М.Н. Ильясов

Сборник домашних заданий по высшей математике

Учебно-методическое пособие

[redacted]

М.Н. Ильясов

Сборник домашних заданий по высшей математике

Учебно-методическое пособие

2 часть

Павлодар

ББК 22.1
УДК 51(075.8)
И 49

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Павлодарский государственный университет им. С.Торайгырова

Кафедра Высшей математики

Рекомендовано к изданию решением
Ученого Совета ПГУ им. С. Торайгырова

Рецензенты:
Шакенов К.К.- зав.кафедрой Вычислительной и прикладной математики Механико-математического факультета КазНУ им. аль-Фараби, кандидат физико-математических наук, доцент.
Аяшинов М.М. – профессор, зав.кафедрой «Математика» ПаУ.

Ильясов М.Н.
И 49 Сборник домашних заданий по высшей математике.
2 часть.– Павлодар: ПГУ, 2003 – 106 С.

ISBN 9965–652–75–0

Учебно-методическое пособие написано в соответствии с учебной программой по курсу высшей математики для инженерно-технических специальностей университетов. Оно содержит индивидуальные домашние задания (ИДЗ) по следующим разделам: определенные, несобственные, кратные и криволинейные интегралы с приложениями, дифференциальные уравнения и системы, ряды. Кроме ИДЗ приведены необходимые теоретические сведения и методические указания по решению задач названных разделов. Пособие предназначено для студентов и преподавателей университетов.

$И \dfrac{1602000000}{00-(05)-03}$
ISBN 9965–652–75–0

Предисловие

В настоящее время ощущается нехватка дидактического материала по общему курсу высшей математики. Имеющиеся в наших библиотеках сборники задач Кузнецова Л.А. и Рябушко А.П. уже ветшают и по количеству экземпляров не позволяют нормально строить учебный процесс. Известно, что для выработок у студентов способности усвоения материала необходимо индивидуализировать не только контрольные работы, но и домашние задания. Это мнение подкрепляется личным опытом автора и моих коллег по кафедре. Только задачники этих авторов позволяли проводить занятия с максимальной индивидуализацией заданий.

Увеличение самостоятельной работы студентов для развития их способностей предполагает соответствующее методическое обеспечение учебного процесса. Этот сборник позволяет многим преподавателям продолжить прежний метод обучения, который основывался на учебно-методических пособиях авторов, названых выше.

Данный сборник является второй частью учебно-методических пособий под названием «сборник домашних заданий по высшей математике», написанного в соответствии с действующими программами курса высшей математики для инженерно-технических и энергетических специальностей университетов. Это пособие также можно использовать и для других специальностей. Кроме того, он вполне доступен для студентов дистанционной формы обучения.

Весь комплекс учебно-методических пособий состоит из трех частей. Материал каждой части соответствует I–III семестрам учебного процесса. Для тех специальностей, которые курс высшей математики изучают в течении двух семестров, рекомендуется сделать необходимую выборку. Охарактеризую структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний студентов. В первой части содержится материал по определителям, матрицам, линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению функций одной переменной. Во второй части содержится материал по определенным, несобственным, кратным и криволинейным интегралами с их приложениями, дифференциальным уравнениям и системам, рядам. Весь практический материал II семестра по курсу высшей математики разделен на главы, а некоторые главы – на параграфы, в каждой из которых даются необходимые теоретические сведения (основные определения, понятия, формулы), используемые при решений задач и выполнении упражнений, изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. В конце сборника приводятся индивидуальные домашние задания (ИДЗ) по материалам II семестра, которые разделены на 4 части (№№4–7). Эти ИДЗ рекомендуется выдавать в 4 этапа по 10 заданий в каждом, из расчета по 2 задания на одну учебную неделю. После приема заданий одного этапа выдаются последующие. Каждое задание содержит по 20 вариантов. Практические занятия можно вести по так называемому блочно-цикловому методу оценки знаний, состоящий в следующем. Материал каждого семестра делится на 3–4 блока, по каждому из которых выполняется ИДЗ. В конце каждого цикла проводится письменная контрольная работа на одну пару, в которую входят 6–8 задач. Учет оценок за ИДЗ и контрольные работы позволяют вывести общую оценку за каждый блок и итоговую оценку за семестр.

Тогда оценка на экзамене, где в основном предлагаются теоретические вопросы будет более объективной.

В заключение отмечу, что пособие в основном ориентировано на студента средних способностей, и усвоение содержащегося в нем материала гарантирует удовлетворительные и хорошие знания по курсу высшей математики. Для отлично успевающих студентов необходимы дополнительные индивидуальные задания повышенной сложности, которыми могут быть теоретические упражнения и нестандартные задачи.

Настоящий сборник адресован преподавателям и студентам и предназначен для проведения практических занятий, контрольных работ в аудиторий и выдачи индивидуальных домашних заданий по всем разделам курса высшей математики.

Глава 7
Определенный интеграл

Для определенного интеграла имеются три способа для точного и очень много способов для приближенного вычисления.

1 Методы точного интегрирования

1.1 Непосредственное интегрирование

Если подынтегральная функция является табличной или приводится к ней с помощью тождественных преобразований, то для вычисления определенного интеграла сразу применяется формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

где F(x) – первообразная для f(x).

Пример 1

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}dx = \int_0^1\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx = \left(x-2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = (1-2\ln 2)-(0-2\ln 1) = 1-2\ln 2.$$

Пример 2

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = (tgx-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(tg\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)-(tg0-0) = 1-\frac{\pi}{4}.$$

Пример 3

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{(x+1)^2}{x(x^2+1)}dx = \int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2+2x+1}{x(x^2+1)}dx = \int_1^{\sqrt{3}}\frac{(x^2+1)+2x}{x(x^2+1)}dx = \int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \left(\ln|x|+2arctg\,x\right)\Big|_1^{\sqrt{3}} = \left(\ln\sqrt{3}+2arctg\sqrt{3}\right)-\left(\ln 1+2arctg1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3+2\cdot\frac{\pi}{3}-2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 3+\frac{\pi}{6}$$

1.2 Интегрирование по частям

Этот способ реализуется с помощью формулы

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

где $\int_a^b u\,dv$ – данный интеграл,

$\int_a^b v\,du$ – новый интеграл.

Идея этого способа в том, чтобы данный нетабличный интеграл заменить табличным или более удобным для дальнейшего вычисления новым интегралом. Если подынтегральная функция содержит логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию, то её берут за U(x). Если таких функций нет, то за U(x) берут степенную функцию.

Пример 4

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x\,dx \\ du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{2^2}{2}\ln 2 - \frac{1^2}{2}\ln 1 - \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx =$$

$$= 2\ln 2 - \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{2^2}{4} + \frac{1^2}{4} = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Пример 5

$$\int_1^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{arctg} x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = x^2\,dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x\Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}1 - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{3}}\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right)\Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{12}\right)\pi - \frac{1}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2} - \frac{1}{2}\ln 4\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}-1}{12}\pi - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\ln 2 = \frac{4\sqrt{3}-1}{12}\pi - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\ln 2.$$

Пример 6

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x \\ dv = \cos x dx \\ du = dx \\ v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot 1 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Этот метод интегрирования нередко применяется с целью получения удобных рекуррентных формул, позволяющих сводить данный интеграл к аналогичному, но более простому.

Пример 7

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, где $n \geq 2$, n – натуральное число.

$$I_n = \begin{vmatrix} u = \cos^{n-1} x \\ dv = \cos x dx \\ du = (1-n)\cos^{n-2} x \sin x dx \\ v = \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cos^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx =$$

$$= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n-2} x - \cos^n x) dx = (n-1)\cdot I_{n-2} - (n-1)\cdot I_n.$$

Отсюда $I_n = (n-1)\cdot I_{n-2} - (n-1)\cdot I_n$ или $I_n = \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$, где I_{n-2} – аналогичный, но более простой интеграл.

1.3 Интегрирование заменой

Этот способ реализуется с помощью формул:

а) $\int_a^b f(x)dx = |x = \varphi(t)| = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$,

где α и β – корни уравнений $a = \varphi(t)$ и $b = \varphi(t)$ соответственно.

б) $\int_a^b f(x)dx = |t = \psi(x)| = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(t)dt$, где g(t) – функция от t.

Пример 8

$$\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left| \begin{array}{l} t = 1+\ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ \text{формула } B \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 = 2\cdot 2 - 2\cdot 1 = 2$$

Пример 9

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x} = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ \text{формула } A \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{t\cdot 2tdt}{1+t^2} = 2\int_1^2 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 2\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= 2(t - arctg\, t)\Big|_1^2 = 2(2 - arctg 2) - 2(1 - arctg 1) = 2 - 2arctg 2 + \frac{\pi}{2}$$

2 Методы приближенного интегрирования

В ряде случаев невозможно выразить первообразную для подынтегральной функции f(x) через элементарные функции в конечном виде. В ряде случаев на практике не требуется знать точное значение определенного интеграла.

В этих случаях применяются способы приближенного интегрирования. Таких способов довольно много. Здесь рассмотрим только три, которые реализуются с помощью следующих формул:

1) $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$ – прямоугольников,

2) $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$ – трапеции,

3) $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\cdot((y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}))$

– парабол, где $y_k = f(x_k)$, $x_k = a + \frac{b-a}{n}\cdot k$, k = 0, 1, 2. …, n.

Погрешности этих вычислений не превышают $\frac{M_1(b-a)^2}{2n}$,

$\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$, $\frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4}$ соответственно,

где M_k – наибольшее значение $f^{(k)}(x)$ на [a, b].

Для применения этих формул удобно вначале составить таблицу вида:

x_k	x_0	x_1	x_2	.....	x_n
y_k	y_0	y_1	y_2	.....	y_n

Пример 10 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

– данный интеграл вычисляется точно, поэтому мы можем сравнить точности приближенного вычисления по этим формулам. Найдем точное значение интеграла:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctg\,x\,\Big|_0^1 = arctg\,1 - arctg\,0 = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854.$$

Составим таблицу для n=10:

x_k	0	0.1	0.2	0.3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k	1	0.9901	0.9615	0.9174	0,8621	0.8	0.7353	0,6711	0,6098	0,5525	0.5

Найдем приближенное значение интеграла по каждой из этих формул:

по формуле прямоугольников получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0.1\cdot(0.9901 + 0{,}9615 + 0.9174 + 0.8621 + 0.8 + 0.7353 + 0.6711 + 0.6098 +$$
$$+ 0.5525 + 0.5) \approx 0{,}7600;$$

по формуле трапеции получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0.1\cdot\left(\frac{1+0.5}{2} + 0{,}9901 + 0.9615 + 0{,}9174 + 0{,}8621 + 0{,}8 + 0{,}7353 + 0{,}6711 +\right.$$
$$\left. + 0.6098 + 0.5525\right) \approx 0{,}7850;$$

по формуле парабол получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{30}\cdot\left((1+0{,}5) + 4\cdot(0{,}9901 + 0{,}9174 + 0{,}8 + 0{,}6711 + 0{,}5525) +\right.$$
$$\left. + 2\cdot(0.9615 + 0.8621 + 0{,}7353 + 0{,}6098)\right) \approx 0.7854.$$

Видим, что по формуле парабол результат получается намного точнее, а формула прямоугольников наименее точная.

3 Несобственные интегралы

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ обобщается на случаи:

1) когда функция рассматривается на бесконечном промежутке $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,+\infty)$;

2) когда функция не ограничена на промежутке интегрирования $[a,b]$.

Эти обобщения приводят к несобственным интегралам 1-го и 2-го рода соответственно.

Рассмотрим $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ – несобственный интеграл 1-го рода.

Составим $\phi(t)=\int\limits_a^t f(x)dx$ и найдем $\lim\limits_{t\to+\infty}\phi(t)$. Если этот предел конечный, то несобственный интеграл называется сходящимся и равен тогда этому пределу.

Пример 11

Исследовать на сходимость несобственный интеграл: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

$$\phi(t)=\int\limits_0^t\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int\limits_0^t\frac{dx}{(x+1)^2+1}=arctg(x+1)\Big|_0^t=arctg(t+1)-arctg1$$

$$\lim_{t\to+\infty}\phi(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(arctg(t+1)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}<\infty$$

Значит несобственный интеграл сходится и $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\frac{\pi}{4}$.

Пример 12

Исследовать на сходимость несобственный интеграл: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cos xdx$.

Имеем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cos xdx=\int\limits_{-\infty}^{0}x\cos xdx+\int\limits_{0}^{+\infty}x\cos xdx$.

Исследуем первый интеграл: $\phi(t)=\int\limits_t^0 x\cos xdx=\begin{vmatrix}u=x\\dv=\cos xdx\\du=dx\\v=\sin x\end{vmatrix}=$

$$=x\sin x\Big|_t^0-\int\limits_t^0\sin xdx=-t\sin t+\cos x\Big|_t^0=1-\cos t-t\sin t.$$

$$\lim_{t\to-\infty} \phi(t) = \lim_{t\to-\infty}(1 - \cos t - t\sin t).$$

Этот предел не существует, поэтому по определению несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{0} x\cos x dx$ расходится, следовательно, расходится и данный несобственный интеграл. В таком случае такой интеграл ни к чему не приравнивается.

Теперь рассмотрим несобственный интеграл 2-го рода $\int_a^b f(x)dx$. Визуально он ничем не отличается от определенного интеграла. Однако f(x) неограничена на [a, b], поэтому интеграл несобственный. Здесь также имеются три случая:

1) f(x) неограничена в точке x = a;
2) f(x) неограничена в точке x = b;
3) f(x) неограничена в точке x = C, a<C<b.

Рассмотрим первый случай. Составим $\phi(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ и найдем $\lim_{\varepsilon\to 0} \phi(\varepsilon)$. От значения этого предела зависит, аналогично, что будем иметь: сходимость или расходимость несобственного интеграла.

Пример 13

Исследовать на сходимость несобственный интеграл: $\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$

$$\phi(\varepsilon) = \int_{1+\varepsilon}^{e} \frac{dx}{x\ln x} = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{1} \frac{dt}{t} = \ln(t)\Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{1} = -\ln\ln(1+\varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \phi(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln\ln(1+\varepsilon)) = \infty.$$

Значит, несобственный интеграл расходится.

Пример 14

Исследовать на сходимость несобственный интеграл: $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+x-6}$.

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x^2+x-6}$ – неограничена в точке x = 2, поэтому интеграл несобственный.

Имеем $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+x-6} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2+x-6} + \int_2^3 \frac{dx}{x^2+x-6}$

Исследуем первый интеграл:

$$\phi(\varepsilon)=\int_{1}^{2-\varepsilon}\frac{dx}{x^{2}+x-6}=\int_{1}^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2}-\frac{25}{4}}=\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}\right|_{1}^{2-\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|_{1}^{2-\varepsilon}=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\varepsilon}{5-\varepsilon}\right|-\frac{1}{5}\ln\frac{1}{4}=\frac{1}{5}\left(\ln4+\ln\left|\frac{\varepsilon}{5-\varepsilon}\right|\right).$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\phi(\varepsilon)=\frac{1}{5}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln4+\ln\left|\frac{\varepsilon}{5-\varepsilon}\right|\right)=\infty.$$

Этот интеграл расходится, поэтому расходится и данный несобственный интеграл.

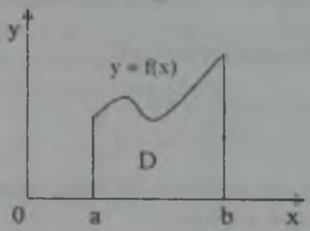
Глава 8
Применения определенного интеграла

Определенный интеграл имеет разнообразные применения в области геометрии, механики и физики. Здесь мы рассмотрим некоторые из них.

1 Вычисление площади плоской фигуры

Случай 1 Фигура ограничена графиками функции, заданными явно.

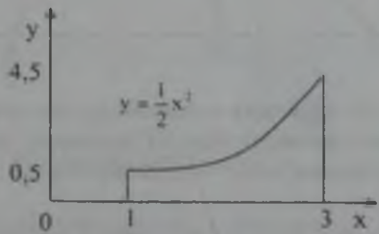
Основной формулой является: $S = \int_a^b f(x)dx$ – площадь области D.



Все другие фигуры являются некоторой комбинацией таких фигур.

Пример 1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ и кривой $y = \frac{1}{2}x^2$.

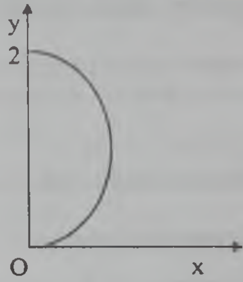
Построим эту фигуру:



Вычислим площадь по формуле:

$$S = \int_1^3 \frac{1}{2}x^2dx = \frac{1}{6}x^3\Big|_1^3 = \frac{1}{6}(27-1) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}.$$

Пример 2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью OY и кривой $x = 2y - y^2$. Построим эту фигуру:



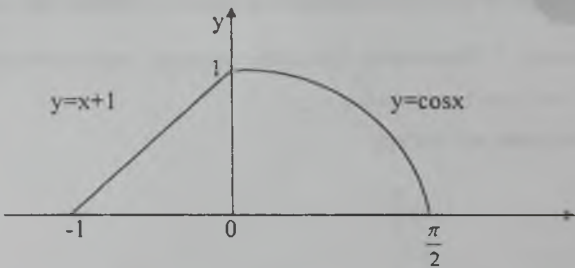
Фигура соответствует основному случаю. Здесь оси координат поменялись местами.

Вычисляем по основной формуле:

$$S = \int_0^2 (2y - y^2)dy = \left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Пример 3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = x + 1$, $y = 0$ и кривой $y = \cos x$.

Построим эту фигуру:

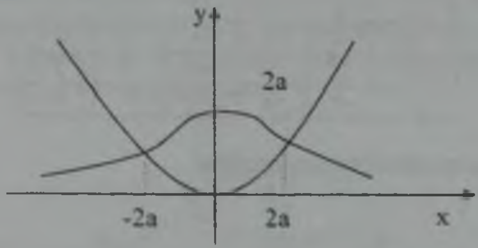


Эта фигура не относится к основному, т.к. верхняя линия состоит из графиков двух функций. Ось OY разбивает эту фигуру на две фигуры, которые соответствуют основному случаю.

$$S = \int_{-1}^{0} (x + 1)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{3}{2}.$$

Пример 4 Вычислить площадь фигуры, заключенной между кривыми $x^2 = 4ay$, $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$.

Построим эту фигуру:

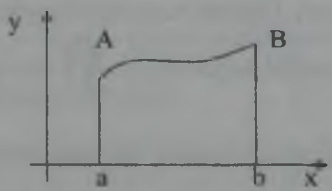


Эта фигура не относится к основному, так как не лежит на оси координат. Площадь данной фигуры равна разности площади двух фигур, которые являются основными. Точки пересечения графиков определяются из системы данных уравнений.

Имеем $S = \int_{-2a}^{2a} \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} dx - \int_{-2a}^{2a} \frac{x^2}{4a} dx = 8a^3 \frac{1}{2a} arctg \frac{x}{2a}\Big|_{-2a}^{2a} - \frac{1}{4a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-2a}^{2a} =$

$= 8a^2 arctg 1 - \frac{8a^3}{6a} = 8a^2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{4a^2}{3} = 2a^2\pi - \frac{4}{3}a^2$.

Случай 2 Фигура ограничена графиками функции, заданными в параметрической форме.

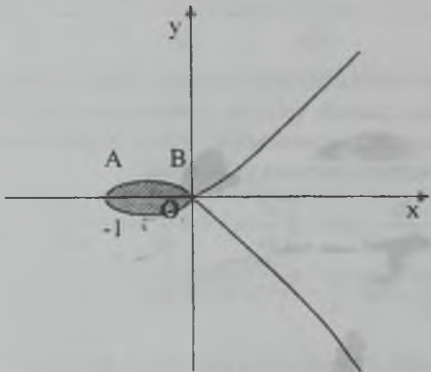


Пусть кривая AB задана уравнением $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, тогда площадь штрихованной фигуры вычисляется по формуле: $S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt$, где α и β – значения параметра t для точек A и B соответственно.

Пример 5 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$. По методу (гл.3, пример 9) строим график этой функции. Составим таблицу:

t	-2	-1	0	1	2
x	3	0	-1	0	3
y	-6	0	0	0	6

По полученным точкам строим график:



Штрихованная фигура симметрична относительна оси OX, поэтому найдем площадь ее верхней половины. Точки A и B получаются при t=0, t=1 соответственно. Найдем площадь по формуле:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 (t - t^3) \cdot 2t dt = 4 \int_0^1 (t^2 - t^4) dt = 4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}$$

Пример 6 Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Эту площадь удобнее вычислять, когда эллипс записан в параметрической форме $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

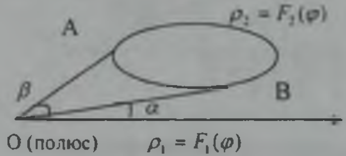
Найдем площадь фигуры, расположенной в I четверти, что составляет четверть всей площади. Тогда по формуле имеем

$$S = 4 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)dt =$$

$$= 2ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = ab\pi$$

Случай 3 Фигура ограничена графиками функции, заданными в полярной системе координат. В этом случае формула вычисления площади зависит от расположения полюса относительно фигуры:

а) полюс расположен вне фигуры:



ρ_1, ρ_2 – уравнения соответствующих частей замкнутой линии (границы фигуры).

OA, OB – касательные к фигуре из полюса O.

Тогда площадь определяется по формуле: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[F_2^2(\varphi) - F_1^2(\varphi)\right]d\varphi$,

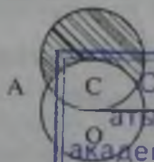
где α и β – полярные углы касательных ($\alpha < \beta$).

Пример 7 Вычислить площадь фигуры, заключенной внутри $\rho = 2\sin\varphi$, но вне $\rho = 1$.

По методу (гл. 3, пример 8) строим графики этих функций. Второй график есть окружность R=1 с центром в полюсе. Для построения первого графика составим таблицу:

φ	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
ρ	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

По полученным точкам строим график, который также есть окружность R=1 с центром в точке C.



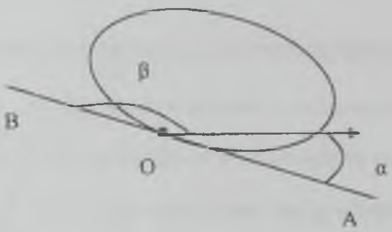
Для определения полярных углов касательных решаем систему из данных уравнений: $\begin{cases}\rho = 1\\ \rho = 2\sin\varphi\end{cases}$, отсюда $\alpha = 30°$, $\beta = 150°$. По формуле имеем:

$$S = \frac{1}{2}\int_{30°}^{150°}\left(4\sin^2\varphi - 1\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left[2\left(1-\cos 2\varphi\right)-1\right]d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(1-2\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varphi - \sin 2\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{5\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

б) полюс расположен на границе фигуры:



OA, OB – касательные из полюса O.

Площадь вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}F^2(\varphi)d\varphi$.

Пример 8 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x^2 = 4y^2 - y^4$.

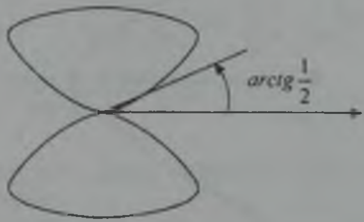
Строить эту фигуру и вычислять площадь удобнее в полярной системе координат. Заменяем X и Y полярными координатами: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Получим $(\rho\cos\varphi)^2 = 4(\rho\sin\varphi)^2 - (\rho\sin\varphi)^4$,

$\rho^2\sin^4\varphi = 4\sin^2\varphi - \cos^2\varphi$, $\rho = \frac{\sqrt{4\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}}{\sin^2\varphi}$. Из условия

$4\sin^2\varphi - \cos^2\varphi \ge 0$ получим $|tg\varphi| \ge \frac{1}{2}$. Замечая, что график симметричен относительно осей OX и OY, имеем:

φ	$arctg\frac{1}{2}$	30°	45°	60°	90°
ρ	0	2	$\sqrt{6}$	$\frac{2\sqrt{11}}{3}$	2

По полученным точкам строим график:



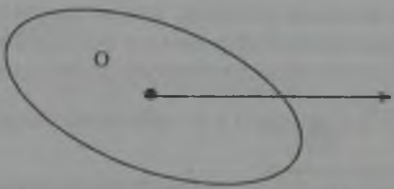
Найдем площадь четвертой части фигуры:

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{arctg\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\sin^4\varphi}d\varphi = 2\int\limits_{arctg\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4}{\sin^2\varphi} - \frac{\cos^2\varphi}{\sin^4\varphi}\right)dx =$$

$$= 2\cdot\left(-4ctg\varphi + \frac{1}{3}ctg^3\varphi\right)\Bigg|_{arctg\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\left(4ctg\left(arctg\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}ctg^3\left(arctg\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= 8\cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot 2^3 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

в) полюс расположен внутри фигуры:



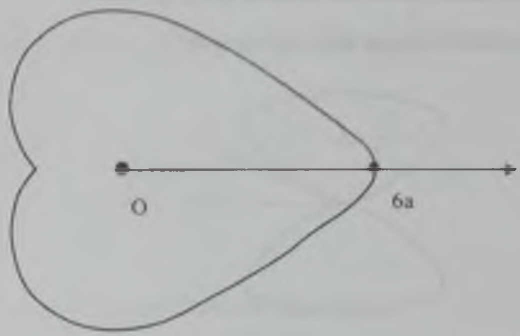
Площадь вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}F^2(\varphi)d\varphi$.

Пример 9 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 2a\cdot(2 + \cos\varphi)$, (улитка Паскаля).

Так как $\cos\varphi$ четная функция, то график симметричен относительно полярной оси. Составим таблицу:

φ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
ρ	6a	5,7a	5,4a	5a	4a	3a	2,6a	2,3a	2a

По полученным точкам строим график:



Используя симметрию, имеем:

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}4a^2(2+\cos\varphi)^2\,d\varphi = 4a^2\int_0^{\pi}\left(4+4\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi}(8+8\cos\varphi+1+\cos 2\varphi)d\varphi = 2a^2\left(9\varphi+8\sin\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= 2a^2\cdot 9\pi = 18a^2\pi\ .$$

2 Вычисление длины дуги плоской кривой

Как и при вычислении площади, кривая может задаваться обычной функцией, в параметрической форме и в полярной системе координат.

Для каждого случая имеется формула длины кривой **AB**:

а) $l_{AB} = \int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$, где **a** и **b** – абсциссы точек **A** и **B** при (**a** < **b**).

б) $l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt$, где **α** и **β** значения параметра **t** для точек **A** и **B** при (**α** < **β**).

в) $l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{F^2(\varphi)+\left(F'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$, где **α** и **β** значения полярного угла **φ** для точек **A** и **B** при (**α** < **β**).

Пример 10 Вычислить длину кривой $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ между её точками, ординаты которых $y=1$, $y=e$. По формуле (а) имеем:

$$l_{AB}=\int_1^e\sqrt{1+\left[\left(\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y\right)'\right]^2}dy=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}\right)^2}dy=$$

$$=\int_1^e\sqrt{1+\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}}dy=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}\right)^2}dy=\int_1^e\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}\ln y\right)\Big|_1^e=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}.$$

Пример 11 Вычислить длину кривой $x=8at^3$, $y=3a\left(2t^2-t^4\right)$, лежащей над осью **OX** (a>0).

Из условия $y=3a\left(2t^2-t^4\right)\geq 0$, $t^2\left(2-t^2\right)\geq 0$, $t^2\leq 2$, $-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$, поэтому $\alpha=-\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{2}$.

По формуле (б) с учетом симметрии, имеем:

$$l_{AB}=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{\left(24at^2\right)^2+9a^2\left(4t-4t^3\right)^2}dt=24a\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4t^4+t^2-2t^4+t^6}dt=$$

$$=24a\int_0^{\sqrt{2}}\left(t+t^3\right)dt=24a\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}=24a(1+1)=48a.$$

Пример 12 Вычислить длину логарифмической спирали $\rho=e^{a\varphi}$ от начала до точки $\varphi=\frac{1}{a}$. Из условия следует, что $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{a}$.

По формуле (в) имеем:

$$l_{AB}=\int_0^{\frac{1}{a}}\sqrt{\left(e^{a\varphi}\right)^2+\left(ae^{a\varphi}\right)^2}d\varphi=\int_0^{\frac{1}{a}}e^{a\varphi}\cdot\sqrt{1+a^2}d\varphi=\sqrt{1+a^2}\cdot\frac{e^{a\varphi}}{a}\Big|_0^{\frac{1}{a}}=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e-1)$$

3 Вычисление объема тела

Для вычисления объема имеются формулы: $V=\int_a^b S(x)dx$, где S(x) – площадь поперечного сечения.

$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ – объем тела вращения вокруг оси **OX**.

Пример 13 Вычислить объем эллипсоида: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Рассмотрим сечение плоскостью $x=x_1$ $(-a\le x_1\le a)$.

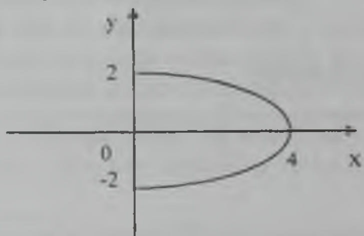
$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x_1^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)}=1$.

Это эллипс с полуосями $b_1=b\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a^2}}$, $c_1=c\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a^2}}$.

Площадь этого сечения по формуле (гл.9, пример 6) равна $S(x)=\pi b_1c_1=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. По первой формуле с учетом симметрии относительно плоскости x = 0, имеем:

$$V=2\int_0^a\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2bc\pi\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a=2bc\pi\left(a-\frac{a}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Пример 14 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси **OY** фигуры, ограниченной линиями: $y^2=4-x$, $x=0$.



Так как вращение вокруг оси **OY**, то в первой формуле поменяются местами оси координат:

$$V=\pi\int_{-2}^{2}(4-y^2)^2dy=2\pi\int_0^2(16-8y^2+y^4)dy=2\pi\left(16y-\frac{8}{3}y^3+\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=2\pi\left(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}\right)=\frac{512}{15}\pi.$$

4 Площадь поверхности вращения

Такая площадь вычисляется по формуле:

а) $S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$, где f(x) – функция, на графике которой расположена вращаемая кривая **AB**, **a** и **b** (**a**<**b**) – абсциссы точек **A** и **B** соответственно.

Если мы имеем параметрическую форму или полярную систему координат, то формулы площади имеют вид:

б) $S = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)|\cdot\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt$, где $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$;

в) $S = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho\,|\sin\varphi|\cdot\sqrt{F^2(\varphi)+\left(F'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$, где $\rho = F(\varphi)$.

Пример 15 Вычислить площадь поверхности, образованной вращением цепной линии $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, вокруг оси **OX** от точки $x=-a$ до точки $x=a$.

Найдем $y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$ и так как данная функция четная, то её график симметричен относительно **OY**, поэтому по формуле (а) получим:

$$S=2\cdot2\pi\int_0^a\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\,dx=a\pi\int_0^a\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx=$$

$$=a\pi\int_0^a\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx=a\pi\left(\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=a\pi\left(\frac{a}{2}e^{2}+2a-\frac{a}{2}e^{-2}\right)-a\pi\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right)=\frac{\pi a^2}{2}\left(e^2-e^{-2}+4\right).$$

Пример 16 Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси **OX** одной «арки» циклоиды: $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(t-\cos t) \end{cases}$, $0\le t\le 2\pi$.

Найдем $x'=a(1-\cos t)$, $y'=a\sin t$.

По формуле (б) имеем:

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=2a^2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\,dt=$$

$$= 2a^2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t) 2\sin\frac{t}{2} dt = 2a^2\pi \int_0^{2\pi} \left(2\sin\frac{t}{2} - \sin\frac{3t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right) dt =$$

$$= 2a^2\pi \left(\frac{2}{3}\cos\frac{3t}{2} - 6\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 2a^2\pi\left(-\frac{2}{3} + 6 - \frac{2}{3} + 6\right) = 4a^2\pi\frac{16}{3} = \frac{64a^2\pi}{3}.$$

Пример 17 Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho = a(1-\cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

Так как кардиоида располагается симметрично относительно полярной оси, то та же поверхность получается при вращении половины кардиоиды.

По формуле (в) имеем:

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} a(1-\cos\varphi)\sin\varphi \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a^2\pi \int_0^{\pi} (1-\cos\varphi)\sin\varphi \cdot 2\sin\frac{\varphi}{2} d\varphi = 2a^2\pi \int_0^{\pi} \left(2\sin\varphi \cdot \sin\frac{\varphi}{2} - \sin 2\varphi \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= 2a^2\pi \int_0^{\pi} \left(-\cos\frac{3\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{5\varphi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{3\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= 2a^2\pi \left(2\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\varphi}{2} - \sin\frac{3\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 2a^2\pi\left(2 + \frac{1}{5} + 1\right) = \frac{32a^2\pi}{5}.$$

5 Вычисление работы переменной силы

Работа по перемещению на отрезок [a,b] под действием переменной силы определяется по формуле: $A = \int_a^b F(x)dx$.

Пример 18 Сжатие пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу, производимую при сжатии пружины на 4 см, если для сжатия на 0,5 см требуется сила в 1 кг.

Пусть $\boldsymbol{x}$ – величина сжатия (в метрах),

F(x) –сила, требуемая на это сжатие (в килограммах).

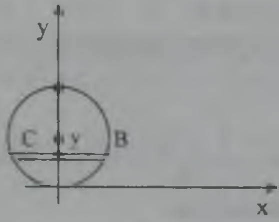
Тогда $F(x) = kx$, где $\boldsymbol{k}$ – коэффициент. Найдем его из условия, имеем $1 = k \cdot 0.005$, $k = 200\frac{кг}{м}$. Значит $F(x) = 200x$.

По формуле получим $A = \int_0^{0.04} 200x dx = 100x^2\Big|_0^{0.04} = 0{,}16\, кг\cdot м$.

Пример 19 Вычислить работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара, представляющий собой лежащий на боку цилиндр длиной **l** и радиусом **R**, через отверстие вверху. Удельный вес воды:

$\gamma = 9.81\, kH/м^3$, $l = 5м$, $R = 1м$.

Решение.



На высоте **y** выделим слой воды **dy**. Его объем $dV = |CB| l dy = 2l\sqrt{y(2R-y)}dy$.

Работа по поднятию этого слоя на высоту $H = 2R - y$ равна:

$dA = HdV\gamma = 2l\gamma(2R-y)\sqrt{y(2R-y)}dy$.

Тогда $A = \int_0^{2R} dA = 2l\gamma \int_0^{2R} y^{\frac{1}{2}}(2R-y)^{\frac{3}{2}}dy = \begin{vmatrix} y = 2R\sin^2 t \\ dy = 2R\sin 2t dt \end{vmatrix} =$

$$= 2l\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2R}\sin t\left(\sqrt{2R}\right)^3 \cos^3 t \cdot 4R\sin t\cos t dt = 32\gamma l R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^4 t dt =$$

$$= 32\gamma l R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt = 4\gamma l R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t(1+\cos 2t)dt =$$

$$= 4R^3\gamma l \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= 2R^3\gamma l \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos 4t + \cos 2t - \frac{1}{2}\cos 6t - \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt =$$

$$= 2R^3\gamma l\left(t - \frac{\sin 4t}{4} + \frac{\sin 2t}{4} - \frac{\sin 6t}{12}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2R^3\gamma l\frac{\pi}{2} = \pi R^3\gamma l.$$

Отсюда $A = 3.14 \cdot 1^3 \cdot 9.81 \cdot 5 \approx 154$ кДж.

6 Вычисление центра тяжести

Координаты центра тяжести однородной плоской кривой **AB**, расположенной на графике функции $y = f(x)$, вычисляются по формулам:

$$x = \frac{1}{l_{AB}}\int_a^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\,,\quad y = \frac{1}{l_{AB}}\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\,,$$

где l_{AB} – длина этой кривой.

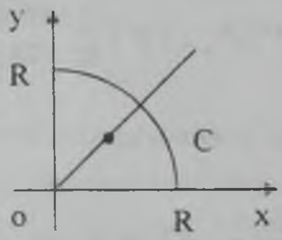
Координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ вычисляются по формулам:

$$x = \frac{1}{S}\int_a^b x\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx\,,\quad y = \frac{1}{2S}\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx\,,$$

где S – площадь этой фигуры.

Если линия или фигура имеет ось симметрии, то ее центр тяжести лежит на этой оси.

Пример 20 Вычислить координаты центра тяжести дуги, составляющей четверть окружности радиуса R.



Расположим эту дугу как на рисунке. Биссектриса I четверти будет для дуги осью симметрии, поэтому $x = y$.

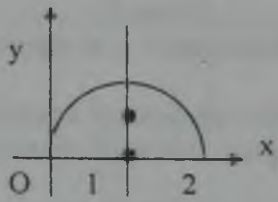
Длина этой дуги равна: $l = \dfrac{\pi R}{2}$.

Уравнение дуги: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

По формуле имеем $y = \dfrac{1}{\frac{\pi R}{2}}\displaystyle\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\cdot\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = \frac{2}{\pi R}\int_0^R R\,dx =$

$= \dfrac{2}{\pi}x\Big|_0^R = \dfrac{2R}{\pi}$. Точка $C\left(\dfrac{2R}{\pi}, \dfrac{2R}{\pi}\right)$ – центр тяжести данной дуги.

Пример 21 Вычислить координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $y = 2x - x^2$.



Прямая $x=1$ является осью симметрии данной фигуры, поэтому $x=1$.

Найдем площадь: $S=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$.

По формуле имеем:

$$y=\frac{1}{2\cdot\frac{4}{3}}\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx=\frac{3}{8}\int_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right)dx=\frac{3}{8}\left(4\frac{x^3}{3}-x^4+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{32}{3}-16+\frac{32}{5}\right)=4-6+\frac{12}{5}=\frac{12}{5}-2=\frac{2}{5}.$$

Точка $C\left(1;\frac{2}{5}\right)$ – центр тяжести данной фигуры.

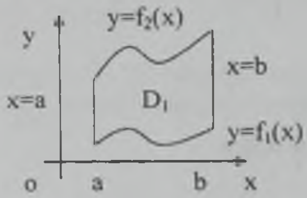
Глава 9
Кратные интегралы и их применения

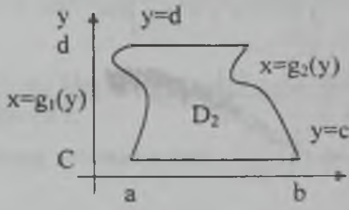
В этой главе рассмотрим двойные и тройные интегралы, а также некоторые задачи, решаемые с помощью таких интегралов.

1 Двойной интеграл и его применения

Пусть $\mathbf{D_1}$ – область, ограниченная слева и справа вертикальными отрезками, а снизу и сверху – графиками двух функций.

Пусть $\mathbf{D_2}$ – область, ограниченная снизу и сверху горизонтальными отрезками, а слева и справа – графиками двух функций.



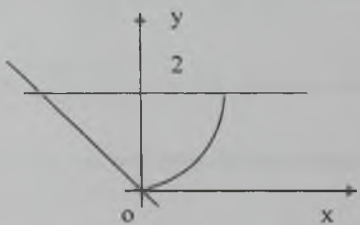


Тогда двойной интеграл по таким областям вычисляется по формулам:

а) $\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy$,

б) $\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx$.

Пример 1 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (1+x+y)dxdy$ по области $\mathbf{D}$, ограниченной линиями: $y=-x$, $x=\sqrt{y}$, $y=2$.



Из рисунка видно, что область относится к типу $\mathbf{D_2}$. По формуле мы имеем:

$$\iint(1+x+y)dxdy=\int_0^2 dy\int_{-y}^{\sqrt{y}}(1+x+y)dx=\int_0^2 dy\left(x+\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_{-y}^{\sqrt{y}}=$$

$$=\int_0^2\left(\sqrt{y}+\frac{y}{2}+y\sqrt{y}+y-\frac{y^2}{2}+y^2\right)dy=\int_0^2\left(\sqrt{y}+\frac{3}{2}y+y^{\frac{3}{2}}+\frac{y^2}{2}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}y^2+\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}+\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=$$

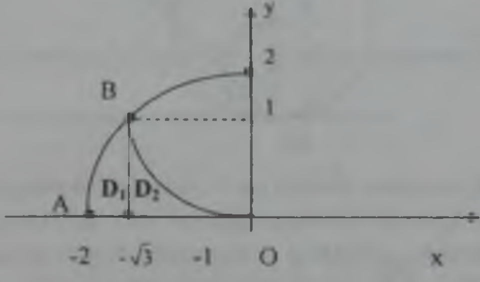
$$=\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}+3+\frac{2}{5}\cdot 2^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{8}{5}\sqrt{2}=\frac{13}{3}+\frac{44}{15}\sqrt{2}.$$

Если область $\mathbf{D}$ не относится к виду $\mathbf{D_1}$ или $\mathbf{D_2}$, то вертикальными или горизонтальными отрезками делим на части вида $\mathbf{D_1}$ или $\mathbf{D_2}$.

Пример 2 Изменить порядок интегрирования.

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}}dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_{-\sqrt{3}}^{0}dx\int_0^{2-\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$$

Найдем области $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$, на которых заданы эти интегралы.



Дуга $\overset{\smile}{AB}$ – часть окружности $x^2+y^2=4$,

дуга $\overset{\smile}{BO}$ – часть окружности $x^2+(y-2)^2=4$.

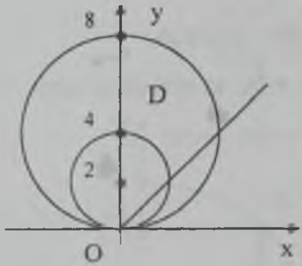
$\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$ – области первого типа, а их объединение образует область второго типа, поэтому данную сумму повторных интегралов можно записать одним повторным интегралом, т.е.

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}}dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_{-\sqrt{3}}^{0}dx\int_0^{2-\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}}f(x,y)dx.$$

Здесь границы внутреннего интеграла $-\sqrt{4-y^2}$ и $-\sqrt{4y-y^2}$ найдены как значения переменной **x** из уравнений $x^2+y^2=4$ и $x^2+(y-2)^2=4$ соответственно, так как дуга первой окружности $\overset{\smile}{AB}$ ограничивает область слева, а дуга второй окружности $\overset{\smile}{BO}$ ограничивает область справа.

Если область **D** является кругом или его частью, то двойной интеграл удобнее вычислять в полярных координатах по формуле: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}f[\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi]\rho\, d\rho$, где границы интегрирования определяются как в гл.8 (1, случай 3а, пример 7).

Пример 3 Вычислить $\iint\limits_D(1+x)dxdy$ по области **D**, ограниченной линиями: $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $x=0$.



Область **D** оказалась частью круга, поэтому переходим к полярным координатам. $(\rho\sin\varphi)^2-\rho\cdot 4\sin\varphi+(\rho\cos\varphi)^2=0$, $\rho_1=4\sin\varphi$ – уравнение малой окружности, $\rho_2=8\sin\varphi$ – уравнение большой окружности. По формуле имеем:

$$\iint\limits_D(1+x)dxdy=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi}(1+\rho\cos\varphi)\rho\, d\rho=\left(8\sin^3\varphi+\frac{112}{3}\sin^4\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=8+\frac{112}{3}-1-\frac{7}{3}=7+\frac{105}{3}=7+35=42.$$

Рассмотрим некоторые применения двойного интеграла.

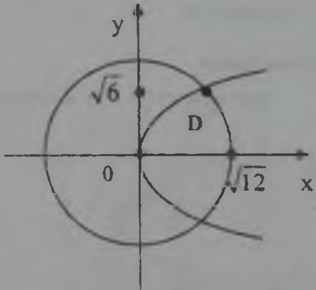
1) $S_D=\iint\limits_D dxdy$ – площадь плоской области **D**.

2) $S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$ – площадь поверхности $z=f(x,y)$, имеющую проекцию на плоскость **XOY** область **D**.

3) $m=\iint\limits_{D}\gamma(x,y)dxdy$ – масса пластинки с плотностью $\gamma(x,y)$ и занимающую область **D**.

4) $x=\frac{1}{m}\iint\limits_{D}x\gamma(x,y)dxdy$, $y=\frac{1}{m}\iint\limits_{D}y\gamma(x,y)dxdy$ – координаты центра тяжести такой пластинки.

Пример 4 Вычислить площадь области, ограниченной линиями $x^2+y^2=12$, $x\sqrt{6}=y^2\ (x\ge 0)$.



Фигура симметричная, поэтому **D** – верхняя половина. Эта область второго типа.

По формуле (1) имеем:

$$S=2\iint\limits_{D}dxdy=2\int\limits_{0}^{\sqrt{6}}dy\int\limits_{\frac{y^2}{\sqrt{6}}}^{\sqrt{12-y^2}}dx=2\int\limits_{0}^{\sqrt{6}}\left(\sqrt{12-y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{6}}\right)dy=$$

$$=\left|\begin{array}{l}y=\sqrt{12}\sin t\\ dy=\sqrt{12}\cos t dt\end{array}\right|=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{12}\cos t\cdot\sqrt{12}\cos t dt-\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{6}}=$$

$$=12\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt-4=12\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-4=12\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)-4=2+3\pi$$

Пример 5 Вычислить площадь сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Верхняя полусфера имеет уравнение: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, а ее проекцией является круг радиуса R, поэтому вычислим в полярных координатах.

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Тогда по формуле (2) имеем:

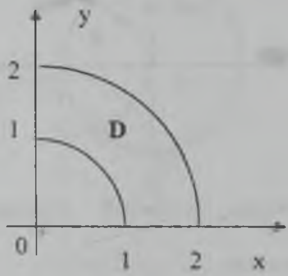
$$S=2\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy=2\iint_D\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=$$

$$=2R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi}}=2R\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\int_0^R\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=$$

$$=2R\cdot 2\pi\left(-\sqrt{R^2-\rho^2}\right)\Big|_0^R=4R^2\pi.$$

Пример 6 Пластинка **D** задана неравенствами: $1\le x^2+y^2\le 4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $\gamma(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ – плотность.

Вычислить массу пластинки.



Пластинка **D** является частью круга, поэтому переходим к полярным координатам.

По формуле (3) имеем:

$$m=\iint_D\frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_1^2\frac{\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\rho\, d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_1^2(\cos\varphi+\sin\varphi)d\rho=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi\int_1^2 d\rho=(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\rho\Big|_1^2=(1+1)\cdot(2-1)=2.$$

Пример 7 Вычислить координаты центра тяжести пластинки из задачи 6.

По формулам (4) найдем оба двойных интеграла, а $m=2$.

$$\iint_D x\gamma(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)\cos\varphi\, d\varphi\cdot\int_1^2\rho\, d\rho=$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{2} d\varphi \cdot \left(\frac{\rho^2}{2} \Bigg|_1^2 \right) = \frac{3}{4}\left(\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

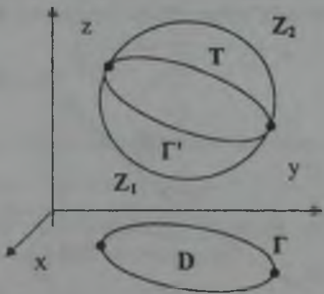
$$= \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3(2+\pi)}{8}.$$

$$\iint_D y\gamma(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi)\sin\varphi \, d\varphi \cdot \int_1^2 \rho \, d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{2} d\varphi \cdot \left(\frac{\rho^2}{2} \Bigg|_1^2 \right) = \frac{3}{4}\left(\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3(2+\pi)}{8}.$$

Таким образом $x = y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3(2+\pi)}{8} = \frac{3(2+\pi)}{16}$

2 Тройной интеграл и его применения



Тройной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iiint_T t(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1}^{z_2} t(x,y,z)dz,$$

где **D** – проекция тела **T** на плоскость **XOY**;

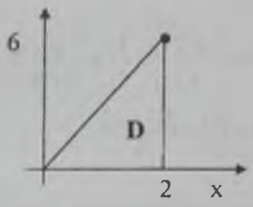
Z_2, Z_1 – верхняя и нижняя поверхности, на которые делится вся поверхность тела **T** линией **Г'**;

Г – проекция линии **Г'** и одновременно граница области **D**.

Аналогично можно тройной интеграл вычислять через проекции на другие координатные плоскости.

Пример 8

Вычислить $\iiint_T x^2 z dxdydz$, $T: y = 3x,\ y = 0,\ x = 2,\ z = xy,\ z = 0$.



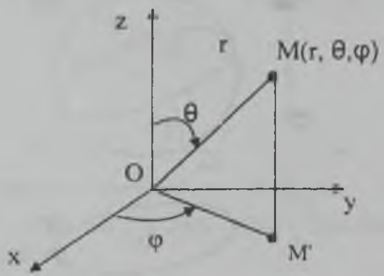
Найдем проекцию тела **T** на плоскость **XOY**. Тогда по формуле имеем

$$\iiint\limits_T x^2 z\,dxdydz = \iint\limits_D x^2 dxdy\int\limits_0^{xy} zdz = \int\limits_0^2 x^2 dx\int\limits_0^{3x} dy\left(\frac{z^2}{z}\right)\Bigg|_0^{xy} = \int\limits_0^2 x^2 dx\int\limits_0^{3x}\frac{x^2y^2}{2}dy =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^4 dx\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{3x} = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^4\, 9x^3 dx = \frac{9}{2}\cdot\frac{x^8}{8}\Bigg|_0^2 = 144.$$

В пространстве можно также задать сферическую и цилиндрическую системы координат. Эти системы координат определяются на базе декартовой системы координат.

Пусть **M'** – проекция точки **M** на плоскость **XOY**.



Тогда величины: $r=|OM|$ – линейная, $\theta=\angle ZOM$ – угловая, $\varphi=\angle XOM'$ – угловая – есть сферические координаты точки **M**.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$ – связь между сферическими и декартовыми координатами.

Цилиндрическая система координат получается при замене **x** и **y** на полярную систему координат, а **z** остается прежней.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$ – связь между цилиндрическими и декартовыми координатами.

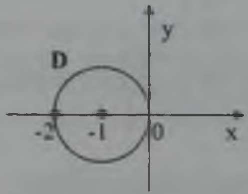
Если тело **T** является частью шара или цилиндра, то тройной интеграл удобнее вычислять, переходя соответственно к сферическим или цилиндрическим координатам по формулам:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} f\left[r\cos\varphi\sin\theta; r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right]\times r\sin\theta\; dr\,,$$

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \rho\, d\rho \int\limits_{z_1}^{z_2} f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi, z)dz\,.$$

Границы интегрирования определяются по тем же правилам, которые изложены ранее.

Пример 9 Вычислить $\iiint\limits_T (1+y)dxdydz$, $T: x^2+y^2+2x=0$, $z=\dfrac{25}{4}-y^2$, $z=0$.



Уравнение $x^2+y^2+2x=0$ определяет цилиндр, поэтому тело **T** – часть цилиндра между поверхностями $z=0$ и $z=\dfrac{25}{4}-y^2$.

Найдем проекцию **D**. Вычислим данный интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам по формуле:

$$\iiint\limits_T (1+y)dxdydz = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{-2\cos\varphi} \rho\, d\rho \int\limits_{0}^{\frac{25}{4}-\rho^2\sin^2\varphi} (1+\rho\sin\varphi)dz =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{-2\cos\varphi} \rho(1+\rho\sin\varphi)\left(\frac{25}{4}-\rho^2\sin^2\varphi\right)d\rho =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{-2\cos\varphi} \left(\frac{25}{4}\rho+\frac{25}{4}\rho^2\sin^2\varphi-\rho^3\sin^2\varphi-\rho^4\sin^3\varphi\right)d\rho =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{25}{8}\rho^2+\frac{25}{12}\rho^3\sin\varphi-\frac{1}{4}\rho^4\sin^2\varphi-\frac{1}{5}\rho^5\sin^3\varphi\right)\Bigg|_0^{-2\cos\varphi} =$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\left(\frac{25}{2}\cos^2\varphi-\frac{50}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi-4\cos^4\varphi\sin^2\varphi+\frac{32}{5}\cos^5\varphi\sin^3\varphi\right)d\varphi.$$

Найдем отдельно каждый интеграл:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\frac{25}{2}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{25}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{25}{4}\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}=\frac{25}{4}\pi.$$

$$-\frac{50}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi=\frac{50}{3}\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}=0.$$

$$-4\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)^2(1-\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)\sin^2 2\varphi\,d\varphi=-\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)(1-\cos 4\varphi)d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi-\cos 4\varphi-\cos 2\varphi\cos 4\varphi)d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}-\frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos 6\varphi+\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{8}\left(\frac{\sin 6\varphi}{6}+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=-\frac{\pi}{4}.$$

$$\frac{32}{5}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi=\frac{32}{5}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^5\varphi(\cos^2\varphi-1)d(\cos\varphi)=$$

$$=\frac{32}{5}\left(\frac{\cos^8\varphi}{8}-\frac{\cos^6\varphi}{6}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=0$$

Отсюда получим $\iiint\limits_T(1+y)dxdydz=\frac{25}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=6\pi$.

С помощью тройного интеграла можно найти объем, массу и центр тяжести тела по формулам:

$V = \iiint\limits_T dxdydz$ – объем тела **T**,

$m = \iiint\limits_T \gamma(x,y,z)dxdydz$ – масса тела плотности $\gamma(x,y,z)$.

$x = \frac{1}{m}\iiint\limits_T x\gamma(x,y,z)dxdydz$, $y = \frac{1}{m}\iiint\limits_T y\gamma(x,y,z)dxdydz$,

$z = \frac{1}{m}\iiint\limits_T z\gamma(x,y,z)dxdydz$ – координаты центра тяжести тела **T** массой **m**.

Пример 10 Вычислить объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$.

Этими поверхностями являются верхняя полусфера радиуса **6** и верхний конус. Значит, тело находится между ними. Проекцией **D** этого тела на плоскость **XOY** будет круг радиуса $3\sqrt{3}$, поэтому тройной интеграл будем вычислять, перейдя к цилиндрическим координатам, по формуле:

$$V = \iiint\limits_T dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{3\sqrt{3}} \rho d\rho \int\limits_{\frac{\rho}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{36-\rho^2}} dz = \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \int\limits_0^{3\sqrt{3}} \left(\rho\sqrt{36-\rho^2} - \frac{\rho^2}{\sqrt{3}}\right) d\rho =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{3}(36-\rho^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\rho^3}{3\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^{3\sqrt{3}} = 2\pi\left(-\frac{1}{3}\cdot 27 - 27 + \frac{1}{3}\cdot 6^3\right) = 2\pi(72 - 9 - 27) = 72\pi.$$

Пример 11 Вычислить массу тела с плотностью $\gamma(x,y,z) = 5z$, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 9z^2$, $x = 0$, $y = 0$ $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$.

Из условия следует, что тело находится в первой октанте между сферой и конусом. Проекцией **D** будет круг радиуса $\frac{12}{\sqrt{10}}$, поэтому вычислим массу по формуле, перейдя к цилиндрическим координатам:

$$m = \iiint\limits_T 5z dxdydz = 5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}} \rho\, d\rho \int\limits_{\frac{\rho}{3}}^{\sqrt{16-\rho^2}} z dz =$$

$$= 5(\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}} \rho\, d\rho \cdot \left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\rho}{3}}^{\sqrt{16-\rho^2}} = \frac{5\pi}{2} \int_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}} \frac{\rho}{2}\left(16 - \rho^2 - \frac{\rho^2}{9}\right) d\rho =$$

$$= \frac{5\pi}{4}\left(8\rho^2 - \frac{5\rho^4}{18}\right)\Bigg|_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}} = \frac{5\pi}{4}\left(8 \cdot \frac{144}{10} - \frac{5}{18} \cdot \frac{12^4}{100}\right) = 72\pi .$$

Пример 12 Вычислить координаты центра тяжести тела из примера 11.

Так как плотность тела не зависит от **x** и **y**, а тело симметрично относительно плоскости **y=x**, то нам достаточно найти **x** и **z** центра тяжести.

Из формулы с учетом решения примера 11, имеем:

$$x = \frac{1}{m} \iiint_T x\gamma(x,y,z)\,dxdydz = \frac{5}{72\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}} \frac{\rho^2}{2}\left(16 - \rho^2 - \frac{\rho^2}{9}\right) d\rho =$$

$$= \frac{5}{144\pi}(\sin\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}} \left(16\rho^2 - \frac{10\rho^4}{9}\right) d\rho = \frac{5}{144\pi}\left(\frac{16}{3}\rho^3 - \frac{2\rho^5}{9}\right)\Bigg|_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}} =$$

$$= \frac{5}{144\pi}\left(\frac{16}{3} \cdot \frac{12^3}{10\sqrt{10}} - \frac{2}{9} \cdot \frac{12^5}{100\sqrt{10}}\right) = \frac{\sqrt{10}}{144\pi}\left(\frac{16}{3} \cdot \frac{12^3}{10 \cdot 2} - \frac{2}{9} \cdot \frac{12^5}{10 \cdot 20}\right) = \frac{32\sqrt{10}}{25\pi} .$$

$$z = \frac{1}{m} \iiint_T z\gamma(x,y,z)\,dxdydz = \frac{5}{72\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}} \rho\, d\rho \int_{\frac{\rho}{3}}^{\sqrt{16-\rho^2}} z^2 dz =$$

$$= \frac{5}{72\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}} \rho\, d\rho \cdot \left(\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{\rho}{3}}^{\sqrt{16-\rho^2}} = \frac{5}{72 \cdot 6} \int_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}} \left(\rho\left(16 - \rho^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\rho^4}{27}\right) d\rho =$$

$$= \frac{5}{432}\left(-\frac{1}{5}\left(16 - \rho^2\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{\rho^5}{135}\right)\Bigg|_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}} = \frac{1}{432}\left(4^5 - \left(16 - \frac{72}{5}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{12^5}{27 \cdot 100\sqrt{10}}\right) =$$

$$= \frac{1}{432}\left(4^5 - \frac{4^5}{100\sqrt{10}} - \frac{9 \cdot 4^5}{100\sqrt{10}}\right) = \frac{4^5}{432}\left(1 - \frac{1}{10\sqrt{10}}\right) = \frac{64}{27}\left(1 - \frac{1}{10\sqrt{10}}\right).$$

Точка **C** $\left(\frac{32\sqrt{10}}{25\pi}; \frac{32\sqrt{10}}{25\pi}; \frac{64}{27}\left(1 - \frac{1}{10\sqrt{10}}\right)\right)$ – центр тяжести данного тела.

Глава 10
Криволинейные интегралы и их применения

I Криволинейный интеграл 1-го рода и его применения:

а) Рассмотрим криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} f(x,y)dS$ по плоской кривой **AB** от функции $f(x,y)$. Такой интеграл вычисляется приведением к определенному интегралу по следующим формулам:

1) $\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \int\limits_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx$, когда кривая **AB** лежит на графике функции $y=g(x)$, **a** и **b** – абсциссы точек **A** и **B** соответственно;

2) $\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$, когда кривая **AB** лежит на графике функции: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ **α** и **β** – значения параметра точек **A** и **B** соответственно;

3) $\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \int\limits_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{F^2(\varphi)+(F'(\varphi))^2}\,d\varphi$, когда кривая **AB** лежит на графике функции $\rho=F(\varphi)$, **α** и **β** – значения полярного угла точек **A** и **B** соответственно.

Пример 1 Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}(x+y)dS$, **AB** – отрезок, **A** (1,2), **B** (3,5).

Составим уравнение отрезка **AB**: $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$, $y'=\frac{3}{2}$.

По формуле (1) получим:

$$\int\limits_{AB}(x+y)dS = \int\limits_1^3\left(x+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+\frac{9}{4}}\,dx = \frac{\sqrt{13}}{2}\int\limits_1^3\left(\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx =$$

$$=\frac{\sqrt{13}}{4}\left(\frac{5}{2}x^2+x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{\sqrt{13}}{4}\left(\frac{45}{2}+3-\frac{5}{2}-1\right)=\frac{11\sqrt{13}}{2}.$$

Пример 2 Вычислить $\int\limits_{AB}\frac{x}{x^2+y^2}dS$, **AB** – четверть окружности радиуса **R**, лежащая в **I** четверти.

Запишем уравнение кривой **AB** в параметрической форме:

$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Тогда по формуле (2) получим:

$$\int_{AB} \frac{x}{x^2+y^2} dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R\cos t\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}}{R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Пример 3 Вычислить $\int_{AB}(x+y)dS$, AB – верхняя полуокружность, заданная уравнением $x^2-4x+y^2=0$.

Запишем уравнение в полярных координатах:

$(\rho\cos\varphi)^2 - 4\rho\cos\varphi + (\rho\sin\varphi)^2 = 0$, $\rho = 4\cos\varphi$, $\rho' = -4\sin\varphi$, $x = \rho\cos\varphi = 4\cos^2\varphi$, $y = \rho\sin\varphi = 4\sin\varphi\cos\varphi$.

Тогда по формуле (3) получим:

$$\int_{AB}(x+y)dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^2\varphi + 4\sin\varphi\cos\varphi\right)\sqrt{16\cos^2\varphi+16\sin^2\varphi}d\varphi =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi+\sin 2\varphi)d\varphi = 8\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 4\pi + 8.$$

б) Рассмотрим криволинейный интеграл $\int_{AB} f(x,y,z)dS$ по пространственной кривой **AB** от функции $f(x,y,z)$.

Такой интеграл вычисляется приведением к определенному интегралу по формуле:

$$\int_{AB} f(x,y,z)dS = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\theta(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\theta'(t))^2}dt,$$

где $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \theta(t) \end{cases}$ – параметрическое уравнение кривой **AB** и $\alpha \le t \le \beta$.

Пример 4 Вычислить $\int_{AB}(xy+z)dS$, AB – первый виток линии $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = kt \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$. По формуле имеем:

$$\int_{AB}(xy+z)dS = \int_0^{2\pi}(a\cos t\cdot a\sin t + kt)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}dt =$$

$$= \sqrt{a^2+k^2}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^2}{2}\sin 2t + kt\right)dt = \sqrt{a^2+k^2}\left(-\frac{a^2}{4}\cos 2t + \frac{kt^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \sqrt{a^2 + k^2}\,\frac{k(2\pi)^2}{2} = 2k\pi^2\sqrt{a^2 + k^2}\,.$$

в) Криволинейный интеграл I рода имеет следующие применения:

1) $l_{AB} = \int\limits_{AB} dS$ – длина кривой **AB**.

2) $m = \int\limits_{AB} \gamma(x, y, z)\,dS$ – масса материальной кривой AB с плотностью $\gamma(x, y, z)$.

3) $x = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} x\gamma(x, y, z)\,dS$, $y = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} y\gamma(x, y, z)\,dS$, $z = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} z\gamma(x, y, z)\,dS$ – координаты центра тяжести такой кривой.

Пример 5 Вычислить длину первой арки циклоиды: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

Кривая задана в параметрической форме, поэтому по соответствующей формуле имеем:

$$l = \int\limits_{AB} dS = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\,dt =$$

$$= a\int\limits_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 4a(1 + 1) = 8a\,.$$

Пример 6 Вычислить массу четверти окружности, лежащей в I четверти радиуса **R** и плотностью $\gamma(x, y) = x + y$.

Запишем уравнение кривой в полярных координатах $\rho = R$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

По формуле для этого случая, имеем:

$$m = \int\limits_{AB} (x + y)\,dS = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (R\cos\varphi + R\sin\varphi)\sqrt{R^2 + 0^2}\,d\varphi =$$

$$= R^2(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2(1 + 1) = 2R^2\,.$$

Пример 7 Вычислить центр тяжести одного витка однородной винтовой линии из примера 4.

Для однородной кривой в формулах (3) координат центра тяжести отсутствует $\gamma(x, y, z)$, а вместо массы берется l – длина кривой.

Найдем сначала длину одного витка:

$$l = \int\limits_{AB} dS = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + k^2}\,dt = \sqrt{a^2 + k^2}\;t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{a^2 + k^2}\,.$$

Теперь найдем все интегралы в (3):

$$\int\limits_{AB} xdS = \int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2+k^2}\,dt = a\sqrt{a^2+k^2}\cdot\sin t\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int\limits_{AB} ydS = \int\limits_0^{2\pi} a\sin t\sqrt{a^2+k^2}\,dt = a\sqrt{a^2+k^2}\cdot(-\cos t)\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int\limits_{AB} zdS = \int\limits_0^{2\pi} kt\sqrt{a^2+k^2}\,dt = k\sqrt{a^2+k^2}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2k\pi\sqrt{a^2+k^2}.$$

Отсюда $x = y = 0$, $z = \dfrac{2k\pi^2\sqrt{a^2+k^2}}{2\pi^2\sqrt{a^2+k^2}} = k\pi$.

$C(0.0.k\pi)$ – центр тяжести одного витка винтовой линии.

2 Криволинейный интеграл 2-го рода и его применения

Эти криволинейные интегралы вычисляются приведением к определенному интегралу также тремя способами для плоской кривой в зависимости от способа задания кривой интегрирования и одним способом, если кривая пространственная. Формулы такого перехода имеют вид:

1) $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left(P(x,f(x)) + Q(x,f(x))\cdot f'(x)\right)dx$,

2) $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_\alpha^\beta \left(P(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)\right)dt$

3) $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$

$$= \int\limits_\alpha^\beta P(\rho\cos\varphi.\rho\sin\varphi)\cdot(\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi) + Q(\rho\cos\varphi.\rho\sin\varphi)\cdot(\rho'\sin\varphi - \rho\cos\varphi)d\varphi$$

Для пространственной кривой формула аналогична (2) с добавлением третьей координаты.

Пример 8 Вычислить $\int\limits_{AB}\dfrac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$ по отрезку $y = 2x$ от $x = 1$ до $x = 2$.

По формуле (1) имеем:

$$\int\limits_{AB}\frac{ydx+xdy}{x^2+y^2} = \int\limits_1^2\frac{(2x+x\cdot 2)dx}{x^2+(2x)^2} = \int\limits_1^2\frac{4xdx}{5x^2} = \frac{4}{5}\ln x\Big|_1^2 = \frac{4}{5}\ln 2.$$

Пример 9 Вычислить $\int\limits_{AB} ydx - xdy$ по эллипсу $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

По формуле (2) имеем:

$$\int_{AB} ydx - xdy = \int_0^{2\pi}(b\sin t(-a\sin t) - a\cos t \cdot b\cos t)dt = -ab\int_0^{2\pi}dt = -ab \cdot t\Big|_0^{2\pi} = -2ab\pi .$$

Пример 10 Вычислить $\int_{AB} yzdx + xzdy + xydz$ по дуге винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = kt$ от $t = 0$ до $t = 2\pi$.

По формуле (2) имеем: $\int_{AB} yzdx + xzdy + xydz =$

$$= \int_0^{2\pi}(a\sin t \cdot kt(-a\sin t) + a\cos t \cdot kt \cdot a\cos t + a\cos t \cdot a\sin t \cdot k)dt =$$

$$= a^2k\int_0^{2\pi}\left(t\cos 2t + \frac{\sin 2t}{2}\right)dt = \begin{vmatrix} u = t \\ dv = \cos 2t dt \\ du = dt \\ v = \dfrac{\sin 2t}{2} \end{vmatrix} =$$

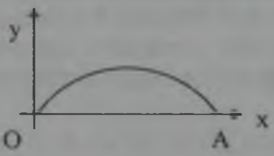
$$= a^2k\left(\frac{t\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\sin 2t}{2}dt - \frac{\cos 2t}{4}\Big|_0^{2\pi}\right) = a^2k\left(0 + \frac{\cos 2t}{4}\Big|_0^{2\pi} - \frac{\cos 2t}{4}\Big|_0^{2\pi}\right) = 0 .$$

Криволинейный интеграл **II** рода имеет следующие применения.

1) $S = \int_L xdy = -\int_L ydx$ – площадь плоской фигуры с границей **L**.

2) $A = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ – работа по перемещению на **AB** под действием вектора силы $\overline{F} = \{P, Q\}$.

Пример 11 Вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью **OX**.



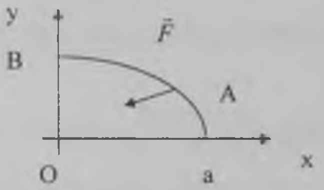
Криволинейный интеграл зависит от направления движения, поэтому в формуле площади направления на замкнутой линии **L** берется таким, чтобы фигура была по левую сторону.

$S = -\int_L ydx = -\int ydx - \int ydx =$

$$= 0 - \int_{AO} ydx = -\int_{2\pi}^{0} a(1-\cos t)\cdot(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = a^2\frac{3}{2}2\pi = 3a^2\pi$$

Пример 12 Вычислить работу по перемещению по эллипсу $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ из точки **A** в **B** под действием силы, направленной к центру эллипса и равной $\{-x, -y\}$.



По формуле (2) мы имеем:

$$A = \int_{AB} -xdx - ydy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-a\cos t\cdot(-a\sin t) - b\sin t\cdot b\cos t\right)dt =$$

$$= \left(a^2-b^2\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt = \frac{a^2-b^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt = \frac{a^2-b^2}{2}\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{a^2-b^2}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2-b^2}{2}.$$

Формула Грина $\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_L Pdx + Qdy$, которая устанавливает связь между двойным интегралом по области **D** и криволинейным интегралом по границе **L** этой области. В некоторых случаях эта формула позволяет рациональнее вычислить криволинейный интеграл, заменив его соответствующим двойным интегралом.

Пример 13 Вычислить $\int_L x^2ydx - xy^2dy$, $L: x^2 + y^2 = R^2$.

Вычислим, приведя интеграл к двойному интегралу по формуле Грина.

$P(x, y) = x^2y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = x^2$, $Q(x, y) = -xy^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -y^2$.

Тогда $\int\limits_{L} x^2 y dx - xy^2 dy = \iint\limits_{D} \left(-y^2 - x^2\right) dx dy = \left| \begin{array}{l} \textit{область } D - \textit{круг, поэтому} \\ \textit{перейдем к полярным} \\ \textit{координатам} \end{array} \right| =$

$$= -\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \left(\rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi\right) \rho \, d\rho = -\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^R = -\frac{\pi R^4}{2}.$$

Глава 11
Дифференциальные уравнения и системы

1 Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Дифференциальное уравнение 1-го порядка общего вида: $F(x,y,y')=0$. Функция $y=\varphi(x)$ – частное решение, если $F(x,\varphi(x),\varphi'(x))=0$.

Аналогично определяются:

$y=\varphi(x,C)$ – общее решение, C – const;

$\varphi(x,y)=0$ – частный интеграл;

$\varphi(x,y,C)=0$ – общий интеграл.

Для удобства изложения методов решения дифференциального уравнения 1-го порядка выделим следующие типы.

Тип 1 Уравнения с разделяющимися переменными

Здесь и далее полагаем, что производная найдена через **x** и **y**, т.е. $y'=f(x,y)$.

Это уравнение будет типа 1, если $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, т.е. $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$.

Пример 1 Найти общее решение уравнения: $y'=\dfrac{x-y^2\cdot x}{y-x^2\cdot y}$.

Это уравнение типа I, так как $y'=\dfrac{x(1-y^2)}{y(1-x^2)}=\dfrac{x}{1-x^2}\cdot\dfrac{1-y^2}{y}$.

Тогда $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{1-x^2}\cdot\dfrac{1-y^2}{y}$, $\dfrac{ydy}{1-y^2}=\dfrac{xdx}{1-x^2}$, $\displaystyle\int\frac{ydy}{1-y^2}=\int\frac{xdx}{1-x^2}$,

$-\dfrac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right|=-\dfrac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|-\dfrac{1}{2}\ln C$, $\dfrac{1-y^2}{1-x^2}=C$ – общий интеграл.

Тип 2 Линейное уравнение

Если $f(x,y)=-p(x)\cdot y+q(x)$, то $y'+p(x)\cdot y=q(x)$ – линейное уравнение.

Для решения вводят две неизвестные функции $U(x)$, $V(x)$. Полагая $y=U\cdot V$, $y'=U'V+U\cdot V'$, получим $U'V+U\cdot V'+pUV=q$, отсюда имеем два уравнения $U\cdot V'+pUV=0$ и $U'\cdot V=q$. Из первого находим **U**, а из второго – **V**.

Пример 2 Найти общее решение уравнения: $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Это уравнение типа II. Тогда $U'\cdot V + U\cdot V' + UV\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, отсюда $U\cdot V' + UV\cos x = 0$ и $U'\cdot V = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Решим эти уравнения по отдельности:

$V' + V\cos x = 0.$

$\frac{dv}{dx} = -V\cos x.$

$\frac{dv}{v} = -\cos x dx.$

$\int\frac{dv}{v} = -\int\cos x dx.$

$\ln v = -\sin x.$

$v = e^{-\sin x}.$

$U'\cdot e^{-\sin x} = \frac{1}{2}\sin 2x.$

$U' = \sin x\cos x\cdot e^{\sin x}.$

$$U = \int\sin x\cos x\cdot e^{\sin x}dx = \left|\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx\end{matrix}\right| = \int t\cdot e^t dt =$$

$$= \left|\begin{matrix} a = t \\ db = e^t dt \\ da = dt \\ b = e^t\end{matrix}\right| = t\cdot e^t - \int e^t dt = \sin x\cdot e^{\sin x} - e^{\sin x} + C.$$

Тогда $y = UV = e^{-\sin x}\left(\sin x\cdot e^{\sin x} - e^{\sin x} + C\right) = \sin x - 1 + C\cdot e^{-\sin x}$.

$y = \sin x - 1 + C\cdot e^{-\sin x}$ – общее решение.

Тип 3 Однородное уравнение

Если $f(x, y) = f(tx, ty)$, то $y' = f(x, y)$ - однородное уравнение.

Для решения вводим неизвестную функцию $z(x) = \frac{y}{x}$. Тогда $y = x\cdot z$, $y' = z + x\cdot z'$ и из уравнения получим $z + x\cdot z' = f(x, xz) = f(1, z)$,

$z' = \frac{f(1, z) - z}{x}$ – уравнение типа 1.

Пример 3 Найти общее решение уравнения: $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$.

Покажем, что уравнение однородное: $f(x, y) = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$,

$$f(xt, yt) = \frac{(xt)(yt) - (yt)^2}{(xt)^2 - 2(xt)(yt)} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

Тогда $y = x\cdot z$, $y' = z + x\cdot z'$, далее получим:

$$z + x\cdot z' = \frac{x\cdot xz - (xz)^2}{x^2 - 2x(xz)} = \frac{z - z^2}{1 - 2z},$$

$$x\cdot z'=\frac{z-z^2}{1-2z}-z=\frac{z-z^2-z+2z^2}{1-2z}=\frac{z^2}{1-2z},$$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{z^2}{1-2z},\quad \frac{dx}{x}=\frac{1-2z}{z^2}dz,\quad \int\frac{dx}{x}=\int\frac{1-2z}{z^2}dz.$$

$$-\frac{1}{z}-2\ln|z|=\ln|x|-\ln|C|,\quad -\frac{x}{y}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|=\ln|x|-\ln|C|,\quad \ln\left|\frac{Cx}{y^2}\right|=\frac{x}{y}.$$

$\frac{Cx}{y^2}=e^{\frac{x}{y}}$ – общий интеграл.

Тип 4 Уравнение, приводимое к линейному (Бернулли)

Если $f(x,y)=-p(x)\cdot y+q(x)\cdot y^n$, $n\neq 0$, $n\neq 1$, то $y'+p(x)\cdot y=q(x)\cdot y^n$ – уравнение Бернулли.

Вводится новая функция: $z=y^{1-n}$, $z'=(1-n)\cdot y^{-n}\cdot y'$. Тогда $\frac{z'}{1-n}+p(x)\cdot z=q(x)$ или $z'+(1-n)\cdot p(x)\cdot z=(1-n)\cdot q(x)$ – линейное уравнение.

Пример 4 Найти общее решение $xy'+y=y^2\ln x$.

Это уравнение Бернулли при $n=2$. Тогда $z=y^{-1}$, $z'=-y^{-2}\cdot y'$, $z-x\cdot z'=\ln x$.

Это уравнение линейное. Решаем по типу 2.

$z=U\cdot V$, $z'=U'\cdot V+U\cdot V'$,

$-x\cdot U'\cdot V-x\cdot U\cdot V'+UV=\ln x$

$-x\cdot U\cdot V'+UV=0$ и $-x\cdot U'\cdot V=\ln x$.

Решаем первое уравнение: $x\cdot V'=V$, $x\frac{dv}{dx}=V$, $\frac{dv}{V}=\frac{dx}{x}$, $V=x$.

Решаем второе уравнение: $-x\cdot U'\cdot x=\ln x$, $U'=-\frac{\ln x}{x^2}$,

$$U=-\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\begin{vmatrix}a=\ln x, & db=-\frac{dx}{x^2}\\ da=\frac{dx}{x}, & b=\frac{1}{x}\end{vmatrix}=\frac{1}{x}\ln x-\int\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}+C.$$

$$z=U\cdot V=x\left(\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}+C\right)=\ln x+1+C\cdot\ln x,\qquad y^{-1}=\ln x+1+C\cdot\ln x,$$

$y=\frac{1}{1+\ln x+C\cdot\ln x}$ – общее решение.

Тип 5 Уравнение, приводимое к однородному

Если $f(x,y)=g\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$, где g(t) – некоторая функция, то

$y' = g\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$ – уравнение типа 5. Такое уравнение решается двумя способами.

1) Если $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$, то $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{b_1}{b} = k$ – число.

Тогда $z = ax + by$ – новая функция и $a_1x + b_1y = kz$, $z' = a + by'$. $y' = \dfrac{z' - a}{b}$. Отсюда $\dfrac{z' - a}{b} = g\left(\dfrac{kz + c_1}{z + c}\right)$ – уравнение типа 1.

Пример 5 Найти общее решение: $y' = \dfrac{4x + 2y + 1}{2x + y + 3}$.

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, поэтому $z = 2x + y$, $z' = 2 + y'$, $z' - 2 = \dfrac{2z + 1}{z + 3}$,

$z' = \dfrac{2z + 1 + 2z + 6}{z + 3} = \dfrac{4z + 7}{z + 3}$, $\dfrac{z + 3}{4z + 7}dz = dx$, $\int \dfrac{z + 3}{4z + 7}dz = \int dx$,

$x + c = \int \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{1}{4z + 7}\right)dz = \dfrac{1}{4}z + \dfrac{5}{16}\ln(4z + 7)$,

$4x + c = 2x + y + \dfrac{5}{4}\ln|8x + 4y + 7|$,

$8x + c = 4y + 5\ln|8x + 4y + 7|$ – общий интеграл.

2) Если $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$, то $\begin{cases} x = U + \alpha \\ y = V + \beta \end{cases}$, где **U**, **V** – новые переменные, (α, β) – решение системы $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$.

Тогда $V' = g\left(\dfrac{a_1U + b_1V}{aU + bV}\right)$ – уравнение типа 3.

Пример 6 Найти общее решение: $y' = \dfrac{4x + 2y}{2x + 1}$.

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ Решим систему $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases}$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = 1$.

Тогда $\begin{cases} x = U - \dfrac{1}{2} \\ y = V + 1 \end{cases}$. Отсюда получим $V' = \dfrac{4U + 2V}{2U} = 2 + \dfrac{V}{U}$ – уравнение типа 3. $z = \dfrac{V}{U}$, $V = zU$, $V' = Uz' + z$.

Подставляя, получим $z + Uz' = 2 + z$, $U \cdot z' = 2$, $z' = \dfrac{2}{U}$.

$$z=\int\frac{2}{U}du=2\ln|U|+C,\ \frac{V}{U}=2\ln|u|+c,\ \frac{y-1}{x+\frac{1}{2}}=2\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|+C,$$

$y=1+(2x+1)\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|+C(2x+1)$ – общее уравнение.

Тип 6 Уравнение в полных дифференциалах

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ – уравнение в полных дифференциалах, если $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Тогда существует функция $U(x,y)$, что $du=Mdx+Ndy=0$, $U(x,y)=C$ – общий интеграл.

Функция $U(x,y)$ определяется по формуле:

$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}M(t,y_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y}N(x,t)dt$, где x_0, y_0 – const.

Пример 7 Найти общее решение: $2x\cos^2 ydx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$.

$M=2x\cos^2 y$, $\quad\frac{\partial M}{\partial y}=-4x\cos y\sin y=-2x\sin 2y$, $\quad N=2y-x^2\sin 2y$,

$\frac{\partial N}{\partial x}=-2x\sin 2y$. так как $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, то это уравнение типа 6.

Найдем $U(x,y)=\int\limits_0^x 2t\cos^2 0dt+\int\limits_0^y(2t-x^2\sin 2t)dt=t^2\Big|_0^x+\left(t^2+\frac{x^2}{2}\cos 2t\right)\Big|_0^y=$

$=x^2+y^2+\frac{x^2}{2}\cos 2y-\frac{x^2}{2}$, $U(x,y)=\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{x^2}{2}\cos 2y=y^2+x^2\cos^2 y$,

$y^2+x^2\cos^2 y=C$ – общий интеграл.

Замечание

Если $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$, то в некоторых случаях легко подбирается множитель $p(x,y)$, такой, что уравнение $p(x,y)\cdot M(x,y)dx+p(x,y)\cdot N(x,y)dy=0$ становится тип 6, т.е. $\frac{\partial(pM)}{\partial y}=\frac{\partial(pN)}{\partial x}$.

Обычно функция $p(x,y)$ зависит только от одной переменной.

Тип 7 Уравнение Клеро

Первые шесть типов определены для случая, когда $y'=f(x,y)$. Теперь полагаем, что это невозможно, но $y=f(x,y')$.

Если $f(x,y') = xy' + \psi(y')$, то получим $y = xy' + \psi(y')$ – уравнение Клеро. Для этого уравнения общее решение определяется без решения, так как $y = Cx + \psi(C)$ – общее решение.

Пример 8 Найти общее решение: $y' = \frac{y}{x} + \frac{y'^3}{x}$.

Найдем отсюда $y = xy' - y'^3$ – уравнение Клеро.

Значит $y = Cx - C^3$ – общее решение.

Тип 8 Уравнение Лагранжа

Если $f(x,y') = x \cdot \varphi(y') + \psi(y')$, где $\varphi(y') \neq y'$ то получим:

$y = x\varphi(y') + \psi(y')$ – уравнение Лагранжа.

Полагаем $y' = p$, тогда $y = x\varphi(p) + \psi(p)$, считая, что **y** есть функция аргументов ***x*** и ***p***. Найдем ее дифференциал: $dy = \varphi(p)dx + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]dp$, но $dy = y'dx = pdx$, отсюда $pdx - \varphi(p)dx = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]dp$ или $[p - \varphi(p)]dx = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]dp$, $p - \varphi(p) \neq 0$.

Это уравнение будет типа 2 или даже 1. Решая его, найдем **X** и, подставляя в данное уравнение, найдем **y**. Объединяя, получим:

$\begin{cases} x = g(p,C) \\ y = r(p,C) \end{cases}$ – общее решение в параметрической форме.

Если из этой системы можно исключить ***p***, то получим общий интеграл.

Пример 9 Найти общее решение: $y = x(1 + y') + y'^2$.

Полагаем $y' = p$, $y = x(1 + p) + p^2$,

$dy = (1 + p)dx + (x + 2p)dp$, $\quad pdx = (1 + p)dx + (x + 2p)dp$,

$dx = -(x + 2p)dp$, $\quad \frac{dx}{dp} + x = -2p$ – уравнение типа 2.

Тогда $x = UV$, $x' = U'V + UV'$, $U'V + UV' + UV = -2p$. Отсюда получим два уравнения $UV' + UV = 0$ и $U'V = -2p$.

Решаем их поочередно:

$UV' + UV = 0$, $V' + V = 0$, $V' = -V$, $\frac{dv}{V} = -dp$, $\ln V = -p$, $V = e^{-p}$.

$U'e^{-p} = -2p$, $\quad U' = -2p \cdot e^{p}$, $U = C - 2\int p \cdot e^{p}dp = C - 2(p \cdot e^{p} - e^{p})$.

$x = UV = e^{-p}(C - 2p \cdot e^{p} + 2e^{p})$, $x = C \cdot e^{-p} - 2p + 2$,

$y = x(1 + p) + p^2 = 2(1 - p)(1 + p) + C(1 + p)e^{-p} + p^2$,

$y = C(1+p)e^{-p} - p^2 + 2.$

$\begin{cases} x = C\cdot e^{-p} - 2p + 2 \\ y = y = C(1+p)e^{-p} - p^2 + 2 \end{cases}$ – общее решение в параметрической форме.

Теперь рассмотрим неполные уравнения 1-го порядка.

Тип 9 Уравнение, не содержащее аргумента: $F(y, y') = 0$

Здесь возможны три случая:

1) $y' = f(y)$ – уравнение типа 1,

2) $y = f(y')$.

Тогда $y' = p$, $y = f(p)$, $dy = pdx$, $dx = \frac{dy}{p} = \frac{f'(p)dp}{p}$, $x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C$.

3) $\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = f(t) \end{cases}$, t – параметр.

Тогда $y' = \frac{dy}{dx}$, $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)dt}{f(t)}$, $x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{f(t)} + C$.

Пример 10 Найти общее решение $y'^3 + y^3 = 3yy'$.

Решаем способом (3). Пусть $y' = yt$, тогда $(yt)^3 + y^3 = 3y^2 t$, $y = \frac{3t}{1+t^3}$,

$y' = \frac{3t^2}{1+t^3}$, $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{1+t^3}{3t^2} \cdot \frac{3(1+t^3) - 3t \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{1+t^3-3t^3}{t^2(1+t^3)} dt = \frac{1-2t^3}{t^2(1+t^3)} dt$.

$\left. \begin{array}{l} x = \int \frac{1-2t^3}{t^2(1+t^3)} dt \\ y = \frac{3t}{1+t^3} \end{array} \right|$ – общее решение в параметрической форме.

Замечание

Неопределенный интеграл находится методом разложения на сумму простейших рациональных дробей (гл.7, 1, пример 3).

Пример 11 Найти общее решение $\ln y' - yy' = 0$.

Решаем способом (2). Пусть $y' = p$, тогда $y = \frac{\ln p}{p}$, $dy = \frac{1 - \ln p}{p^2} dp$,

$dy = y' dx = pdx$. Отсюда $pdx = \frac{1-\ln p}{p^2} dp$, $dx = \frac{1-\ln p}{p^3} dp$,

$x = \int \frac{1-\ln p}{p^3} dp = -\frac{1}{2p^2} - \int \frac{\ln p}{p^3} dp =$

$$=\left|\begin{matrix} U=\ln p,\ dU=\dfrac{dp}{p} \\ dV=\dfrac{dp}{p^3},\ V=-\dfrac{1}{2p^2}\end{matrix}\right|=-\frac{1}{2p^2}-\left(-\frac{\ln p}{2p^2}+\int\frac{dp}{2p^3}\right)=\frac{\ln p-1}{2p^2}+\frac{1}{4p^2}+C.$$

Общее решение в параметрической форме – $\begin{cases} x=\dfrac{2\ln p-1}{4p^2}+C \\ y=\dfrac{\ln p}{p}\end{cases}$

Тип 10 Уравнение, не содержащее функции: $F(x,y')=0$

Здесь также возможны три случая, аналогичные из типа 9, то есть $y'=f(x)$, $x=f(y')$ и $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y'=\psi(t)\end{cases}$. В первом случае $y=\int f(x)dx+C$ – общее решение. В третьем решается как в примере 10. Во втором случае решается как в примере 11.

Тип 11 Уравнение, содержащее только производную: $F(y')=0$

Тогда замена $y'=k$ приводит это уравнение к алгебраическому: $F(k)=0$. Пусть k – его корень, т.е. $y'=k$ – число, $y=kx+C$, $k=\dfrac{y-C}{x}$.

Отсюда $F\left(\dfrac{y-C}{x}\right)=0$ – общий интеграл данного уравнения.

Пример 12 Найти общее решение: $y'-\sin y'=0$.

Подставляя вместо y' значение $\dfrac{y-C}{x}$, получим:

$\dfrac{y-C}{x}=\sin\dfrac{y-C}{x}$ – общий интеграл.

2 Задача Коши

Графики общих решений (общих интегралов) дифференциального уравнения называются интегральными кривыми. Среди них существует единственная кривая, проходящая через заданную точку $M(x_0,y_0)$.

Условие, по которому надо искать такую кривую, называется начальным и записывается в виде $y|_{x=x_0}=y_0$ или $y(x_0)=y_0$.

Задача, в которой находится решение, удовлетворяющее начальному условию, называется Коши.

Пример 13 Решить задачу Коши: $y' = (2y+1)ctgx$, $y|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$.

Сначала для уравнения найдем общее решение. Это уравнение типа I. $\frac{dy}{dx} = (2y+1)ctgx$, $\frac{dy}{2y+1} = ctgxdx$, $\int\frac{dy}{2y+1} = \int ctgxdx$

$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = \ln|\sin x| + \ln C$ – общий интеграл.

Решить задачу Коши означает найти соответствующее значение постоянной **С**. Для этого подставляем в общее решение (общий интеграл) вместо ***x*** и ***y*** их значения, данные в начальном условии.

$\frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sin\frac{\pi}{4} + \ln C$, $\ln C = \frac{1}{2}\ln 2 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln 2$, $C = 2$.

Подставим найденное **С** в общий интеграл:

$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = \ln|\sin x| + \ln 2$, $\ln|2y+1| = 2\left(\ln|\sin x| + \ln 2\right)$, $2y+1 = 4\sin^2 x$.

$y = 2\sin^2 x - \frac{1}{2}$ – решение задачи Коши.

В этом примере мы частное решение получили из общего при некотором значении постоянной **С**. Однако у дифференциальных уравнений могут существовать такие частные решения, которые невозможно получить из его общего решения. Такого рода частные решения называются особыми. В каждой точке особого решения нарушается единственность решения задачи Коши.

Пример 14 Найти особое решение уравнения: $y^2(1+y'^2) = R^2$.

Найдем $y' = \pm\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{y}$ – уравнение типа I.

$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{y}$, $\frac{ydy}{\sqrt{R^2-y^2}} = \pm dx$, $\int\frac{ydy}{\sqrt{R^2-y^2}} = \pm\int dx$, $\pm\sqrt{R^2-y^2} = x - C$,

$R^2 - y^2 = (x-C)^2$, $(x-C)^2 + y^2 = R^2$ – общий интеграл.

Интегральными кривыми будут семейство окружностей радиусом ***R*** и с центром на оси ***OX***.

Функции $y = \pm R$ – являются частными решениями данного уравнения, но эти функции нельзя получить из общего интеграла, поэтому $y = \pm R$ – особые решения.

Легко увидеть, что через любую точку этих кривых проходит одна окружность семейства, т.е. нарушается единственность решения задачи Коши.

3 Дифференциальные уравнения высших порядков

Общий вид $F(x, y, y', \ldots, y^{n}) = 0$ дифференциального уравнения **n**-го порядка.

$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ – общее решение,

$\psi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ – общий интеграл,

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

$y|_{x=x_0} = a_0, y'|_{x=x_0} = a_1, \ldots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = a_n$ – начальное условие,

где $x_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – const.

Тип 12 Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$

Для нахождения общего решения последовательно интегрируют **n** раз.

Пример 15 Найти общее решение уравнения: $y'' = \sin 2x$.

Тогда $y' = \int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C_1$,

$y = \int \left(C_1 - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx = C_1 x - \frac{\sin 2x}{4} + C_2$, – общее решение.

Тип 13 Уравнение вида: $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Введя новую функцию $z(x) = y^{(n-1)}$, $z' = y^{(n)}$, получим $F(x, z, z') = 0$ – уравнение 1-го порядка, которое решается по методу типов 1–11.

Затем, подставляя вместо **z** значение $y^{(n-1)}$, получим тип 12.

Пример 16 Найти общее решение уравнения: $y''' = y''^2$.

Пусть $z(x) = y''$, $z' = y'''$, тогда $z' = z^2$ – I тип.

$\frac{dz}{dx} = z^2$, $\frac{dz}{z^2} = dx$, $-\frac{1}{z} = x + C_1$, $z = \frac{1}{C_1 - x}$,

$y'' = \frac{1}{C_1 - x}$ – XII тип. $y' = \int \frac{dx}{C_1 - x} = -\ln|C_1 - x| + C_2$,

$$y = \int (C_2 - \ln|C_1 - x|) dx = C_2 x - \int \ln|C_1 - x| dx = \left| \begin{matrix} U = \ln|C_1 - x| \\ dv = dx \\ du = \frac{-dx}{C_1 - x} \\ v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= C_2x - x\ln|C_1 - x| - \int\frac{xdx}{C_1 - x} = C_2x - x\ln|C_1 - x| - \int\frac{x - C_1 + C_1dx}{C_1 - x} =$$

$$= C_2x - x\ln|C_1 - x| - \int\left(\frac{C_1}{C_1 - x} - 1\right)dx = C_2x - x\ln|C_1 - x| + C_1\ln|C_1 - x| + x + C_3.$$

$y = x + (C_1 - x)\ln|C_1 - x| + C_2x + C_3$ – общее решение.

Тип 14 Уравнение вида $F\left(y, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$

Полагая, что y – новый аргумент, $z(y) = y^{(n-1)}$ – новая функция, получим $y^{(n)} = z \cdot z'$, то есть $F(y, z, z \cdot z') = 0$ или $\Phi(y, z, z') = 0$ – уравнения 1-го порядка.

Пример 17 Найти общее решение уравнения: $3y'' = y^{-\frac{5}{3}}$.

Пусть $z(y) = y'$, тогда $y'' = z \cdot z'$, $3z \cdot z' = y^{-\frac{5}{3}}$ – тип 1.

$3z\dfrac{dz}{dy} = y^{-\frac{5}{3}}$, $\int 3zdz = \int y^{-\frac{5}{3}}dy$, $\dfrac{3z^2}{2} = -\dfrac{3}{2}y^{-\frac{2}{3}} + \dfrac{3}{2}C_1$, $z^2 = C_1 - y^{-\frac{2}{3}}$.

$z = \pm\sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}$, $y' = \pm\sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}$, $\dfrac{dy}{\sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}} = \pm dx$, $\dfrac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\sqrt{C_1 \cdot y^{\frac{2}{3}} - 1}} = \pm dx$

$$x + C_2 = \pm\int\frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\sqrt{C_1 \cdot y^{\frac{2}{3}} - 1}} = \left|\begin{array}{l} C_1 \cdot y^{\frac{2}{3}} - 1 = t^2 \\ \frac{2}{3}C_1 \cdot y^{-\frac{1}{3}}dy = 2tdt \end{array}\right| = \pm\frac{1}{C_1^2}\int\frac{3t\left(t^2 + 1\right)dt}{t} =$$

$$= \pm\frac{3}{C_1^2}\left(\frac{t^3}{3} + t\right) = \pm\frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1 \cdot y^{\frac{2}{3}} - 1}\left(C_1 \cdot y^{\frac{2}{3}} + 2\right)$$

$x + C_2 = \pm\dfrac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1 \cdot y^{\frac{2}{3}} - 1}\left(C_1 \cdot y^{\frac{2}{3}} + 2\right)$ – общий интеграл.

4 Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$ – неоднородное,

$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ – однородное, где p, q – const.

Для решения однородного уравнения составляется его характеристическое уравнение: $k^2 + p \cdot k + q = 0$, $D = p^2 - 4q$.

1) при **D>0, $k_1 \neq k_2$**, $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$ – общее решение.

2) при $D=0$, $k_1=k_2$, $y=e^{k_1x}(C_1+C_2x)$ – общее решение.

3) при $D<0$, находим $\alpha=-\frac{p}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{-D}}{2}$, $y=e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x)$ – общее решение.

Пример 18 Найти общее решение уравнения: $y''+y'-2y=0$.

Составим характеристическое уравнение: $k^2+k-2=0$, $D=9>0$, $k_1=-2$, $k_2=1$, отсюда $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$ – общее решение.

Пример 19 Найти общее решение уравнения: $4y''+4y'+y=0$.

Составим характеристическое уравнение: $4k^2+4k+1=0$, $D=0$, $k_1=k_2=-\frac{1}{2}$, отсюда $y=e^{-\frac{x}{2}}(C_1+C_2x)$ – общее решение.

Пример 20 Найти общее решение уравнения: $y''+2y'+5y=0$.

Составим характеристическое уравнение: $k^2+2k+5=0$, $D=-16<0$, $\alpha=-1$, $\beta=2$, отсюда $y=e^{-x}(c_1\sin 2x+c_2\cos 2x)$ – общее решение.

Решение неоднородного уравнения образуется из суммы $y=\bar{y}+\tilde{y}$ двух решений $\bar{y}$ и $\tilde{y}$,

где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения,

$\tilde{y}$ – частное решение неоднородного уравнения, которое определяется по виду функции $f(x)$.

1) Пусть $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени **n**.

Тогда $\tilde{y}=e^{\alpha x}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени **n** с неизвестными коэффициентами, которые находим из тождества: $\tilde{y}''+p\tilde{y}'+q\tilde{y}=f(x)$.

Пример 21 Найти общее решение уравнения: $y''-3y'+2y=(x^2+x)e^{3x}$.

Найдем $\bar{y}$: $k^2-3k+2=0$, $D=1>0$, $k_1=1$, $k_2=2$, $\bar{y}=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$.

Ищем $\tilde{y}$ в виде $\tilde{y}=e^{3x}\left(ax^2+bx+c\right)$. Найдем $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ и подставим в уравнение:

$\tilde{y}'=3e^{3x}\left(ax^2+bx+c\right)+e^{3x}\left(2ax+b\right)$,

$\tilde{y}''=9e^{3x}\left(ax^2+bx+c\right)+6e^{3x}\left(2ax+b\right)+e^{3x}2a$.

Тогда $9e^{3x}\left(ax^2+bx+c\right)+6e^{3x}\left(2ax+b\right)+e^{3x}2a-9e^{3x}\left(ax^2+bx+c\right)-$

$-3e^{3x}\left(2ax+b\right)+2e^{3x}\left(ax^2+bx+c\right)=\left(x^2+x\right)e^{3x}$ – является тождеством.

Отсюда $3(2ax+b)+2a+2\left(ax^2+bx+c\right)=x^2+x$.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 : 2a = 1 \\ x : 6a + 2b = 1 \\ x^0 : 3b + 2a + 2c = 0 \end{array}\right| .$$

Решая систему, получим $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = 1$.

$\tilde{y} = e^{3x}\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)$ – частное решение,

$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{3x}\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)$ – общее решение.

2) Пусть $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\sin\beta x + Q_m(x)\cos\beta x\right)$.

Тогда $\tilde{y} = e^{\alpha x}\left(A_k(x)\sin\beta x + B_k(x)\cos\beta x\right)$, где $A_k(x)$, $B_k(x)$ – многочлены степени $k = \max\{n, m\}$ с неизвестными коэффициентами.

Для их определения поступаем как в предыдущем случае.

Пример 22 Найти общее решение уравнения: $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$.

Найдем $\bar{y}$: $k^2 + 6k + 9 = 0$, $D = 0$, $k_1 = k_2 = -3$, $\bar{y} = e^{-3x}(C_1 + C_2x)$.

Ищем $\tilde{y} = A\sin x + B\cos x$, где A, B – неизвестные числа.

$\tilde{y}' = A\cos x - B\sin x$, $\tilde{y}'' = -A\sin x - B\cos x$.

Подставим в данное уравнение и получим тождество:

$-A\sin x - B\cos x + 6A\cos x - 6B\sin x + 9A\sin x + 9B\cos x = 10\sin x$

или $(8A - 6B)\sin x + (8B + 6A)\cos x = 10\sin x$.

Отсюда $\begin{cases} 8A - 6B = 10 \\ 8B + 6A = 0 \end{cases}$. Решим систему.

$B = -\frac{3}{4}A$, $8A + \frac{9}{2}A = 10$, $A = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$, $B = -\frac{3}{5}$.

$\tilde{y} = \frac{4}{5}\sin x - \frac{3}{5}\cos x$ – частное решение.

Замечание

Если в первом случае число α является корнем характеристического уравнения, а во втором числа α и β совпадают с аналогичными числами случая $D < 0$, то частные решения надо умножить на x.

Пример 23 Найти общее решение уравнения: $y'' + y = \sin x$.

Найдем $\bar{y}$: $k^2 + 1 = 0$, $D < 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\bar{y} = C_1\sin x + C_2\cos x$.

Ищем $\tilde{y}$: $\tilde{y} = A\sin x + B\cos x$, A, B – неизвестные числа, но $f(x) = \sin x = e^{0x}(1\cdot\sin 1\cdot x + 0\cdot\cos 1\cdot x)$, т.е. $\alpha = 0$, $\beta = 1$ совпадают, поэтому

$\bar{y} = (A\sin x + B\cos x)x$.

Найдем $\bar{y}' = A\sin x + B\cos x + (A\cos x - B\sin x)x$,

$\bar{y}'' = 2(A\cos x - B\sin x) - (A\sin x + B\cos x)x$ и подставим в уравнение:

$2(A\cos x - B\sin x) - (A\sin x + B\cos x)x + (A\sin x + B\cos x)x = \sin x$,

$2(A\cos x - B\sin x) = \sin x$, $A=0$, $B = -\dfrac{1}{2}$,

$\bar{y} = -\dfrac{x}{2}\cos x$ – частное решение,

$y = C_1\sin x + C_2\cos x - \dfrac{x}{2}\cos x$ – общее решение.

Если $f(x)$ не подходит к приведенным двум случаям, то ее представляют в виде суммы нескольких функций, подходящих к этим случаям. Затем находят частное решение для каждой слагаемой в отдельности. Тогда сумма всех таких отдельных частных решений будет искомым частным решением.

Пример 24 Найти общее решение уравнения: $y'' - y' - 2y = x + e^x$.

Найдем $\bar{y}$: $k^2 - k - 2 = 0$, $D = 9 > 0$, $k_1 = -1$, $k_2 = 2$, $\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$.

Здесь $f(x) = x + e^x$ не подходит к одному случаю, поэтому $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$. Ищем $\bar{y}_1$: $\bar{y}_1 = ax + b$, $\bar{y}_1' = a$, $\bar{y}_1'' = 0$, $0 - a - 2(ax + b) = x$, отсюда $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{4}$, $\bar{y}_1 = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$.

Ищем $\bar{y}_2$: $\bar{y}_2 = Ae^x$, $\bar{y}_2' = Ae^x$, $\bar{y}_2'' = Ae^x$, $Ae^x - Ae^x - 2Ae^x = e^x$, $A = -\dfrac{1}{2}$,

$\bar{y}_2 = -\dfrac{1}{2}e^x$. Тогда $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}e^x$, $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \dfrac{x + e^x}{2} + \dfrac{1}{4}$ – общее решение.

Если частное решение нельзя искать методом подбора, то применяют метод вариации.

В этом методе, имея $\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ вместо постоянных C_1 и C_2, подставляют неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, и ищут общее решение в виде $y = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2$. Неизвестные функции определяются из системы: $\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$.

Пример 25 Найти общее решение уравнения: $y'' + 4y = 8ctg2x$.

Найдем $\bar{y}$: $k^2 + 4 = 0$, $D = -16 < 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$.

$\bar{y} = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$, поэтому

$y = C_1(x)\sin 2x + C_2(x)\cos 2x$ – вид общего решения.

Для определения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составим систему:

$$\begin{cases} C_1' \sin 2x + C_2' \cos 2x = 0 \\ C_1' 2\cos 2x - C_2' 2\sin 2x = 8ctg2x \end{cases}$$

Решим эту систему. $C_2' = -C_1' tg2x$, $C_1' \cos 2x + C_1' \dfrac{\sin^2 2x}{\cos 2x} = 4ctg2x$,

$C_1' = \dfrac{4\cos^2 2x}{\sin 2x}$, $C_2' = -4\cos 2x$.

Тогда $C_2(x) = -4\int \cos 2x dx = -2\sin 2x + C_2$, C_2 – const.

$$C_1(x) = 4\int \frac{\cos^2 2x}{\sin 2x} dx = 4\int \frac{1-\sin^2 2x}{\sin 2x} dx = 4\int\left(\frac{1}{\sin 2x} - \sin 2x\right)dx =$$

$$= 2\cos 2x + 2\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = 2\cos 2x + 2\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} dx =$$

$$= 2\cos 2x + 2\int (tgx + ctgx) dx = 2\cos 2x + 2\left(-\ln|\cos x| + \ln|\sin x|\right) + C_1.$$

$C_1(x) = 2\cos 2x + 2\ln|tgx| + C_1$, C_1 – const.

Отсюда $y = (2\cos 2x + 2\ln|tgx| + C_1)\sin 2x + (C_2 - 2\sin 2x)\cos 2x$,

$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + 2\sin 2x \cdot \ln|tgx|$ – общее решение.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами более высоких порядков решаются аналогично.

5 Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим однородную систему: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$,

где **x**, **y** – неизвестные функции; **t** – аргумент; **a**, **b**, **c**, **d** – const.

Существует несколько методов решения системы.

1) Метод исключения.

Этот метод приводит систему к уравнению второго порядка. Для этого из первого уравнения находят **y** или из второго – **x**, затем находят производную этой переменной и исключают ее из системы.

Пример 26 Решить систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$.

Найдем из второго $x = y' - 3y$, $x' = y'' - 3y'$ и подставим эти значения в первое уравнение:

$y'' - 3y' = 2(y' - 3y) + 2y$, $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Решим это уравнение. Составим характеристическое уравнение.

$k^2 - 5k + 4 = 0$, $D = 9$, $k_1 = 1$, $k_2 = 4$, $y = C_1e^t + C_2e^{4t}$.

Теперь найдем $x = y' - 3y = C_1e^t + 4C_2e^{4t} - 3C_1e^t - 3C_2e^{4t}$,

$$\left.\begin{array}{l} x = -2C_1e^t + C_2e^{4t} \\ y = C_1e^t + C_2e^{4t} \end{array}\right\}$$ – общее решение системы.

2) Метод Даламбера.

Умножаем одно уравнение на число **k** и прибавляем другое уравнение. имеем: $\frac{dx}{dt} + k\frac{dy}{dt} = ax + by + k(cx + dy)$, $\frac{d(x+ky)}{dt} = (a + kc)x + (b + kd)y$.

Число **k** подбирается так, чтобы $k = \frac{b + kd}{a + kc}$.

Метод Даламбера удобно применять, когда это уравнение имеет два разных действительных корня, то есть при $D > 0$.

Пусть $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$ – корни. Тогда замены $U = x + k_1y$ и $V = x + k_2y$ позволяют найти U, V из уравнений $U' = (a + k_1c)U$, $V' = (a + k_2c)V$.

Отсюда решая алгебраическую систему: $\begin{cases} x + k_1y = U \\ x + k_2y = V \end{cases}$ найдем **x**, **y**.

Пример 27 Решить систему примера 26 методом Даламбера.

Умножим второе уравнение на **k** и прибавим к первому.

$\frac{d(x + ky)}{dt} = (2 + k)x + (2 + 3k)y$.

Решим уравнение $k = \frac{2 + 3k}{2 + k}$, $k^2 - k - 2 = 0$, $\partial = 0$, $k_1 = -1$, $k_2 = 2$.

Пусть $U = x - y$, $V = x + 2y$.

Найдем U: $U' = U$, $U = C_1e^t$. Найдем V: $V' = 4V$, $V = C_2e^{4t}$.

Осталось решить систему: $\begin{cases} x - y = C_1e^t \\ x + 2y = C_2e^{4t} \end{cases}$

$3y = -C_1e^t + C_2e^{4t}$, $y = -\frac{C_1}{3}e^t + \frac{C_2}{3}e^{4t}$,

$3x = 2C_1e^t + C_2e^{4t}$, $x = \frac{2C_1}{3}e^t + \frac{C_2}{3}e^{4t}$.

Пользуясь произвольностью постоянных C_1, C_2, заменим их на $3C_1$ и $3C_2$ соответственно. Тогда $\begin{cases} x = -2C_1e^t + C_2e^{4t} \\ y = C_1e^t + C_2e^{4t} \end{cases}$ – общее решение.

3) Метод характеристического уравнения.

Для данной системы уравнение вида:

$\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix} = 0$ – называется характеристическим.

Методами из 4 с помощью корней характеристического уравнения определяется значение одной из неизвестных, а другая определяется из системы.

Пример 28 Решить систему примера 26 этим методом.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$.

Приведем его к стандартному виду и решим.

$(2-k)(3-k)-2=0$, $k^2-5k+4=0$, $D>0$, $k_1=1$, $k_2=4$. Найдем с помощью этих корней неизвестную y: $y = C_1e^t + C_2e^{4t}$.

Подставляя это значение во второе уравнение системы, найдем x: $x = y' - 3y = -2C_1e^t + C_2e^{4t}$.

Отсюда $\begin{cases} x = -2C_1e^t + C_2e^{4t} \\ y = C_1e^t + C_2e^{4t} \end{cases}$ – общее решение.

6 Решение задач с помощью дифференциальных уравнений

К дифференциальным уравнениям сводятся многие задачи, как самой математики, так и некоторых других наук, например, механики и физики.

Рассмотрим несколько задач.

Пример 29 Найти кривую, проходящую через точку (1; 1), чтобы угловой коэффициент касательной к кривой в любой точке был пропорционален квадрату ординаты этой точки.

Решение. По условию $y' = ky^2$, где k – коэффициент пропорциональности. Это уравнение типа I. Тогда $\frac{dy}{dx} = ky^2$, $\frac{dy}{y^2} = kdx$, $\int\frac{dy}{y^2} = \int kdx$

$-\frac{1}{y} = kx + C$. Подставляя начальное условие $y|_{x=1} = 1$, получим $-1 = k + C$, $C = -1-k$.

Отсюда $-\frac{1}{y} = kx - 1 - k$ или $y = \frac{1}{k+1-kx}$ – уравнение искомой кривой.

Ее графиком будет гипербола с асимптотами $y = 0$ и $x = \frac{k+1}{k}$.

Пример 30 По закону Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурами тела и среды. Если температура среды равна 20° и тело в течение 20 минут охлаждается со 100° до 60°, то, через какое время его температура понизится до 30°?

Решение. Пусть **T** - время. По условию $T' = K(T-20)$,

где k – коэффициент пропорциональности.

Это уравнение типа I. Тогда $\frac{dT}{dt} = K(T-20)$, $\frac{dT}{T-20} = kdt$,

$\int \frac{dT}{T-20} = k\int dt$, $\ln|T-20| = kt + \ln C$, $T - 20 = Ce^{kt}$. При $t = 0$, $T = 100$; при $t = 20$, $T = 60$.

Из этих условий найдем C и k: $100 - 20 = Ce^0$, $C = 80$. $T - 20 = 80e^{kt}$.

$$60 - 20 = 80e^{20k}, \quad e^{20k} = \frac{1}{2}, \quad 20k = \ln\frac{1}{2}, \quad k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{20}.$$

Следовательно $T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. Полагая $T = 30$, получим

$$30 = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad \frac{t}{20} = 3, \quad t = 60 \text{ минут.}$$

Пример 31 Последовательно включены: источник тока, напряжение которого меняется по закону: $E = V\sin\omega t$, сопротивление **R** и емкость **C**.

Найти силу тока в цепи при установившемся режиме. (Установившимся режимом называется такой, при котором сила тока постоянна или меняется периодически).

Решение. **RI** – падение напряжения на сопротивлении **R**. $\frac{q}{C}$ – падение напряжения на емкости **C**, где **q** – заряд конденсатора. Следовательно $RI + \frac{q}{C} = V\sin\omega t$.

Продифференцируем это, получим: $R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\cdot\frac{dq}{dt} = V\omega\cos\omega t$, так как $\frac{dq}{dt} = I$, то $R\cdot I' + \frac{1}{C}I = V\omega\cdot\cos\omega t$ – уравнение типа I.

Найдем $\bar{I}$: $Rk + \frac{1}{C} = 0$, $k = -\frac{1}{RC}$, $\bar{I} = Pe^{-\frac{t}{RC}}$, P – const.

Ищем I: $\bar{I} = \bar{A}\cos\omega t + \bar{B}\sin\omega t = A\sin(\omega t - \varphi)$, где A – амплитуда, φ – фаза, $I' = \omega A\cos(\omega t - \varphi)$. Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$, получим систему:

$$\begin{cases} RA\omega \cdot \sin\varphi + \dfrac{A}{C}\cos\varphi = 0 \\ RA\omega \cdot \cos\varphi - \dfrac{A}{C}\sin\varphi = V\omega \end{cases}$$

Отсюда найдем $tg\,\varphi = -\dfrac{1}{RC\omega}$, $A = \dfrac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}}$, так как $\bar{I} = Pe^{-\frac{t}{RC}} \to 0$ при $t \to +\infty$, то $I(t) = \dfrac{V\sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}}$ – сила тока при установившемся режиме.

Глава 12
Ряды

1 Числовые ряды

Для числового ряда:

$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$ – необходимое условие сходимости.

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – сумма ряда, где $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ – частичная сумма.

Для знакоположительного ряда:

Признак сравнения I.

Если $U_n \geq V_n$, начиная с некоторого номера, то из сходимости левого ряда следует сходимость правого ряда, а из расходимости правого ряда следует расходимость левого ряда.

Признак сравнения II.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = q$, $(0 < q < \infty)$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = q$, то при $q < 1$ – ряд сходится, при $q > 1$ – ряд расходится, при $q = 1$ – неизвестно.

Признак Коши.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = q$, то же самое.

Интегральный признак Коши.

Данный ряд и несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} U_n dn$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 1 Исследовать на сходимость ряд: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$.

Решение. $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots$

$\ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 .$$

Значит, ряд сходится и его сумма равна 1.

Пример 2 Исследовать на сходимость ряд: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$.

Решение. Применим признак сравнения II.

Для сравнения возьмем ряд из примера 1.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Следовательно, ряд сходится, но его сумма не определена.

Пример 3 Исследовать на сходимость ряд: $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$.

Решение. Применим признак Даламбера.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \cdot$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 4 Исследовать на сходимость ряд:

$$2 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \left(\frac{4}{3}\right)^9 + \ldots + \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} .$$

Решение. Применим признак Коши.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1 .$$

Следовательно, ряд расходится.

Пример 5 Исследовать на сходимость гармонический ряд: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$.

Решение. Применим интегральный признак Коши. Исследуем несобственный интеграл: $\int_1^{\infty} \frac{1}{n} dn$.

$$\Phi(t) = \int_1^t \frac{1}{n}\,dn = \ln|n|\Big|_1^t = \ln|t| - \ln 1 = \ln|t|, \quad \lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \lim_{t\to\infty} \ln|t| = \infty .$$

Следовательно, интеграл расходится, поэтому ряд также расходится.

Пример 6 Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{An^k}$, где **A**, **k** – const.

Решение. Этот предел относится к неопределенности ∞^0.

Применим метод гл.4, 1, стр. 25.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{An^k} = \lim_{n\to\infty}\left(An^k\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln|An^k|}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln|A|+k\ln|n|}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n}} = e^0 = 1$$

К последнему пределу применили правило Лопиталя.

Этот предел часто применяется при исследовании ряда по признаку Коши.

Пример 7 Исследовать на сходимость ряд:

$$2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{n+1}{n} + \ldots .$$

Решение. Проверим необходимое условие сходимости.

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \neq 0 .$$

Условие не выполнено, следовательно, ряд расходится.

Для исследования знакочередующегося ряда:

$$U_1 - U_2 + U_3 - \ldots + (-1)^{n+1}U_n + \ldots \qquad (1)$$

Признак Лейбница.

Если для знакочередующегося ряда выполнены условия:

1) $U_n > U_{n+1}$, с некоторого номера,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$.

то ряд сходится, но если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то ряд расходится.

Пример 8 Исследовать на сходимость ряд:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1} + \ldots .$$

Решение. Применим признак Лейбница.

$$U_n = \frac{1}{n+1}, \; U_{n+1} = \frac{1}{n+2},$$

1) $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2}$ – верно всегда,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ – верно, следовательно, ряд сходится.

Для знакочередующегося ряда составим соответствующий знакоположительный ряд.

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots \qquad (2)$$

Если ряд (1) сходится и ряд (2) сходится, то сходимость ряда (1) называется абсолютной.

Если ряд (2) расходится, то сходимость ряда (1) называется условной.

Пример 9 Исследовать ряд: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n} + \ldots$

Решение. Применим признак Лейбница.

$U_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}$, $U_{n+1} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$.

1) $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n} > \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$ – верно всегда.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n} = 0$ – верно, следовательно, ряд сходится.

Теперь уточним тип сходимости. Составим знакоположительный ряд $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n} + \ldots$

Исследуем его по признаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится, поэтому по определению сходимость данного ряда абсолютная.

Пример 10 Исследовать ряд: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$.

Решение. Применим признак Лейбница. $U_n = \frac{1}{n}$. $U_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

1) $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ – верно всегда,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ – верно, следовательно, ряд сходится.

Составим знакоположительный ряд:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ - это ряд гармонический, который расходится (пример 5), поэтому сходимость данного ряда условная.

2 Степенные ряды

Для степенного ряда: $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$.

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ – радиус сходимости,

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ – радиус сходимости, $(-R,R)$ – интервал сходимости.

Пример 11 Определить интервал сходимости ряда:

$\frac{2x}{1}-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n}+\ldots$

Решение. Найдем $a_n=(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}$, $a_{n+1}=(-1)^n\frac{2^{n+1}}{n+1}$.

Тогда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$, $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ – интервал сходимости.

Исследуем на сходимость границы этого интервала.

$x=-\frac{1}{2}$, подставляя в ряд, получим:

$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots$ – расходится, так как это гармонический ряд со знаком минус.

$x=\frac{1}{2}$, подставляя в ряд, получим:

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$ – сходится (пример 10), поэтому $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ – интервал сходимости.

Степенной ряд вида $a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$ заменой $x-a=y$ приводится к основному виду:

$a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_ny^n+\ldots$

Определяется для него интервал сходимости $(-R;R)$. Тогда данный ряд имеет интервал сходимости $(a-R,\ a+R)$.

Для функции $f(x)$, имеющей в точке $x=a$ производную любого порядка, составляется ряд Тейлора:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots,$$

при $a=0$ получается ряд Маклорена:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots,$$

которые являются степенными рядами.

Для разложения функций в степенной ряд на практике используются не ряды Тейлора и Маклорена, а следующие разложения:

1) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$; $(-\infty,+\infty)$ – интервал сходимости.

2) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$; $(-\infty,+\infty)$ – интервал сходимости.

3) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$; $(-\infty,+\infty)$ – интервал сходимости.

4) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$; $(-1,1]$ – интервал сходимости.

5) $(1+x)^a=1+\frac{a}{1}\cdot x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n+\ldots$; $(-1,1)$ – интервал сходимости, a – не натуральное число.

Пример 12 Разложить в степенной ряд функцию $\sin^2 x$.

Решение. Представим эту функцию через косинус и применим формулу (2).

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+x^2-\frac{1}{3}x^4+\ldots=x^2-\frac{1}{3}x^4+\ldots$$

Пример 13 Разложить в степенной ряд функцию $\ln(5+x)$.

Решение. Приведем эту функцию к виду формулы (4):

$$\ln(5+x)=\ln 5\left(1+\frac{x}{5}\right)=\ln 5+\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)=\ln 5+\frac{x}{5}-\frac{\left(\frac{x}{5}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{x}{5}\right)^3}{3}-\ldots=$$

$$=\ln 5+\frac{x}{5}-\frac{x^2}{2\cdot 5^2}+\frac{x^3}{3\cdot 5^3}-\ldots$$

Пример 14 Разложить в степенной ряд функцию $\frac{x-1}{x+2}$.

Решение. Приведем эту функцию к виду формулы (5).

$$\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{3}{x+2}=1-\frac{3}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}=1-\frac{3}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}=$$

$$=1-\frac{3}{2}\left[1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+\dots\right]=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}x-\frac{3}{2^3}x^2+\frac{3}{2^4}x^3+\dots$$

3 Применения степенных рядов

3.1 Приближенное вычисление натурального корня

Вычислить $\sqrt[n]{N}$ с точностью ε. $\sqrt[n]{N}=\sqrt[n]{a^n+b}=a\left(1+\frac{b}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Число **а** подбирается так, чтобы $b \ll a^n$.

Применяя формулу (5) разложим в числовой ряд:

$$a\left(1+\frac{b}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}}=a+\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{2^n}+\dots$$

Если получается знакочередующийся ряд, то берем только первые члены больше точности ε, а все члены меньше точности ε отбрасываем.

Если ряд знакоположительный, то отбрасываем такой его остаток, который имеет сумму меньше точности ε.

Пример 15 Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}001$: $\sqrt[5]{34}$.

$$\sqrt[5]{34}=\sqrt[5]{32+2}=2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}}=$$

$$=2\left[1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^3+\dots\right]=$$

$$=2+\frac{1}{40}-\frac{1}{1600}+\frac{3}{5^3\cdot 4^5}-\dots\approx 2+\frac{1}{40}=2{,}025,$$

так как $\frac{1}{1600}<\varepsilon$, то весь остаток имеет сумму меньше $\frac{1}{1600}$.

3.2 Приближенное вычисление синуса и косинуса

Вначале переводим аргумент в радианы. Затем по формуле приведения, и используя связь между косинусом и синусом, аргумент сводим к величине $< \frac{\pi}{4} < 1$ и используем формулу (1) или (2).

Пример 16 Вычислить $\sin 70°$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

$\sin 70° = \cos 20° = \cos\frac{20\pi}{180} = \cos\frac{\pi}{9} = \cos\frac{3.14}{9} = \cos 0.349$.

Теперь применяем формулу (2).

$\cos 0{,}349 = 1 - \frac{0{,}349^2}{2!} + \frac{0{,}349^4}{4!} - \ldots = 1 - 0{,}0609 + 0.0006 - \ldots = 0.940$.

Остальные слагаемые не включаем, так как их сумма меньше точности ε.

3.3 Приближенное вычисление натурального логарифма

Вычислить $\ln N$ с точностью ε. Из формулы (4) получаем разложение: $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$.

Тогда при $\frac{1+x}{1-x} = N$, получим $x = \frac{N-1}{N+1} < 1$.

При больших N сходимость ряда будет медленной. В этом случае $N = e^n \cdot b$. Тогда $\ln N = \ln e^n \cdot b = n + \ln b$, $b = \frac{N}{e^n} < e$, $x = \frac{b-1}{b+1}$.

Пример 17 Вычислить $\ln 40$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Решение. Так как $e^4 = 54{,}74$, $b = \frac{40}{54{,}74} = 0.73$,

тогда $\ln 40 = \ln e^4 \cdot 0{,}73 = 4 + \ln 0{,}73 = 4 + \ln(1 - 0.27)$.

К логарифму применяем формулу (4):

$\ln(1 - 0.27) = -0.27 - \frac{0.27^2}{2} - \frac{0.27^3}{3} - \ldots =$

$= -0.27 - 0.0364 - 0{,}0065 - 0.0013 = -0{,}314$.

Сумма остатка меньше суммы убывающей геометрической прогрессии с первым членом $0{,}27^5$ и знаменателем 0,27.

Эта сумма равна: $\frac{1}{5}\cdot\frac{0{,}27^5}{1-0{,}27} = \frac{0.27^4}{4 \cdot 0{,}73} = 0.00049 < 0.001$, отсюда $\ln 40 = 4 - 0.314 = 3.686$.

3.4 Приближенное вычисление определенного интеграла

Мы знаем три способа (гл.7) приближенного вычисления определенного интеграла. В новом способе подынтегральную функцию разлагают в степенной ряд. Количество членов как в предыдущих задачах подбирают по заданной точности.

Пример 18 Вычислить $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ с точностью 0,01.

Решение. По формуле (3) разложим $e^{\sqrt{x}}$ в степенной ряд

$$e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2!} + \frac{x\sqrt{x}}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^2\sqrt{x}}{5!} + \ldots,$$

тогда $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx = \left(x + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{15} + \frac{x^3}{72} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{420} + \right)\Bigg|_0^1 =$

$$= 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{72} + \left(\frac{1}{420} + \ldots\right) = 2.00.$$

Сумму остатка (в скобках) вычисляем как в примере 17. Эта сумма меньше точности.

3.5 Приближенное решение дифференциального уравнения

Пусть дана задача Коши $F(x, y, y') = 0$, $y|_{x=a} = b$, тогда решение ищем в виде степенного ряда: $y = b + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$.

Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots$ определяем поэтапно, используя данное дифференциальное уравнение.

Пример 19 Решить приближенно уравнение: $y' = x^2 + y^2$, $y|_{x=0} = 1$.

Решение. Запишем степенной ряд: $y = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots$,

$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots$, тогда $y'(0) = a_1$ и $y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1$, отсюда $a_1 = 1$.

Найдем $y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \ldots$, $y''(0) = 2a_2$.

$y'' = 2x + 2y \cdot y'$, $y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$, отсюда $2a_2 = 2$, $a_2 = 1$.

Найдем $y''' = 6a_3 + 12a_4x + \ldots$, $y'''(0) = 6a_3$.

$y''' = 2 + 2y'y' + 2y \cdot y''$, $y'''(0) = 2 + 2 + 4 = 8$, отсюда $6a_3 = 8$, $a_3 = \frac{4}{3}$ и т.д.

Тогда $y = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \ldots$ – приближенное решение.

Дифференциальные уравнения высших порядков приближенно решаются аналогично.

4 Ряды Фурье

В ряде Фурье $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ – функции f(x) с периодом 2π, коэффициенты a_0, a_n, b_n определяются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Для четной функции $b_n=0$, для нечетной функции $a_0=a_n=0$.

Пример 20 Найдем ряд Фурье функции: $f(x)=x$.

Решение. Функция **x** – нечетная, поэтому $a_0=a_n=0$.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin xdx=\begin{vmatrix} U=x \\ dv=\sin xdx \\ du=dx \\ V=-\frac{\cos nx}{n}\end{vmatrix}=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi\cdot\cos n\pi}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=-\frac{2\cos n\pi}{n}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n},\ \text{т.к. } \cos n\pi=(-1)^n.$$

Значит $x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$.

Пример 21 Найти ряд Фурье функции $f(x)=x^2$.

Решение. Функция x^2 – четная, поэтому $b_n=0$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nxdx=\begin{vmatrix} U=x^2 \\ dv=\cos nxdx \\ du=2x \\ V=-\frac{\sin nx}{n}\end{vmatrix}=\frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin xdx\right]=$$

$$=-\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nxdx=\begin{vmatrix} \textit{этот интеграл} \\ \textit{из примера 20}\end{vmatrix}=-\frac{2}{n}\cdot\frac{2(-1)^{n+1}}{n}=\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Значит $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$. Полагая в этом равенстве $x=\pi$, получим: $\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\pi}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Полагая $x=0$, получим: $0=\frac{\pi^2}{3}+4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

Складывая эти ряды, получим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

Для функции f(x) с периодом $2l$ ряд Фурье и его коэффициенты определяются аналогично:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$, $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$.

Пример 22 Найти ряд Фурье функции $f(x)=|x|$ с периодом $2l$.

Решение. Так как $|x|$ – четная, то $b_n=0$.

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}|x|dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}xdx=\frac{2}{l}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^l=l,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\begin{vmatrix}U=x\\ du=dx\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{l}dx\\ V=\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{l}\left[x\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l-\frac{l}{n\pi}\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]=\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l=$$

$$=\frac{2l}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0.\ при\ n-четном.\\ -\frac{4l}{n^2\pi^2}.\ при\ n-нечетном\end{cases}$$

Значит $|x|=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2}$.

Полагая в этом равенстве $x=0$, получим:

$0=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

Этот результат мы получали и в примере 21.

Индивидуальные домашние задания 4

ИДЗ 4.1

Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой:

1 $\int_{2}^{3} y\ln(y-1)dy$ 2 $\int_{-2}^{0} x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$ 3 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

4 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ 5 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos 2x dx$ 6 $\int_{1}^{2} (y-1)\ln y dy$

7 $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} xe^{-2x}dx$ 8 $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x dx$ 9 $\int_{-\frac{1}{3}}^{-\frac{2}{3}} \frac{x}{e^{3x}}dx$

10 $\int_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$ 11 $\int_{1}^{e^2} \sqrt{x}\ln x dx$ 12 $\int_{0}^{1} arctg\sqrt{x}dx$

13 $\int_{0}^{\pi} (x+2)\frac{\cos x}{2}dx$ 14 $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} x^2\sin 4x dx$ 15 $\int_{1}^{2} y^2\ln y dy$

16 $\int_{1}^{2} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$ 17 $\int_{\frac{3}{2}}^{2} arctg(2x-3)dx$ 18 $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (x+3)\sin x dx$

19 $\int_{1}^{e} x\ln^2 x dx$ 20 $\int_{-3}^{0} (x-2)e^{-\frac{x}{3}}dx$ Примеры 4,5 Глава 7.

ИДЗ 4.2

1 $\int_{0}^{1} x^2\sqrt{x-x^2}dx$ 2 $\int_{\sqrt{2}}^{1} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$ 3 $\int_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$

4 $\int_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}dx$ 5 $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$ 6 $\int_{0}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}dx$

7 $\int_{0}^{\sqrt{3}} x^2\sqrt{9-x^2}dx$ 8 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$ 9 $\int_{0}^{1} \sqrt{(1-x^2)^3}dx$

10 $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$ 11 $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ 12 $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{dx}{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}$

13 $\int_{1}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx$ 14 $\int_{0}^{1}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$ 15 $\int_{2\sqrt{3}}^{6}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

16 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ 17 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$ 18 $\int_{0}^{3}\frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$

19 $\int_{2}^{4}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$ 20 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ Примеры 8, 9 Глава 7.

ИДЗ 4.3

1 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{2x^2+3x+3}$ 2 $\int_{-2}^{6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$ 3 $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4x-21}$

4 $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{x^2dx}{13+6x^3+x^6}$ 5 $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2+x}$ 6 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{4x^2+4x+5}$

7 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$ 8 $\int_{1}^{2}\frac{dt}{t^2+5t+4}$ 9 $\int_{0}^{2}\frac{xdx}{x^2+3x+2}$

10 $\int_{1}^{2}\frac{(x-5)dx}{x^2-2x+2}$ 11 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+5}$ 12 $\int_{1}^{3}\frac{dx}{x^2+2x}$

13 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{x+x^2}$ 14 $\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{(2x-8)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$ 15 $\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

16 $\int_{1}^{2}\frac{dx}{3x^2-x+1}$ 17 $\int_{3}^{4}\frac{x^2dx}{x^2-6x+10}$ 18 $\int_{3,5}^{4}\frac{xdx}{x^2-7x+13}$

19 $\int_{2}^{3}\frac{(3x-2)dx}{x^2-4x+5}$ 20 $\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\frac{(x-1)^2dx}{x^2+3x+4}$ Примеры 1, 3 Глава 7.

ИДЗ 4.4

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

1 $\int_{0}^{\infty}\frac{xdx}{16x^4+1}$ 2 $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$ 3 $\int_{1}^{\infty}\frac{16xdx}{16x^4-1}$

4 $\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$ 5 $\int_{0}^{\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$ 6 $\int_{0}^{1}\frac{e^{3+1/x}}{x^2}\,dx$

7 $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}$ 8 $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$ 9 $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$

10 $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$ 11 $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$ 12 $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{dx}{20x^2-9x+1}$

13 $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt[3]{(16+x^2)^5}}$ 14 $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln 2dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$ 15 $\int\limits_{4}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$

16 $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx$ 17 $\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$ 18 $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{xdx}{1-x^4}$

19 $\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{xdx}{x^2+4x+5}$ 20 $\int\limits_{0}^{1}\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$ Примеры 11–14 Глава 7.

ИДЗ 4.5

Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

1 $\rho=3\sqrt{\cos 2\varphi}$
2 $y=x^2$, $y=3-x$
3 $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$
4 $x=7\cos^3 t$, $y=7\sin^3 t$
5 $\rho=4\cos 3\varphi$
6 $\rho=3\cos 2\varphi$
7 $\rho=2(1-\cos\varphi)$
8 $\rho^2=2\sin 2\varphi$
9 $x=4(t-\sin t)$, $y=4(1-\cos t)$
10 $\rho=2(1+\cos\varphi)$
11 $\rho=2\sin 3\varphi$
12 $\rho=2+\cos\varphi$
13 $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{x^2}{2}$
14 $y^2=x+1$, $y^2=9-x$
15 $y^2=x^3$, $x=0$, $y=4$
16 $\rho=4\sin^2\varphi$
17 $x=3\cos t$, $y=2\sin t$
18 $y^2=9x$, $y=3x$
19 $x=3(\cos t+t\sin t)$, $y=3(\sin t-t\cos t)$, $y=0$ $(0\le t\le\pi)$
20 $y^2=4x$, $x^2=4y$
Примеры 1–9 Глава 8.

ИДЗ 4.6

Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) длину дуги данной линии:

1 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{9^2}$

2 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$

3 $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ $\left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$

4 $\rho = 2\sin^3 \frac{\varphi}{3}$ $\left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$

5 $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$

6 $\rho = 6\cos^3 \frac{\varphi}{3}$ $\left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$

7 $y^2 = (x-1)^3$ от точки А $(1,0)$ до точки В $\left(6, \sqrt{125}\right)$

8 $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = 5$

9 $\rho = 6\cos\varphi$

10 $\rho = 3(1 - \cos\varphi)$

11 $\rho = 2\cos^3 \frac{\varphi}{3}$

12 $9y^2 = 4(3-x)^3$ между точками пересечения с осью Оу

13 $\rho = 3\sin\varphi$

14 $y = \ln\sin x$ $\left(\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

15 $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$

16 $y^2 = (x-1)^3$ от точки А $(2,1)$ до точки В $(5,8)$

17 $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ $(0 \le x \le 2)$

18 $\rho = 5\sin\varphi$

19 $\rho = 4\cos\varphi$

20 $y^2 = x^3$ от точки А $(0,0)$ до точки В $(4,8)$

Примеры 10–12 Глава 8.

ИДЗ 4.7

Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) объем тела, полученного вращением фигуры Ф вокруг указанной оси координат:

1 Ф: $y^2 = 4 - x$, $x = 0$, Oy

2 Ф: $x = 6(t - \sin t)$, $y = 6(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$, Ox

3 Ф: $x = 3\cos^2 t$, $y = 4\sin^2 t$ $(0 \le t \le \pi/2)$, Oy

4 Ф: $y^2 = x$, $x^2 = y$, Ox

5 Ф: $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$, Ox

6 Ф: $x = 2\cos t$, $y = 5\sin t$, Oy

7 Ф: $y = x^3$, $8x = y^2$, Oy

8 Ф: $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, Ox

9 Ф: $y^2 = 4x/3$, $x = 3$, Ox

10 Ф: $y = 2x - x^2$, $y = 0$, Ox

11 Ф: $x = 7\cos^3 t$, $y = 7\sin^3 t$, Oy

12 Ф: $xy = 4$, $2x + y - 6 = 0$, Ox

13 Ф: $x = \sqrt{3}\cos t$, $y = 2\sin t$, Oy

14 Ф: $y = 2 - x^2$, $y = x^2$, Ox

15 Ф: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, Ox

16 Ф: $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$, Ox

17 Ф: $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$ $(0 \le t \le 1)$, Oy

18 Ф: $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, Ox

19 Ф: $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, Ox

20 Ф: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \le t \le \pi)$, Ox

Примеры 13, 14 Глава 8.

ИДЗ 4.8.

Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой L вокруг указанной оси:

1 L: $y = x^3/3$, $(-1/2 \le x \le 1/2)$, Ox

2 L: $x = 10(t - \sin t)$, $y = 10(1 - \cos t)$, $(0 \le t \le 2\pi)$, Ox

3 L: $y = x^2/2$, отсеченная прямой $y = 3/2$, Oy

4 L: $3y = x^2$, $(0 \le x \le 2)$, Ox

5 L: $y = \sqrt{x}$, отсеченная прямой $y = x$, Ox

6 L: $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $(0 \le t \le \pi)$, Ox

7 L: $x = \cos t$, $y = 3 + \sin t$, Ox

8 L: $3x = y^3$, $(0 \le y \le 2)$, Oy

9 L: $y = x^3/3$, $(-1 \le x \le 1)$, Ox

10 L: $x = \cos t$, $y = 1 + \sin t$, Ox

11 L: $x^2 = 4 + y$, отсеченная прямой $y = 2$, Oy

12 L: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, Ox

13 L: $y^2 = 2x$, отсеченная прямой $2x = 3$, Ox

14 L: $3y = x^3$, $(0 \le x \le 1)$, Ox

15 L: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $(0 \le t \le 2\pi)$, Ox

16 L: $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$, Ox

17 L: $y = x^3$, между прямыми $x = 2/3$, $x = -2/3$, Ox

18 L: $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, Ox

19 L: $x = \cos t$, $y = 2 + \sin t$, Ox

20 L: $x = 2\cos t$, $y = 3 + 2\sin t$, Ox

Примеры 15–17 Глава 8.

ИДЗ 4.9

Вычислить работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара Р. Удельный вес воды принять равным $9.81 кН/м^3$, $\pi = 3.14$. (Результат округлить до целого числа).

1 Р: правильная четырехугольная пирамида со стороной основания 2 м и высотой 5 м.

2 Р: правильная четырехугольная пирамида, обращенная вершиной вниз. Сторона основания пирамиды равна 2 м, высота – 6 м.

3 Р: котел, имеющий форму сферического сегмента, высота которого 1,5 м и радиус 1 м.

4 Р: полуцилиндр, радиус основания которого 1 м, длина 5 м.

5 Р: усеченный конус, у которого радиус верхнего основания равен 1 м, нижнего – 2 м, высота – 3 м.

6 Р: цилиндрическая цистерна, радиус основания которой 1 м, длина 5 м.

7 Р: правильная треугольная пирамида с основанием 2 м и высотой 5 м.

8 Р: правильная треугольная пирамида, обращенная вершиной вниз, сторона основания которой 4 м, высота 6 м.

9 Р: конус, обращенный вершиной вниз, радиус основания которого 3 м, высота 5 м.

10 Р: усеченный конус, у которого радиус верхнего основания равен 3 м, нижнего – 1 м, высота – 3 м.

11 Р: конус с радиусом основания 2 м и высотой 5 м.

12 Р: правильная четырехугольная усеченная пирамида, у которой сторона верхнего основания 8 м, нижнего – 4 м, высота – 2 м.

13 Р: параболоид вращения, радиус основания которого 3 м, глубина 4 м.

14 Р: половина эллипсоида вращения, радиус основания которого 1 м, глубина 2 м.

15 Р: усеченная четырехугольная пирамида, у которой сторона верхнего основания равна 3 м, нижнего – 4 м, высота – 1 м.

16 Р: правильная шестиугольная пирамида со стороной основания 1 м и высотой 2 м.

17 Р: правильная шестиугольная пирамида с вершиной, обращенной вниз, сторона основания которой 2 м, высота 6 м.

18 Р: цилиндр с радиусом основания 1 м и высотой 3 м.

19 Р: правильная усеченная шестиугольная пирамида, у которой сторона верхнего основания равна 1 м, нижнего – 2 м, высота – 2 м.

20 Р: правильная усеченная шестиугольная пирамида, у которой сторона верхнего основания равна 2 м, нижнего 1 м, высота – 2 м.

Примеры 18, 19 Глава 8.

ИДЗ 4.10

Найти координаты центра масс кривой L и фигуры Ф:

1 L: полуокружность $x^2+y^2=R^2$, расположенная над осью Ох.

2 L: первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $(0\le t\le 2\pi)$.

3 L: дуга астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, расположенная в третьем квадранте.

4 L: дуга окружности радиусом R, стягивающая центральный угол α.

5 L: дуга цепной линии $y=ach(x-a)$, $(-a\le x\le a)$.

6 L: дуга кардиониды $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $(0\le\varphi\le\pi)$.

7 L: дуга логарифмической спирали $\rho=ae^{\varphi}$, $\left(\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi\right)$.

8 L: одна арка циклоиды $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$.

9 L: дуга астроиды $x=2\cos^3\left(\frac{t}{4}\right)$, $y=2\sin^3\left(\frac{t}{4}\right)$, расположенная в первом квадранте.

10 L: дуга кривой $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$.

11 Ф – треугольник, стороны которого лежат на прямых $x+y=a$, $x=0$ и $y=0$.

12 Ф ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и осями координат $(x\ge0, y\ge0)$.

13 Ф ограничена первой аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ох.

14 Ф ограничена кривыми $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

15 Ф ограничена дугой синусоиды $y=\sin x$ и отрезком оси Ох, $(0\le x\le\pi)$.

16 Ф ограничена полуокружностью $y=\sqrt{R^2-x^2}$ и осью Ох.

17 Ф ограничена дугой параболы $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$, $(a > 0, b > 0)$, осью Ох и прямой $x = b$.

18 Ф ограничена замкнутой линией $y^2 = ax^3 - x^4$.

19 Ф ограничена дугой параболы $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$, $(a > 0, b > 0)$, осью Оу и прямой $y = b$.

20 Ф ограничена осями координат и дугой астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, расположенной в первом квадранте.

Примеры 20, 21 Глава 8.

Индивидуальные домашние задания 5

ИДЗ 5.1

Изменить порядок интегрирования:

1 $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx$

2 $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$

3 $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f dx$

4 $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f dx$

5 $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} f dx$

6 $\int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{-y}} f dx$

7 $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx$

8 $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f dy$

9 $\int_{0}^{1} dx \int_{1-x}^{1} f dy + \int_{1}^{e} dx \int_{\ln x}^{1} f dy$

10 $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f dx$

11 $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f dx$

12 $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f dx$

13 $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f dx$

14 $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$

15 $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f dx$

16 $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} f dx$

18 Р: цилиндр с радиусом основания 1 м и высотой 3 м.

19 Р: правильная усеченная шестиугольная пирамида, у которой сторона верхнего основания равна 1 м, нижнего – 2 м, высота – 2 м.

20 Р: правильная усеченная шестиугольная пирамида, у которой сторона верхнего основания равна 2 м, нижнего 1 м, высота – 2 м.

Примеры 18, 19 Глава 8.

ИДЗ 4.10

Найти координаты центра масс кривой L и фигуры Ф:

1 L: полуокружность $x^2+y^2=R^2$, расположенная над осью Ох.

2 L: первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $(0\le t\le 2\pi)$.

3 L: дуга астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, расположенная в третьем квадранте.

4 L: дуга окружности радиусом R, стягивающая центральный угол α.

5 L: дуга цепной линии $y=ach(x-a)$, $(-a\le x\le a)$.

6 L: дуга кардиониды $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $(0\le\varphi\le\pi)$.

7 L: дуга логарифмической спирали $\rho=ae^{\varphi}$, $\left(\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi\right)$.

8 L: одна арка циклоиды $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$.

9 L: дуга астроиды $x=2\cos^3\left(\frac{t}{4}\right)$, $y=2\sin^3\left(\frac{t}{4}\right)$, расположенная в первом квадранте.

10 L: дуга кривой $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$.

11 Ф – треугольник, стороны которого лежат на прямых $x+y=a$, $x=0$ и $y=0$.

12 Ф ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и осями координат $(x\ge 0, y\ge 0)$.

13 Ф ограничена первой аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ох.

14 Ф ограничена кривыми $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

15 Ф ограничена дугой синусоиды $y=\sin x$ и отрезком оси Ох, $(0\le x\le\pi)$.

16 Ф ограничена полуокружностью $y=\sqrt{R^2-x^2}$ и осью Ох.

17 Ф ограничена дугой параболы $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$, $(a > 0, b > 0)$, осью Ох и прямой $x = b$.

18 Ф ограничена замкнутой линией $y^2 = ax^3 - x^4$.

19 Ф ограничена дугой параболы $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$, $(a > 0, b > 0)$, осью Оy и прямой $y = b$.

20 Ф ограничена осями координат и дугой астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, расположенной в первом квадранте.

Примеры 20, 21 Глава 8.

Индивидуальные домашние задания 5

ИДЗ 5.1

Изменить порядок интегрирования:

1 $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx$

2 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$

3 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f dx$

4 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f dx$

5 $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f dx$

6 $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f dx$

7 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f dx$

8 $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f dy$

9 $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x}^{1} f dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f dy$

10 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f dx$

11 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f dx$

12 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f dx$

13 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f dx$

14 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$

15 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f dx$

16 $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f dx$

17 $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f dx$

18 $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy$

19 $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f dx$

20 $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} f dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f dy$

Пример 2 Глава 9.

ИДЗ 5.2

Вычислить:

1 $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

2 $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt{x}$.

3 $\iint\limits_D \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$.

4 $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

5 $\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

6 $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt[3]{x}$.

7 $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}$.

8 $\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt{x}$.

9 $\iint\limits_D \left(4xy + 3x^2y^2\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

10 $\iint\limits_D \left(12xy + 9x^2y^2\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt{x}$.

11 $\iint\limits_D \left(8xy + 9x^2y^2\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$.

12 $\iint\limits_D \left(24xy + 18x^2y^2\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

13 $\iint\limits_D \left(12xy + 27x^2y^2\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

14 $\iint\limits_D \left(8xy + 18x^2y^2\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt[3]{x}$.

15 $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}$.

16 $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt{x}$.

17 $\iint\limits_D \left(24xy - 48x^3y^3\right)dxdy$, D: $x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

18 $\iint\limits_D (6xy + 24x^3y^3)\,dxdy$, D: $x = 1$, $y = -x^3$, $y = \sqrt{x}$.

19 $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)\,dxdy$, D: $x = 1$, $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$.

20 $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)\,dxdy$, D: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt[3]{x}$.

Пример 1 Глава 9.

ИДЗ 5.3

Вычислить:

1 $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$, V: $y = 10x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = xy$, $z = 0$.

2 $\iiint\limits_V (3x + 4y)\,dx\,dy\,dz$, V: $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = 5(x^2 + y^2)$, $z = 0$.

3 $\iiint\limits_V (1 + 2x^3)\,dx\,dy\,dz$, V: $y = 9x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$.

4 $\iiint\limits_V (27 + 54y^3)\,dx\,dy\,dz$, V: $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$.

5 $\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz$, V: $y = 15x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = xy$, $z = 0$.

6 $\iiint\limits_V (15x + 30z)\,dx\,dy\,dz$, V: $z = x^2 + 3y^2$, $z = 0$, $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

7 $\iiint\limits_V (1 + 2x^3)\,dx\,dy\,dz$, V: $y = 36x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$.

8 $\iiint\limits_V 21xz\,dx\,dy\,dz$, V: $y = x$, $y = 0$, $x = 2$, $z = xy$, $z = 0$.

9 $\iiint\limits_V (x^2 + 3y^2)\,dx\,dy\,dz$, V: $z = 10x$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

10 $\iiint\limits_V (60y + 90z)\,dx\,dy\,dz$, V: $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$.

11 $\iiint\limits_V (9 + 18z)\,dx\,dy\,dz$, V: $y = 4x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$.

12 $\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz$, V: $z = 10(x + 3y)$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

13 $\iiint\limits_V (8y + 12z)\,dx\,dy\,dz$, V: $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = 3x^2 + 2y^2$, $z = 0$.

14 $\iiint\limits_V 63(1 + 2\sqrt{y})\,dx\,dy\,dz$, V: $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$.

15 $\iiint\limits_V (x + y)\,dx\,dy\,dz$, V: $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = 30x^2 + 60y^2$, $z = 0$.

16 $\iiint\limits_V (1 + 2x)\,dx\,dy\,dz$, V: $y = 4x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$.

17 $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$, V: $y=x$, $y=0$, $x=2$, $z=xy$, $z=0$.

18 $\iiint\limits_V y^2\,dx\,dy\,dz$, V: $z=10(3x+y)$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

19 $\iiint\limits_V (x^2+4y^2)\,dx\,dy\,dz$, V: $z=20(2x+y)$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

20 $\iiint\limits_V x^2z\,dx\,dy\,dz$, V: $y=3x$, $y=0$, $x=2$, $z=xy$, $z=0$.

Пример 8 Глава 9.

ИДЗ 5.4

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

1 $y=\frac{3}{x}$, $y=4e^x$, $y=3$, $y=4$.

2 $x=\sqrt{36-y^2}$, $x=6-\sqrt{36-y^2}$.

3 $x^2+y^2=72$, $6y=-x^2$ $(y\le 0)$.

4 $x=8-y^2$, $x=-2y$.

5 $y=\frac{3}{x}$, $y=8e^x$, $y=3$, $y=8$.

6 $y=\frac{\sqrt{x}}{2}$, $y=\frac{1}{2x}$, $x=16$.

7 $x=5-y^2$, $x=-4y$.

8 $x^2+y^2=12$, $-\sqrt{6}y=x^2$ $(y\le 0)$.

9 $y=\sqrt{12-x^2}$, $y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2}$, $x=0$ $(x\ge 0)$.

10 $y=\frac{3}{2}\sqrt{x}$, $y=\frac{3}{2}x$, $x=9$.

11 $y=\sqrt{24-x^2}$, $2\sqrt{3}y=x^2$, $x=0$ $(x\ge 0)$.

12 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$ $(x\ge 0)$.

13 $y=20-x^2$, $y=-8x$.

14 $y=\sqrt{18-x^2}$, $y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}$.

15 $y=32-x^2$, $y=-4x$.

16 $y=\frac{2}{x}$, $y=5e^x$, $y=2$, $y=5$.

17 $x^2+y^2=36$, $3\sqrt{2}y=x^2$ $(y\ge 0)$.

18 $y=3\sqrt{x}$, $y=\frac{3}{x}$, $x=4$.

19 $y=6-\sqrt{36-x^2}$, $y=\sqrt{36-x^2}$, $x=0$ $(x\ge 0)$.

20 $y=\frac{25}{4}-x^2$, $y=x-\frac{5}{2}$.

Пример 4 Глава 9.

ИДЗ 5.5

Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

1 D: $x=1$, $y=0$, $y^2=4x$ $(y\ge 0)$, $\mu=7x^2+y$.

2 D: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$, $\mu=\frac{x+y}{x^2+y^2}$.

3 D: $x=1$, $y=0$, $y^2=4x$ $(y\ge 0)$, $\mu=\frac{7x^2}{2+5y}$.

4 D: $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=16$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$, $\mu=\frac{2x+5y}{x^2+y^2}$.

5 D: $x=2$, $y=0$, $y^2=2x$ $(y\ge 0)$, $\mu=\frac{7x^2}{8+2y}$.

6 D: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=16$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$, $\mu=\frac{x+y}{x^2+y^2}$.

7 D: $x=2$, $y=0$, $y^2=\frac{x}{2}$ $(y\ge 0)$, $\mu=\frac{7x^2}{2+6y}$.

8 D: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=25$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$, $\mu=\frac{2x-3y}{x^2+y^2}$.

9 D: $x=1$, $y=0$, $y^2=4x$ $(y\ge 0)$, $\mu=x+3y^2$.

10 D: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\le 0)$, $\mu=\frac{x-y}{x^2+y^2}$.

11 D: $x=1$, $y=0$, $y^2=x$ $(y\ge 0)$, $\mu=3x+6y^2$.

12 D: $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=25$, $x=0$, $y=0$ $(y\ge 0, x\le 0)$, $\mu=\frac{2y-x}{x^2+y^2}$.

13 D: $x=2$, $y=0$, $y^2=\frac{x}{2}$ $(y\ge 0)$, $\mu=2x+3y^2$.

14 D: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$, $x=0$, $y=0$ $(x\le 0, y\ge 0)$, $\mu=\frac{2y-3x}{x^2+y^2}$.

15 D: $x=1/2$, $y=0$, $y^2=8x$ $(y\ge 0)$, $\mu=7x+3y^2$.

16 D: $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=16$, $x=0$, $y=0$ $(x\le 0, y\ge 0)$, $\mu=\frac{2y-5x}{x^2+y^2}$.

17 D: $x=1$, $y=0$, $y^2=4x$ $(y\ge 0)$, $\mu=7x^2+2y$.

18 D: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=16$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$, $\mu=\frac{x+3y}{x^2+y^2}$.

19 D: $x = 2$, $y = 0$, $y^2 = 2x$ $(y \geq 0)$, $\mu = \dfrac{7x^2}{4+y^2}$.

20 D: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$ $(x \geq 0, y \geq 0)$, $\mu = \dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$.

Пример 6 Глава 9.

ИДЗ 5.6

Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

1 $x^2 + y^2 = 2y$, $z = \dfrac{5}{4} - x^2$, $z = 0$.

2 $x^2 + y^2 = y$, $x^2 + y^2 = 4y$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.

3 $x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}x$, $z = x^2 + y^2 - 64$, $z = 0$ $(z \geq 0)$.

4 $x^2 + y^2 + 4x = 0$, $z = 8 - y^2$, $z = 0$.

5 $x^2 + y^2 = 6x$, $x^2 + y^2 = 9x$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $y = 0$ $(y \leq 0)$.

6 $x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}y$, $z = x^2 + y^2 - 36$, $z = 0$ $(z \geq 0)$.

7 $x^2 + y^2 = 2y$, $z = \dfrac{9}{4} - x^2$, $z = 0$.

8 $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 5y$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.

9 $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y = 0$, $z = x^2 + y^2 - 4$, $z = 0$ $(z \geq 0)$.

10 $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 10 - y^2$, $z = 0$.

11 $x^2 + y^2 = 7x$, $x^2 + y^2 = 10x$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $y = 0$ $(y \leq 0)$.

12 $x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}y$, $z = x^2 + y^2 - 64$, $z = 0$ $(z \geq 0)$.

13 $x^2 + y^2 = 2y$, $z = \dfrac{13}{4} - x^2$, $z = 0$.

14 $x^2 + y^2 = 3y$, $x^2 + y^2 = 6y$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.

15 $x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}x$, $z = x^2 + y^2 - 36$, $z = 0$ $(z \geq 0)$.

16 $x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}y$, $z = x^2 + y^2 - 4$, $z = 0$ $(z \geq 0)$.

17 $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 12 - y^2$, $z = 0$.

18 $x^2 + y^2 = 8x$, $x^2 + y^2 = 11x$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $y = 0$ $(y \leq 0)$.

19 $x^2 + y^2 = 4\sqrt{2}x$, $z = x^2 + y^2 - 16$, $z = 0$ $(z \geq 0)$.

20 $x^2 + y^2 = 4y$, $z = 4 - x^2$, $z = 0$.

Пример 10 Глава 9.

ИДЗ 5.7

Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела:

1 $64(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $y=0$, $z=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$, $\mu=\dfrac{5(x^2+y^2)}{4}$.

2 $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=1$ $(x^2+y^2\le 1)$, $x=0$ $(x\ge 0)$, $\mu=4|z|$.

3 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2z$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$, $\mu=10x$.

4 $x^2+y^2=\dfrac{16}{49}z^2$, $x^2+y^2=\dfrac{4}{7}z$, $x=0$, $y=0$ $(y\ge 0, z\ge 0)$, $\mu=80yz$.

5 $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=4z^2$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$, $\mu=20z$.

6 $36(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $z=0$ $(x\ge 0, z\ge 0)$, $\mu=\dfrac{5(x^2+y^2)}{6}$.

7 $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2=4$ $(x^2+y^2\le 4)$, $\mu=2|z|$.

8 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=8z$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x\ge 0, z\ge 0)$, $\mu=5x$.

9 $x^2+y^2=\dfrac{4}{25}z^2$, $x^2+y^2=\dfrac{2}{5}z$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$, $\mu=28xz$.

10 $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$, $\mu=6z$.

11 $25(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$, $\mu=2(x^2+y^2)$.

12 $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2=4$ $(x^2+y^2\le 4)$, $y=0$ $(y\ge 0)$, $\mu=|z|$.

13 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=6z$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$, $\mu=90y$.

14 $x^2+y^2=\dfrac{z^2}{25}$, $x^2+y^2=\dfrac{z}{5}$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$, $\mu=14yz$.

15 $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=9z^2$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$, $\mu=10z$.

16 $9(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$, $\mu=5(x^2+y^2)$.

17 $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=1$, $(x^2+y^2\le 1)$, $\mu=6|z|$.

18 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=z$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$, $\mu=10y$.

19 $x^2+y^2=\dfrac{z^2}{49}$, $x^2+y^2=\dfrac{z}{7}$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$, $\mu=10xz$.

20 $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=4z^2$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$, $\mu=10z$.

Пример 11 Глава 9.

ИДЗ 5.8

Вычислить центр тяжести однородного тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

1 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $\frac{9z}{2} = x^2 + y^2$.

2 $z = \frac{15}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \frac{17}{2} - x^2 - y^2$.

3 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{255}}$.

4 $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$, $z = 1$, $x^2 + y^2 = 60$ (внутри цилиндра).

5 $z = \sqrt{\frac{16}{9} - x^2 - y^2}$, $2z = x^2 + y^2$.

6 $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 10 - x^2 - y^2$.

7 $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}$.

8 $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$, $z = 6$, $x^2 + y^2 = 51$ (внутри цилиндра).

9 $z = \frac{21}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \frac{23}{2} - x^2 - y^2$.

10 $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $6z = x^2 + y^2$.

11 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{80}}$.

12 $z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}$, $z = 5$, $x^2 + y^2 = 45$ (внутри цилиндра).

13 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\frac{3z}{2} = x^2 + y^2$.

14 $z = 6\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 16 - x^2 - y^2$.

15 $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}}$.

16 $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$, $z = 4$, $x^2 + y^2 = 39$ (внутри цилиндра).

17 $z = \sqrt{144 - x^2 - y^2}$, $18z = x^2 + y^2$.

18 $z = \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \frac{5}{2} - x^2 - y^2$.

19 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}}$.

20 $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$, $z = 3$, $x^2 + y^2 = 33$ (внутри цилиндра).

Пример 12 Глава 9.

ИДЗ 5.9

Вычислить площадь области D, заданной неравенством с помошью криволинейного интеграла:

1 $x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1$

2 $1 \le \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 2$

3 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \le 1$

4 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \le 1,\ y \ge 0$

5 $1 \le \frac{x^2}{4} + y^2 \le 4$

6 $\frac{x^2}{9} + y^2 \le 1,\ x \ge 0$

7 $\frac{x^2}{4} + y^2 \le 1$

8 $1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 4$

9 $1 \le \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \le 4$

10 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1$

11 $\frac{x^2}{4} + y^2 \le 1$

12 $1 \le \frac{x^2}{4} + y^2 \le 25$

13 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1$

14 $\frac{x^2}{16} + y^2 \le 1$

15 $\frac{x^2}{4} + y^2 \le 1$

16 $1 \le \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 3$

17 $x^2 + \frac{y^2}{25} \le 1,\ y \ge 0$

18 $x^2 + \frac{y^2}{9} \le 1,\ y \ge 0$

19 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1$

20 $1 \le x^2 + \frac{y^2}{16} \le 9$

Пример 11 Глава 10.

ИЗД 5.10

Вычислить площадь поверхности, заданной уравнением z_2, расположенной внутри поверхности, заданной уравнением z_1:

1 $z_1 = 2 - 12(x^2 + y^2)$, $z_2 = 24x + 2$.

2 $z_1 = 10((x-1)^2 + y^2) + 1$, $z_2 = 21 - 20x$.

3 $z_1 = 8(x^2 + y^2) + 3$, $z_2 = 16x + 3$.

4 $z_1 = 2 - 20((x+1)^2 + y^2)$, $z_2 = -40x - 3$.

5 $z_1 = 4 - 14(x^2 + y^2)$, $z_2 = 4 - 28x$.

6 $z_1 = 28((x+1)^2 + y^2) + 3$, $z_2 = 56x + 59$.

7 $z_1 = 32(x^2 + y^2) + 3$, $z_2 = 3 - 64x$.

8 $z_1 = 4 - 6((x-1)^2 + y^2)$, $z_2 = 12x - 8$.

9 $z_1 = 2 - 4(x^2 + y^2)$, $z_2 = 8x + 2$.

10 $z_1 = 22((x-1)^2 + y^2) + 3$, $z_2 = 47 - 44x$.

11 $z_1 = 24(x^2 + y^2) + 1$, $z_2 = 48x + 1$.

12 $z_1 = 2 - 18((x+1)^2 + y^2)$, $z_2 = -36x - 34$.

13 $z_1 = -16(x^2 + y^2) - 1$, $z_2 = -32x - 1$

14 $z_1 = 30((x+1)^2 + y^2) + 1$, $z_2 = 60x + 61$

15 $z_1 = 26(x^2 + y^2) - 2$, $z_2 = -52x - 2$.
16 $z_1 = -2((x-1)^2 + y^2) - 1$, $z_2 = 4x - 5$.
17 $z_1 = -2(x^2 + y^2) - 1$, $z_2 = 4y - 1$.
18 $z_1 = 26((x-1)^2 + y^2) - 2$, $z_2 = 50 - 52x$.
19 $z_1 = 30(x^2 + y^2) + 1$, $z_2 = 60y + 1$.
20 $z_1 = -16((x+1)^2 + y^2) - 1$, $z_2 = -32x - 33$.

Пример 5 Глава 9.

Индивидуальные домашние задания 6

ИДЗ 6.1

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения:

1 $(xy + x^3 y)y' = 1 + y^2$

2 $\frac{y'}{3^{x+y}} = 3$

3 $y - xy' = 2(1 + x^2 y')$

4 $y - xy' = 1 + x^2 y'$

5 $(x + 4)dy - xydx = 0$

6 $y' + y + y^2 = 0$

7 $y^2 \ln x dx - (y - 1)xdy = 0$

8 $(x + xy^2)dy + ydx - y^2 dx = 0$

9 $y' + 2y - y^2 = 0$

10 $(x^2 + x)ydx + (y^2 + 1)dy = 0$

11 $(xy^3 + x)dx + (x^2 y^2 - y^2)dy = 0$

12 $(1 + y^2)dx - (y + yx^2)dy = 0$

13 $y' = 2xy + x$

14 $y - xy' = 3(1 + x^2 y')$

15 $2xyy' = 1 - x^2$

16 $(x^2 - 1)y' - xy = 0$

17 $(y^2 x + y^2)dy + xdx = 0$

18 $(1 + x^3)y^3 dx - (y^2 - 1)x^3 dy = 0$

19 $xy' - y = y^2$

20 $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$

Пример 1 Глава 11.

ИДЗ 6.2

1 $y - xy' = x\sec\frac{y}{x}$

2 $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$

3 $(x + 2y)dx - xdy = 0$

4 $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$

5 $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$

6 $y^2 + x^2 y' = xyy'$

7 $xy' - y = x\,tg\left(\frac{y}{x}\right)$

8 $xy' = y - xe^{y/x}$

9 $xy' - y = (x + y)\ln\left(\frac{x+y}{x}\right)$

10 $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$

11 $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy$

12 $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

13 $y = x\left(y' - e^{y/x}\right)$

14 $y' = \frac{y}{x} - 1$

15 $y'x + x + y = 0$

16 $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$

17 $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$

18 $\left(4x^2 + 3xy + y^2\right)dx + \left(4y^2 + 3xy + x^2\right)dy = 0$

19 $(x - y)ydx - x^2dy = 0$

20 $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right)y'$

Пример 3 Глава 11.

ИДЗ 6.3

Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

1 $\left(x^2 + 1\right)y' + 4xy = 3$, $y(0) = 0$

2 $y' + y\,tgx = \sec x$, $y(0) = 0$

3 $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$, $y(0) = 0$

4 $xy' - 2y = 2x^4$, $y(0) = 0$

5 $y' = 2x\left(x^2 + y\right)$, $y(0) = 0$

6 $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$

7 $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$, $y(1) = \frac{1}{2e}$

8 $\cos y dx = (x + 2\cos y)\sin y dy$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

9 $x^2y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 0$

10 $yx' + x = 4y^3 + 3y^2$, $y(2) = 1$

11 $y' = \frac{y}{3x - y^2}$, $y(0) = 1$

12 $(2x + y)dy = ydx + 4\ln y dy$, $y(0) = 1$

13 $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$, $y(0) = 1$

14 $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = 0$

15 $y = x(y' - x\cos x)$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

16 $(xy' - 1)\ln x = 2y$, $y(e) = 0$

17 $\left(2e^y - x\right)y' = 1$, $y(0) = 0$

18 $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$, $y(1) = 0$

19 $\left(x + y^2\right)dy = ydx$, $y(0) = 1$

20 $\left(\sin^2 y + x\,ctgy\right)y' = 1$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$

Пример 2 Глава 11.

ИДЗ 6.4

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1 $y' + y = x\sqrt{y}$

2 $ydx + 2xdy = 2y\sqrt{x}\sec^2 y dy$

3 $y' + 2y = y^2e^x$

4 $y' = y^4\cos x + y\,tgx$

5 $xydy = \left(y^2 + x\right)dx$

6 $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$

7 $y'x^3\sin y = xy' - 2y$

8 $\left(2x^2y\ln y - x\right)y' = y$

9 $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$

10 $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

11 $xy^2y' = x^2 + y^3$

12 $(x + 1)\left(y' + y^2\right) = -y$

13 $y'x + y = -xy^2$

14 $y' - xy = -y^3$

15 $xy' - 2\sqrt{x^3 y} = y$

16 $y' + xy = x^3 y^3$

17 $y' = \dfrac{x}{y} e^{2x} + y$

18 $yx' + x = -yx^2$

19 $x(x-1)y' + y^3 = xy$

20 $2x^3 yy' + 3x^2 y^2 + 1 = 0$

Пример 4 Глава 11

ИДЗ 6.5

Проинтегрировать следующие уравнения:

1 $\dfrac{1}{x}dy - \dfrac{y}{x^2}dx = 0$

2 $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$

3 $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$

4 $xdx + ydy + \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$

5 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \dfrac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$

6 $\dfrac{2x(1 - e^y)dx}{(1 + x^2)^2} + \dfrac{e^y dy}{1 + x^2} = 0$

7 $\dfrac{2xdx}{y^3} + \dfrac{(y^2 - 3x^2)dy}{y^4} = 0$

8 $\left(1 - e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$

9 $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$

10 $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0$

11 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y^2}\right)dy = 0$

12 $\left(3x^2 tgy - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$

13 $\left(2x + \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y}\right)dx = \dfrac{x^2 + y^2}{xy^2}dy$

14 $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$

15 $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$

16 $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0$

17 $(3x^2 y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$

18 $y(x^2 + y^2 + a^2)dy + x(x^2 - y^2 - a^2)dx = 0$

19 $\left(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$

20 $\frac{y+\sin x\cos^2 yx}{\cos^2 yx}dy+\left(\frac{x}{\cos^2 xy}-\sin y\right)=0$

Пример 7 Глава 11.

ИДЗ 6.6

Найти общее решение:

1 $y''+y'=2x-1$

2 $y''-2y'+5y=10e^{-x}\cos 2x$

3 $y''-2y'-8y=12\sin 2x-36\cos 2x$

4 $y''-12y'+36y=14e^{6x}$

5 $y''-3y'+2y=(34-12x)e^{-x}$

6 $y''-6y'+10y=51e^{-x}$

7 $y''+y=2\cos x-(4x+4)\sin x$

8 $y''+6y'+10y=74e^{3x}$

9 $y''-3y'+2y=3\cos x+19\sin x$

10 $y''+6y'+9y=(48x+8)e^{x}$

11 $y''+5y'=72e^{2x}$

12 $y''-5y'-6y=3\cos x+19\sin x$

13 $y''-8y'+12y=36x^4-96x^3+24x^2+16x-2$

14 $y''+8y'+25y=18e^{5x}$

15 $y''-9y'+20y=126e^{2x}$

16 $y''+36y=36+66x-36x^3$

17 $y''+y=-4\cos x-2\sin x$

18 $y''+2y'-24y=6\cos 3x-33\sin 3x$

19 $y''+6y'+13y=-75\sin 2x$

20 $y''+5y'=39\cos 3x-105\sin 3x$

Примеры 21, 22 Глава 11.

ИДЗ 6.7

1 $y''-8y'+17y=10e^{2x}$

2 $y''+y'-6y=(6x+1)e^{3x}$

3 $y''-7y'+12y=3e^{4x}$

4 $y''-2y'=6+12x-24x^2$

5 $y''-6y'+34y=18\cos 5x+60\sin 5x$

6 $y''-2y'=(4x+4)e^{2x}$

7 $y''+2y'+y=4x^3-24x^2+22x-4$

8 $y''-4y'=8-16x$

9 $y''-2y'+y=4e^{x}$

10 $y''-8y'+20y=16(\sin 2x-\cos 2x)$

11 $y''-6y'+13y=34e^{-3x}\sin 2x$

12 $y''+2y'-3y=(12x^2+6x-4)e^{x}$

13 $y''+4y'+4y=6e^{-2x}$

14 $y''+3y'=10-6x$

15 $y''+10y'+25y=40+52x-240x^2-200x^3$

16 $y''-4y'+20y=4\cos 4x-52\sin 4x$

17 $y''-4y'+5y=5x^2-32x+5$

18 $y''+2y'+y=(12x-10)e^{-x}$

19 $y''-4y=(-24x-10)e^{2x}$

20 $y''+6y'+9y=72e^{3x}$

Примеры21. 22 Глава 11.

ИДЗ 6.8 √

Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
б) с помощью характеристического уравнения.

1 $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$ 3 $\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y \end{cases}$

4 $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$ 5 $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$ 6 $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$

7 $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$ 8 $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$ 9 $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

10 $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$ 11 $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = y \end{cases}$ 12 $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$

13 $\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ 14 $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$ 15 $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$

16 $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$ 17 $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$ 18 $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$

19 $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$ 20 $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$ Примеры 26–28 Глава 11.

ИДЗ 6.9

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных:

1 $y''-y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ 2 $y''+4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$ 3 $y''-4y'+5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

4 $y''-y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ 5 $y''+9y = \dfrac{1}{\sin 3x}$ 6 $y''-2y' = xe^x + \dfrac{1}{xe^x}$

7 $y''+2y'+2y = \dfrac{e^x}{\cos x}$ 8 $y''-2y'+2y = \dfrac{e^x}{\sin x}$ 9 $y''+2y'+2y = e^{-x} ctgx$

10 $y''-2y'+2y = \dfrac{e^x}{\sin x}$ 11 $y''-2y'+y = \dfrac{e^x}{x^2}$ 12 $y''+y = tgx$

13 $y''+4y = ctg2x$ 14 $y''+y = ctgx$ 15 $y''-2y'+y = \dfrac{e^x}{x}$

16 $y''+2y'+y = \dfrac{e^{-x}}{x}$ 17 $y''+y = \dfrac{1}{\cos x}$ 18 $y''+y = \dfrac{1}{\sin x}$

19 $y''+4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$ 20 $y''+4y = tg2x$ Примеры 25 Глава 11.

ИДЗ 6.10

Решить следующие задачи:

1 Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь треугольника, образованного касательной к кривой, перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная b^2.

2 Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной кривой и перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, есть величина постоянная, равная $3a^2$.

3 Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная a^2.

4 Записать уравнения кривых, для которых сумма катетов треугольника, образованного касательной, перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная а.

5 Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки кривой, равна $2l$.

6 Записать уравнение кривой, для которой угловой коэффициент касательной в какой-либо ее точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей эту точку с началом координат.

7 Записать уравнение кривой, для которой треугольник, образованный осью Оу, касательной и радиусом-вектором точки касания, является равнобедренным.

8 Записать уравнение кривой, если касательная к ней отсекает на оси Оу отрезок, равный по длине $1/n$-й сумме координат точки касания.

9 Записать уравнение кривых, для которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси Оу, равна квадрату абсциссы точки касания.

10 Записать уравнение кривых, для которых длина отрезка, отсекаемого нормалью в точке М (х, у) на оси Оу равна x^2/y.

11 Записать уравнение кривой, если известно, что точка пересечения любой касательной к кривой с осью абцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

12 Записать уравнение кривой, если известно, что расстояние от любой касательной до начала координат равно абциссе точки касания.

13 Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: точка пересечения любой касательной с осью абцисс имеет абциссу, вдвое меньшую абциссы точки касания.

14 Записать уравнения кривых, для которых точка пересечения любой касательной с осью абцисс имеет абциссу, равную $2/3$ абциссы точки касания.

15 Записать уравнение кривой, проходящей через точку A (2.4) и обладающей следующим свойством: длина отрезка, отсекаемого на оси абцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равна кубу абциссы точки касания.

16 Записать уравнение кривой, проходящей через точку A (1.5) и обладающей следующим свойством: длина отрезка, отсекаемого на оси ординат любой касательной, равна утроенной абциссе точки касания.

17 Записать уравнение кривой, проходящей через точку A (2.–1), если известно, что угловой коэффициент касательной равен утроенному квадрату ординаты точки касания.

18 Записать уравнение кривой, проходящей через точку A (0.–2), если известно, что угловой коэффициент касательной равен удвоенной ординате точки касания.

19 Записать уравнение кривой, обладающей следующим свойством: длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную, равна абциссе точки касания.

20 Записать уравнение кривой, обладающей следующим свойством: отрезок касательной к кривой, заключенной между осями координат, делится в точке касания пополам.

Примеры 29, 30, 31 Глава 11.

Индивидуальные домашние задания 7

ИДЗ 7.1

Найти сумму ряда:

1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$ 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$ 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$

4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$ 5 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$ 6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-28n-45}$

7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$ 8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12}$ 9 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$

10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-48}$ 11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{36n^2-24n-5}$ 12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-84n-13}$

13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$ 14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+35n-6}$ 15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+3n-20}$

16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-42n-40}$ 17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{28}{16n^2-8n-15}$ 18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-21n-10}$

19 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$ 20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$

Пример 1 Глава 12.

ИДЗ 7.2

Исследовать на сходимость ряд:

1 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$ 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n-1)!}$

4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n 2n!}{(2n)!}$ 5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$ 6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}$

7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,\frac{5}{n}}{n!}$ 8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$ 9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}tg\frac{1}{5^n}$

10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$ 11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$ 12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$

13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$ 14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$ 15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5(2n-1)}{3^n(n+1)!}$

16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n+1}}$ 17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^{n+1})(2n)!}$ 18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$

19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$ 20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$

Пример 3 Глава 12.

ИДЗ 7.3

Исследовать на сходимость ряд:

1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$ 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{4^n}$ 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$

4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$ 5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$ 6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n}(n+1)^3$

7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$ 8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$ 9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\arcsin^n\frac{\pi}{4n}$

10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$ 11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\frac{n}{5^n}$ 12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$

13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}(n-1)^2$ 14 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$ 15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$

16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$ 17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$ 18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n\frac{\pi}{2n}$

19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$ 20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n}$ Пример 4 Глава 12.

ИДЗ 7.4

Исследовать на сходимость ряд:

1 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$ 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$ 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$

4 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$ 5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$ 6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}$

7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\sqrt{2}+1)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}$ 8 $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$ 9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$

10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(2n)}$ 11 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}$ 12 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+1)}$

13 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$ 14 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2 n}$ 15 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$

16 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$ 17 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n-1)}$ 18 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$

19 $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$ 20 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$ Пример 5 Глава 12.

ИДЗ 7.5

Исследовать на сходимость ряд:

1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n}$

3 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$

4 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n(\ln\ln n)\ln n}$

5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}2n^{2}}{n^{4}-n^{2}+1}$

6 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{(n+1)\ln n}$

7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n\ln(n+1)}$

8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{4}\sqrt{2n+3}}$

9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$

10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cos\dfrac{\pi}{6n}$

11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n!}$

12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n\ln(2n)}$

13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}tg\dfrac{1}{n}$

14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^{2}}$

15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$

16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{\cos\frac{\pi}{3\sqrt{n}}\sqrt[4]{3n+\ln n}}$

17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{n}}$

18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}(2n-1)}{3^{n}}$

19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}(n+3)}{\ln(n+4)}$

20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}(n+1)}{\sqrt{n^{3}}}$

Пример 9 Глава 12.

ИДЗ 7.6

Вычислить сумму ряда с точностью α:

1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{3n^{2}}$, $\alpha=0.01$

2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $\alpha=0.01$

3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n)^{3}}$, $\alpha=0.001$

4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n!(2n+1)}$, $\alpha=0.001$

5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{2n+1}{n^{2}(n+1)}$, $\alpha=0.01$

6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}$, $\alpha=0.0001$

7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}n}{2^{n}}$, $\alpha=0.1$

8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}n^{2}}{3^{n}}$, $\alpha=0.1$

9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}n}{(2n-1)^{2}(2n+1)^{2}}$, $\alpha=0.001$

10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}$, $\alpha=0.0001$

11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{(2n)!}$, $\alpha=0.001$

12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{-2}{5}\right)^{n}$, $\alpha=0.01$

13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{7^n}$, $\alpha = 0.0001$

14 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^n$, $\alpha = 0{,}1$

15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$, $\alpha = 0.001$

16 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n!}$, $\alpha = 0{,}01$

17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!2n}$, $\alpha = 0.00001$

18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!n!}$, $\alpha = 0{,}0001$

19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}$, $\alpha = 0.001$

20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!}$, $\alpha = 0{,}001$

Пример 15 Глава 12.

ИДЗ 7.7

Доказать справедливость равенства. (Ответом служит число ρ, получаемое при применении признака Даламбера или признака Коши).

1 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$

2 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{(2n)!} = 0$

3 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{n^n} = 0$

4 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)^n}{(2n-1)!} = 0$

5 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{2^{n^2}} = 0$

6 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2} = 0$

7 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{5^{n^2}} = 0$

8 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!} = 0$

9 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n^n} = 0$

10 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n+1)!} = 0$

11 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{n^n} = 0$

12 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n)^n}{(2n-1)!} = 0$

13 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n)!}{2^{n^2}} = 0$

14 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2} = 0$

15 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!} = 0$

16 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{3n}}{n!} = 0$

17 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{n^n} = 0$

18 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n-1)!} = 0$

19 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{n^n} = 0$

20 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)^n}{(2n+1)!} = 0$

Пример 5 Глава 12.

. ИДЗ 7.8

Найти область сходимости функционального ряда:

1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3(x-3)^{2n}}{2n+3}$

2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)5^n}$

3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$

4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}$

5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{2n}}{2n}$

6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$

7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^n(x-2)^n}$

8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$

9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$

10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$ 11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$ 12 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n(x-3)^{3n}}{(5n-8)^3}$

13 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+5)^n \operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$ 14 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$ 15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n9^n(x-1)^{2n}}$

16 $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$ 17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$ 18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$

19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)^3(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$ 20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$

Пример 11 Глава 12.

ИДЗ 7.9

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

1 $\frac{9}{20-x-x^2}$ 2 $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$ 3 $\ln(1-x-6x^2)$

4 $2x\cos^2\frac{x}{2}-x$ 5 $\frac{sh2x}{x}$ 6 $\frac{7}{12+x-x^2}$

7 $\frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$ 8 $\ln(1+x-6x^2)$ 9 $(x-1)\sin 5x$

10 $\frac{ch3x-1}{x^2}$ 11 $\frac{6}{8+2x-x^2}$ 12 $\frac{1}{\sqrt{16-3x}}$

13 $\ln(1-x-12x^2)$ 14 $(3+e^{-x})^2$ 15 $\frac{\arcsin x}{x}$

16 $\frac{7}{12-x-x^2}$ 17 $x^3\sqrt{4-3x}$ 18 $\ln(1+2x-8x^2)$

19 $2x\sin^2\frac{x}{2}-x$ 20 $(x-1)shx$ Примеры 12–14 Глава 12.

ИДЗ 7.10

Вычислить интеграл с точностью до 0,001:

1 $\int_0^{0.1}e^{-6x^2}dx$ 2 $\int_0^{0.1}\sin(100x^2)dx$ 3 $\int_0^{1}\cos x^2 dx$

4 $\int_0^{0.5}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}$ 5 $\int_0^{0.1}\frac{1-e^{-2x}}{x}dx$ 6 $\int_0^{1}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx$

7 $\int_0^{1.5}\frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$ 8 $\int_0^{0.2}e^{-2x^2}dx$ 9 $\int_0^{0.2}\sin(25x^2)dx$

10 $\int\limits_0^{0.5} \cos(4x^2)dx$ 11 $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$ 12 $\int\limits_2^{0.2} \frac{1-e^{-x}}{x}dx$

13 $\int\limits_0^{0.4} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}dx$ 14 $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$ 15 $\int\limits_0^{0.3} e^{-2x}dx$

16 $\int\limits_0^{0.4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$ 17 $\int\limits_0^{0.2} \cos(25x^2)dx$ 18 $\int\limits_0^{1.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$

19 $\int\limits_0^{0.4} \frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx$ 20 $\int\limits_0^{0.1} \frac{\ln(1+2x)}{x}dx$

Пример 18 Глава 12.

Содержание

Ильясов Муратхан Нурмагамбетович

Сборник домашних заданий по высшей математике

Учебно-методическое пособие
II часть

Подписано в печать 11.03.2003 г.
Формат 29,7 х 42¼. Бумага книжно-журнальная.
Объем 1,6 усл.печ.л. Тираж 200 экз.
Заказ № 0232

Издательство
Павлодарского государственного университета
им. С.Торайгырова
637034, г.Павлодар, ул.Ломова, 64
E-mail: publish@psu.kz