(3+2x) dx$

8. $\int \sin(5x-1) dx$

9. $\int \cos(3-4x) dx$

10. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{3-4x^2}}$

11. $\int \frac{3x dx}{x^3+4}$

12. $\int \frac{4x dx}{\sqrt{4x^2+3}}$

13. $\int \frac{x dx}{2x^2-5}$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$

15. $\int \frac{dx}{2x^2-3}$

16. $\int \frac{dx}{3x^2+4}$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-7}}$

18. $\int e^{4x-3} dx$

19. $\int e^{1-2x} dx$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5}}$

См. пример (Глава VI)

ИДЗ 3.2

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

2. $\int \ln(x+2) dx$

3. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

4. $\int \sqrt{x} \ln x dx$

5. $\int \arccos 2x dx$

6. $\int \arctg x dx$

7. $\int x \cdot \arctg x dx$

8. $\int \arcsin x dx$

9. $\int x \cdot \cos 2x dx$

10. $\int x \cdot \sin^2 x dx$

11. $\int (x^2+x)e^{-x} dx$

12. $\int x \cdot tg^2 x dx$

13. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$

14. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

15. $\int (x+3)e^{2x} dx$

16. $\int x \cdot \sin 3x dx$

17. $\int x \cdot tg x dx$

18. $\int (2-x)e^{3x} dx$

19. $\int x^2 \cdot \sin x dx$

20. $\int x^3 \cdot \ln x dx$

См. пример (Глава VI)

ИДЗ 3.3

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{dx}{(x-2)(x^2-2x+3)}$

2. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x^2+4x+3)}$

3. $\int \frac{(x-1)dx}{(x+2)(x^2+6x+5)}$

4. $\int \frac{x+1}{x^3-x^2} dx$
5. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx$
6. $\int \frac{x+5}{x^3-2x^2+x} dx$
7. $\int \frac{x^2-3}{x(x+1)^2} dx$
8. $\int \frac{2x+1}{x^2(x+1)} dx$
9. $\int \frac{x-1}{x^3+2x^2} dx$
10. $\int \frac{x}{x^3+8} dx$
11. $\int \frac{x+1}{x^3-8} dx$
12. $\int \frac{x}{x^4+2^2} dx$
13. $\int \frac{(2x+1)dx}{(x+1)(x^2-2x+10)}$
14. $\int \frac{(2x^2+3)dx}{(x-1)(x^2+4x+13)}$
15. $\int \frac{x+1}{x^3-1} dx$
16. $\int \frac{x-2}{x^5+1} dx$
17. $\int \frac{x+2}{x^4-1} dx$
18. $\int \frac{(x+3)}{(x-1)(x^2+4)} dx$
19. $\int \frac{3x+1}{x^4-x^2} dx$
20. $\int \frac{x^2-1}{x^4+3x^2} dx$ См. примеры (Глава VI, §1)

ИДЗ 3.4

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} dx$
2. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$
3. $\int \frac{\sqrt[3]{x-1} dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}$
4. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x}} dx$
5. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$
6. $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[4]{2x+1}} dx$
7. $\int \frac{\sqrt{x-1} dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}$
8. $\int \frac{\sqrt{x+3} dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+3}}$
9. $\int \frac{\sqrt{x+1} dx}{\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[3]{x+1}}$
10. $\int \frac{\sqrt{x+2} dx}{1+\sqrt{x+2}}$
11. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}} dx$
12. $\int \frac{\sqrt[6]{x+2} dx}{\sqrt{x+2}+2\sqrt[3]{x+2}}$
13. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}$
14. $\int \frac{(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}$
15. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1-\sqrt[4]{x}}$
16. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x-4\sqrt{x}+1}$
17. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+\sqrt[3]{x^2}}$
18. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{3x-\sqrt[3]{x^2}}$
19. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1-\sqrt{x}}$
20. $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{1+\sqrt[6]{x}}$ См. примеры (Глава VI, §2)

ИДЗ 3.5

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$
2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$
3. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}$

4. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$

5. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x-1}}$

6. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$

7. $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$

8. $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-x^2}}$

10. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{2x-x^2}}$

11. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x-x^2}}$

12. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{3x-x^2}}$

13. $\int \frac{dx}{1-\sqrt{x^2+2x-1}}$

14. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{1-2x-x^2}}$

15. $\int \frac{x dx}{1+\sqrt{x^2-2x}}$

16. $\int \frac{x dx}{2-\sqrt{3+2x-x^2}}$

17. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+x-1}}$

18. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{2x-x^2}}$

19. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{1-2x-x^2}}$

20. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+3}}$

См. примеры (Глава VI, §2)

ИДЗ 3.6

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx$

2. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$

3. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx$

4. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-4}}$

5. $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}}$

6. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}$

7. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-1}}$

9. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}}$

10. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$

11. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx$

12. $\int x\sqrt{x^2-1} dx$

13. $\int x\sqrt{1-x^2} dx$

14. $\int x\sqrt{1+x^2} dx$

15. $\int x^2\sqrt{x^2-4} dx$

16. $\int x^2\sqrt{4-x^2} dx$

17. $\int x^2\sqrt{4+x^2} dx$

18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$

20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$ См. примеры (Глава VI, §2)

ИДЗ 3.7

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

2. $\int \frac{dx}{3-5\sin x}$

3. $\int \frac{dx}{\sin x-2\cos x}$

4. $\int \frac{dx}{3 \cos x - \sin x}$
5. $\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$
6. $\int \frac{dx}{2 - \sin x + 2 \cos x}$
7. $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$
8. $\int \frac{dx}{3 - \sin x}$
9. $\int \frac{\sin x dx}{4 - 3 \sin x}$
10. $\int \frac{\cos x dx}{3 - 2 \cos x}$
11. $\int \frac{1 + \sin x}{2 + 3 \sin x} dx$
12. $\int \frac{1 - \cos x}{3 - 2 \cos x} dx$
13. $\int \frac{\sin x - \cos x}{1 + 2 \sin x} dx$
14. $\int \frac{\cos x - \sin x}{2 - \cos x} dx$
15. $\int \frac{1 + \cos x}{2 + 3 \sin x} dx$
16. $\int \frac{2 - \sin x}{3 + 2 \cos x} dx$
17. $\int \frac{\sin x dx}{1 + 2 \sin x - \cos x}$
18. $\int \frac{\cos x dx}{2 - \sin x + 2 \cos x}$
19. $\int \frac{2 - \sin x}{1 - \sin x + 2 \cos x} dx$
20. $\int \frac{1 + \cos x}{2 + \sin x - 3 \cos x} dx$ См. прим.(Глава VI, §3)

ИДЗ 3.8

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x}$
2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 6 \sin x \cos x}$
3. $\int \frac{dx}{1 + 2 \cos^2 x}$
4. $\int \frac{dx}{1 + 3 \sin^2 x}$
5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}$
6. $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{1 - \operatorname{ctg}^2 x}$
7. $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 3 \cos^2 x}$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x + 2 \cos^2 x}$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin 2x + 3 \sin^2 x}$
10. $\int \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx$
11. $\int \frac{\cos^2 x dx}{1 + \sin^2 x}$
12. $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos^2 x}$
13. $\int \frac{\sin^2 x dx}{3 \sin^2 x - \cos^2 x}$
14. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + 4 \cos^4 x}$
15. $\int \frac{dx}{2 \sin^2 x + 3 \sin 2x}$
16. $\int \frac{dx}{2 \cos^2 x - 3 \sin^2 x}$
17. $\int \frac{dx}{1 - 2 \sin^2 x}$
18. $\int \frac{\sin^2 x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$
19. $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x}$
20. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x - 3 \sin^4 x}$ См. примеры (Глава VI, §3)

ИДЗ 3.9

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \cos^4 x \cdot \sin^2 x dx$
2. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$
3. $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx$
4. $\int \sqrt{\sin^2 x} \cdot \cos^3 x dx$
5. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$
6. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^6 x}$
7. $\int \frac{\sin^6 x dx}{\cos^2 x}$
8. $\int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^{10} x}$
9. $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x}$

10. $\int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^8 x}$

11. $\int \operatorname{tg}^4 x dx$

12. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$

13. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$

14. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$

15. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \cdot \sin x dx$

16. $\int \frac{\cos^8 x dx}{\sin^4 x}$

17. $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^8 x}$

18. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^6 x}$

19. $\int \frac{dx}{\sin^6 x \cdot \cos^2 x}$

20. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ См. примеры (Глава VI, §3)

ИДЗ 3.10

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \operatorname{sh}^3 x \cdot \operatorname{ch}^2 x dx$

2. $\int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^5 x dx$

3. $\int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^4 x dx$

4. $\int \operatorname{sh}^4 x \cdot \operatorname{ch}^2 x dx$

5. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^4 x}$

6. $\int \frac{\operatorname{sh}^2 x dx}{\operatorname{ch}^4 x}$

7. $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x dx}{\operatorname{sh}^6 x}$

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x - 2 \operatorname{sh} x}$

9. $\int \frac{\operatorname{sh}^6 x dx}{\operatorname{ch}^2 x}$

10. $\int \frac{\operatorname{sh}^8 x dx}{\operatorname{ch}^4 x}$

11. $\int \frac{\operatorname{ch} x + 2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x - 2 \operatorname{ch} x} dx$

12. $\int \frac{\operatorname{sh} x - 3 \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x + 2 \operatorname{sh} x} dx$

13. $\int \operatorname{th}^2 x dx$

14. $\int \operatorname{cth}^2 x dx$

15. $\int \operatorname{th}^4 x dx$

16. $\int \operatorname{cth}^4 x dx$

17. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^6 x}$

18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^6 x \operatorname{ch}^2 x}$

19. $\int \operatorname{sh}^4 x \cdot \operatorname{ch}^2 x dx$

20. $\int \frac{dx}{2 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x}$ См. примеры (Глава VI, §4)

Оглавление

Предисловие.....	3
Глава 1 Определители. Матрицы. Системы линейных уравнений.....	5
Глава 2 Векторная алгебра	11
Глава 3 Аналитическая геометрия.....	13
Глава 4 Предел и непрерывность функций.....	18
§1. Понятие предела функции и нахождение пределов	18
§2. Исследование функций и непрерывность	27
Глава 5 Дифференциальное исчисление.....	30
§1. Общие правила дифференцирования	30
§2. Правило Лопиталю	37
§3. Исследование функций. Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений.....	46
§4. Исследование функции и построение её графика.....	54
Глава 6 Интегральное исчисление.....	59
§1. Интегрирование рациональных дробей	59
§2. Интегрирование иррациональных функций.....	64
§3. Интегрирование тригонометрических функций	70
§4. Интегрирование гиперболических функций	74
Индивидуальные домашние задания № 1	77
Индивидуальные домашние задания № 2.....	83
Индивидуальные домашние задания № 3.....	89

Ильясов Муратхан Нурмагамбетович

Сборник домашних заданий по высшей математике

Учебно-методическое пособие
I часть

Подписано в печать 5.07.2002 г.
Формат 29,7 x 42¼. Бумага книжно-журнальная.
Объем 1,4 усл.печ.л. Тираж 200 экз.
Заказ № 0213

Издательство
Павлодарского государственного университета
им. С.Торайгырова
637034, г.Павлодар, ул.Ломова, 64