

М.Н. Ильясов

Сборник домашних заданий по высшей математике

Учебно-методическое пособие

3 часть

Павлодар

ББК 22.1
УДК 51(075.8)
И 49

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Павлодарский государственный педагогический институт

Кафедра Математического анализа

Рекомендовано к изданию решением
Ученого Совета ПГПИ

Рецензенты:

Шакенов К.К. - доцент, зав.кафедрой Вычислительной математики
КазНУ им. аль-Фараби.

Аяшинов М.М. - профессор, зав.кафедрой Математики ПаУ.

Ильясов М.Н.

И 49 **Сборник домашних заданий по высшей математике.**
3 часть.- Павлодар: ПГПИ, 2004.- 84 С.

ISBN 9965-652-75-0

Второе издание

Учебно-методическое пособие написано в соответствии с учебной программой по курсу высшей математики для инженерно-технических и физико-математических специальностей университетов. Оно содержит индивидуальные домашние задания (ИДЗ) по следующим разделам: функциям нескольких переменных, теории вероятностей и математической статистике, теории функций комплексной переменной и операционному исчислению. Кроме ИДЗ приведены необходимые теоретические сведения и методические указания по решению задач названных разделов. Пособие предназначено для студентов и преподавателей университетов.

И $\frac{1602000000}{00 - (05) - 03}$

ISBN 9965-652-75-0

© Ильясов М.Н., 2004

Предисловие

В настоящее время ощущается нехватка дидактического материала по классическим разделам высшей математики (аналитической геометрии, высшей алгебре, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и другим). Известно, что для выработок у студентов способности усвоения материала необходимо индивидуализировать не только контрольные работы, но и домашние задания. Это мнение подкрепляется личным опытом автора и моих коллег по кафедре.

Увеличение самостоятельной работы студентов для развития их способностей предполагает соответствующее методическое обеспечение учебного процесса. Только задачки с подбором большого количества однотипных заданий позволяют проводить занятия с максимальной индивидуализацией. Этот сборник позволяет многим преподавателям продолжить метод обучения, который основывался на таких учебно-методических пособиях.

Данный сборник является третьей частью учебно-методических пособий под названием «сборник домашних заданий по высшей математике», написанного в соответствии с действующими программами курса высшей математики для инженерно-технических и физико-математических специальностей университетов. Это пособие также можно использовать и для других специальностей. Кроме того, он вполне доступен для студентов дистанционной формы обучения.

Весь комплекс учебно-методических пособий состоит из трех частей. Материал каждой части соответствует I-III семестрам учебного процесса. Для тех специальностей, которые курс высшей математики изучают в течение двух семестров, рекомендуется сделать необходимую выборку. Охарактеризую структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний студентов. В первой части содержится материал по определителям, матрицам, линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению функций одной переменной. Во второй части содержится материал по определенным, несобственным, кратным и криволинейным интегралами с их приложениями, дифференциальным уравнениям и системам, рядам. В третьей части содержится материал по функциям нескольких переменных, теории вероятностей и математической статистике, теории функций комплексного переменного и операционному исчислению.

Весь практический материал III семестра по курсу высшей математики разделен на главы, а некоторые главы - на параграфы, в каждой из которых даются необходимые теоретические сведения (основные определения, понятия, формулы), используемые при решении задач и выполнении упражнений, изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. В конце сборника приводятся индивидуальные домашние задания (ИДЗ) по материалам III семестра, которые разделены на 4 части (№№8-11). Эти ИДЗ рекомендуется выдавать в 4 этапа по 10 заданий в каждом, из расчета по 2 задания на одну учебную неделю. После приема

заданий одного этапа выдаются последующие. Каждое задание содержит по 20 вариантов. Практические занятия можно вести по так называемому блочно-цикловому методу оценки знаний, состоящий в следующем. Материал каждого семестра делится на 3-4 блока, по каждому из которых выполняется ИДЗ. В конце каждого цикла проводится письменная контрольная работа на одну пару, в которую входят 6-8 задач. Учет оценок за ИДЗ и контрольные работы позволяют вывести общую оценку за каждый блок и итоговую оценку за семестр.

Тогда оценка на экзамене, где в основном предлагаются теоретические вопросы, будет более объективной.

В заключение отмечу, что пособие в основном ориентировано на студента средних способностей, и усвоение содержащегося в нем материала гарантирует удовлетворительные и хорошие знания по курсу высшей математики. Для отлично успевающих студентов необходимы дополнительные индивидуальные задания повышенной сложности, которыми могут быть теоретические упражнения и нестандартные задачи.

Настоящий сборник адресован преподавателям и студентам и предназначен для проведения практических занятий, контрольных работ в аудиториях и выдачи индивидуальных домашних заданий по всем разделам курса высшей математики.

Глава 13

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для удобства рассмотрим функцию $z = f(x, y)$ от двух переменных. Для функции с большим числом переменных все переносится по аналогии. Для этих функций определены все понятия, которые мы вводим для обычной функции, т.е. для функции от одной переменной.

Областью определения D функции $z = f(x, y)$ является часть плоскости, ограниченная линиями.

Графиком этой функции является поверхность, образованная множеством точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют данному уравнению $z = f(x, y)$.

Пример 1. Найти область определения функции $z = \sqrt{x - y^2 + 1}$.

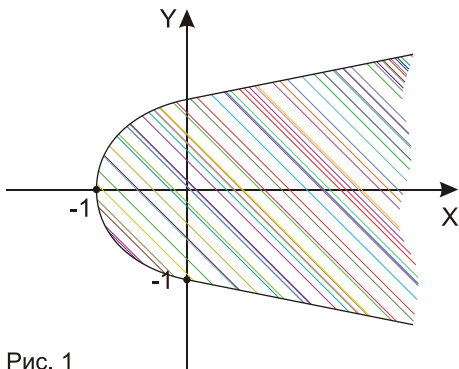


Рис. 1

Решение. Для существования значения z необходимо $x - y^2 + 1 \geq 0$ или $x + 1 \geq y^2$. Для решения неравенства сначала нарисуем график $x + 1 = y^2$, которым является парабола. Эта линия делит плоскость на две части (внутреннюю и внешнюю к параболе). На одной из них выполняется неравенство $x + 1 \geq y^2$. Легко проверить, что в данном случае это внутренняя часть параболы. Значит, областью определения является заштрихованная область вместе с границей.

Пример 2. Определить вид графика функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Решение. Сначала найдем область определения этой функции. Необходимо $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 4$. Отсюда следует, что областью определения будет круг радиуса $R = 2$ вместе с границей. Тогда множество точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты которых на области определения (круге) удовлетворяющие уравнению $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, образуют верхнюю полусферу радиуса $R = 2$ с центром в начале координат. Значит, графиком данной функции является верхняя полусфера.

Линией уровня называется такая линия, на всех точках которой данная функция принимает одно и то же значение.

Пример 3. Найти линию уровня функции $z = x^2 - y$.

Решение. Очевидно, что областью определения функции является вся плоскость, так как для любых x и y можно найти значение z . Для построения линии уровня надо функции z придавать всевозможные числовые значения. Пусть $z = 0$, тогда $0 = x^2 - y$ или $y = x^2$.

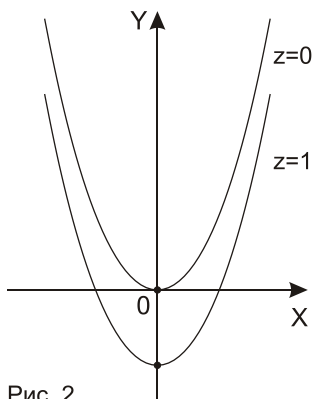


Рис. 2

Строим график этой функции. Пусть $z = 1$, тогда $y = x^2 - 1$. Строим график и т.д. Линией уровня будет семейство парабол, полученных сдвигом вдоль оси ОУ.

Надо отметить, что линии уровня между собой не пересекаются.

Пример 4. Найти линии уровня функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

Решение. Областью определения является вся внешняя часть круга радиуса $R = 1$. Все линии уровня - это окружности, поэтому получим семейство концентрических окружностей с центром в начале координат.

Понятия четность и периодичность, предел и непрерывность определяются по аналогии.

Частные производные определяются формулами:

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} \quad f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}, \text{ где}$$

$$\Delta_x f = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad \text{- частное приращение по } x,$$

$$\Delta_y f = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad \text{- частное приращение по } y.$$

Отсюда следует, что частная производная по одной переменной является обычной производной по этой переменной, найденной при условии, что другая переменная - постоянная.

$$z = \arcsin \frac{x}{y}$$

Пример 5. Найти частные производные функции

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

Решение.

$$f'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$$

Пример 6. Найти частные производные функции $z = \ln(x^2 + y)$.

$$f'_x = \frac{1}{x^2 + y} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + y} \quad f'_y = \frac{1}{x^2 + y} \cdot 1 = \frac{1}{x^2 + y}$$

Решение.

По определению **частные производные второго порядка** находятся так:
 $f''_{xx} = (f'_x)'_x$, $f''_{yy} = (f'_y)'_y$, $f''_{xy} = (f'_x)'_y$, $f''_{yx} = (f'_y)'_x$, причем $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Пример 7. Найти частные производные второго порядка для функции $z = \arctg(xy)$

$$f'_x = \frac{1}{1+(xy)^2} \cdot y = \frac{y}{1+x^2y^2} \quad f'_y = \frac{1}{1+(xy)^2} \cdot x = \frac{x}{1+x^2y^2}$$

Решение.

Тогда по определению

$$f''_{xx} = \left(\frac{y}{1+x^2y^2} \right)'_x = \left(\frac{-y}{1+x^2y^2} \right) \cdot 2xy^2 = -\left(\frac{2xy^3}{1+x^2y^2} \right)$$

$$f''_{yy} = \left(\frac{x}{1+x^2y^2} \right)'_y = \left(\frac{-x}{1+x^2y^2} \right) \cdot x^2 \cdot 2y = -\left(\frac{2x^3y}{1+x^2y^2} \right)$$

$$f''_{xy} = \left(\frac{y}{1+x^2y^2} \right)'_y = \frac{1 \cdot (1+x^2y^2) - y \cdot x^2 \cdot 2y}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ определяется по формуле
 $dz = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$

Пример 8. Найти полный дифференциал функций $z = e^{xy}$.

$$f'_x = e^{xy} \cdot y \quad f'_y = e^{xy} \cdot x$$

Решение. Найдем

$$dz = y \cdot e^{xy} dx + x \cdot e^{xy} dy = e^{xy} (ydx + xdy)$$

Плоскость касательная к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$
 $(z_0 = f(x_0, y_0))$ имеет уравнение $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Пример 9. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ в точке $M(2, -1, 1)$.

Решение. Найдем

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 - 4}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}} \quad f'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 - 4}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$$

$$f'_x(2, -1) = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 - 4}} = \frac{2}{1} = 2 \quad f'_y(2, -1) = \frac{-1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 - 4}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$z_0 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 - 4} = 1 \quad \text{и подставим их в формулу} \quad z - 1 = 2(x - 2) - 1(y + 1) \quad \text{или}$$

$$z-1=2x-4-y-1$$

$$\text{Ответ: } 2x - y - z - 4 = 0$$

Из определений частных производных и полного дифференциала функции $z = f(x, y)$ следует, что между полным приращением $\Delta z = \Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ и полным дифференциалом $df = dz$ существует приближенное равенство $\Delta f \approx df$, которое используется для приближенных вычислений.

Пример 10. Вычислить приблизительно $1,02^{2,05}$.

Решение. Введем функцию $f(x, y) = x^y$, приняв за $x = 1,02$, $y = 2,05$. Запишем соотношение $\Delta f \approx df$ в удобном виде:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

Тогда, приняв $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, получим $\Delta x = x - x_0 = 0,02$, $\Delta y = y - y_0 = 0,05$.

$$\text{Найдем } f'_x = yx^{y-1}, \quad f'_y = x^y \ln x, \quad f'_x(1, 2) = 2 \cdot 1^{2-1} = 2, \quad f'_y(1, 2) = 1^2 \ln 1 = 0$$

Подставляя эти значения в соотношение, получим:

$$1,02^{2,05} \approx 1^2 + 2 \cdot 0,02 + 0 \cdot 0,05 = 1 + 0,04 = 1,04 \quad 1,02^{2,05} \approx 1,04$$

Формула Тейлора для функции $z = f(x, y)$ в точке (a, b) имеет вид:

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b) \cdot (x - a) + f'_y(a, b) \cdot (y - b) + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2] + \dots + R_n(x, y)$$

Пример 11. Написать первые несколько слагаемых формулы Тейлора для функции $e^x \cos y$ в точке $M(0, 0)$.

$$\text{Решение. } f(0, 0) = 1$$

$$f'_x = e^x \cos y, \quad f'_x(0, 0) = 1 \cdot 1 = 1, \quad f'_y = e^x (-\sin y), \quad f'_y(0, 0) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$f''_{xx} = e^x \cos y, \quad f''_{xx}(0, 0) = 1 \cdot 1 = 1, \quad f''_{yy} = e^x (-\cos y), \quad f''_{yy}(0, 0) = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$f''_{xy} = e^x (-\sin y), \quad f''_{xy}(0, 0) = 1 \cdot 0 = 0$$

и т.д.

$$e^x \cos y = 1 + 1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) + \frac{1}{2!} [(x - 0)^2 + 2 \cdot 0 \cdot (x - 0)(y - 0) +$$

Тогда

$$+ (-1)(y - 0)^2] + \dots \quad e^x \cos y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \dots$$

или

Точка, в которой частные производные равны нулю или не существуют, называется стационарной.

Экстремум функций $z = f(x, y)$ возможен только в стационарной точке. Пусть (x_0, y_0) - стационарная точка. Найдем $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{xy}(x_0, y_0)$.

Тогда при $\Delta = AB - C^2 > 0$ экстремум есть, причем max, когда $A < 0$, и min, когда $A > 0$; при $\Delta > 0$ экстремума нет; при $\Delta = 0$ экстремум может быть, а

может и не быть, т.е. надо дополнительно исследовать с помощью производных более высоких порядков.

Пример 12. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x + 2y - x^2 - y^2$.

Решение. Найдем стационарные точки. $f'_x = 2 - 2x$, $f'_y = 2 - 2y$, решая систему $\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 2 - 2y = 0 \end{cases}$, получим $(1, 1)$ - стационарная точка.

Найдем значение $\Delta = AB - C^2$, $f''_{xx} = -2$, $f''_{yy} = -2$, $f''_{xy} = 0$. Отсюда $A = -2$, $B = -2$, $C = 0$, $\Delta = (-2)(-2) - 0^2 = 4 > 0$. Экстремум есть, и он при $A = -2 < 0$ является max. $f_{\max}(1, 1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1^2 - 1^2 = 2 + 2 - 1 - 1 = 2$

Пусть требуется найти экстремум функции $z = f(x, y)$, при условии, что аргументы x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$. Такой экстремум называется условием.

1 способ. Из уравнения $\varphi(x, y) = 0$ найти одну переменную, подставить в данную функцию и получить задачу на экстремум функции от одного аргумента.

2 способ (Лагранжа). Ввести новую переменную λ и искать экстремум для функции $z = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \\ z'_\lambda = 0 \end{cases}$$

Для этого из системы надо найти стационарную точку, а переменную λ исключить.

Пример 13. Найти экстремум $z = y^2 - x^2$ при условии, что $2x - y + 3 = 0$.

Решение. Найдем y из условия $y = 2x + 3$ и подставим в данную функцию: $z = (2x + 3)^2 - x^2 = 3x^2 + 12x + 9$, $z' = 6x + 12 = 0$, $x = -2$, $z'' = 6 > 0$. Значит, в точке $x = -2$ функция $z = y^2 - x^2$ имеет условный min. $z_{\min} = 1 - (-2)^2 = -3$

Пример 14. Найти экстремум функции $z = 2x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$. Составим систему для нахождения стационарных точек.

$$\begin{cases} z'_x = 2 + 2x\lambda = 0 \\ z'_y = 1 + 2y\lambda = 0 \\ z'_\lambda = x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Решим эту систему, $x = 2y$, $4y^2 + y^2 = 5$, $y_{1,2} = \pm 1$, $x_{1,2} = \pm 2$, получили две стационарные точки $M_1(2, 1)$ и $M_2(-2, -1)$.

Найдем $z''_{xx} = 2\lambda$, $z''_{yy} = 2\lambda$, $z''_{xy} = 0$, $A = 2\lambda$, $B = 2\lambda$, $C = 0$, $\Delta = AB - C^2 = 4\lambda^2 > 0$. Экстремум есть.

Для точки $M_1(2,1)$ $\lambda = -\frac{1}{2}$, $A = 2\lambda = -1 < 0$, поэтому в точке M_1 max.

В точке $M_2(-2,-1)$ $\lambda = \frac{1}{2}$, $A = 2\lambda = 1 > 0$, поэтому в точке M_2 min.

Ответ: $z_{\max} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $z_{\min} = 2 \cdot (-2) - 1 = -5$.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D необходимо найти все стационарные точки, лежащие внутри данной области и на ее границе, вычислить значения функции в этих точках. Затем найти экстремумы на границах области, а потом путем сравнения полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее из них.

Пример 15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ в области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 2 = 0$.

$$\begin{cases} z'_x = 2x + 2y + 4 = 0 \\ z'_y = 2x - 2y = 0 \end{cases} \quad x = y$$

Решение. Найдем стационарную точку из системы $x = y = -1$, $M_1(-1, -1)$ - стационарная точка лежит на границе данной области. Найдем $z_1 = f(-1, -1) = -2$.

Исследуем на границе $x = 0$. Тогда $z = -y^2$ и $z_{\max} = f(0, 0) = 0$, $z_{\min} = f(0, -2) = -4$.

Исследуем на границе $y = 0$. Тогда $z = x^2 + 4x$, $z' = 2x + 4 = 0$, $x = -2$, $f(-2, 0) = -4$.

Исследуем на границе $x + y + 2 = 0$. Тогда $y = -x - 2$ и $z = x^2 + 2x(-x - 2) + 4x - (-x - 2)^2 = x^2 - 2x^2 - 4x + 4x - x^2 - 4x - 4 = -2x^2 - 4x - 2$. $z' = -4x - 4 = 0$, $x = -1$, $f(-1, -1) = -2$.

Сравнивая все полученные значения функции z , заключаем, что $z_{\max} = 0$ достигается в точке $(0, 0)$, а $z_{\min} = -4$ достигается в точках $(0, -2)$ и $(-2, 0)$.

Пример 16. Найти размеры емкости с открытым верхом формы прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема, полная поверхность которой имеет площадь P .

Решение. Обозначим высоту - h , ширину - y , длину - x . Тогда $V = xyh$ и $xy + 2h(x + y) = P$. Отсюда $h = \frac{P - xy}{2(x + y)}$ и $V = \frac{(P - xy)xy}{2(x + y)}$. Найдем max функции V при условии $x, y, h > 0$.

$$\begin{cases} V'_x = \frac{(Py - 2xy^2)(x + y) - (P - xy)xy}{2(x + y)^2} = 0 \\ V'_y = \frac{(Px - 2x^2y)(x + y) - (P - xy)xy}{2(x + y)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P - x^2 - 2xy = 0 \\ P - y^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

$$x = y, \quad P = 3x^2, \quad x = \sqrt{\frac{P}{3}}, \quad y = \sqrt{\frac{P}{3}}, \quad h = \frac{P - \frac{P}{3}}{2 \cdot 2 \sqrt{\frac{P}{3}}} = \frac{\frac{2}{3}P}{4 \sqrt{\frac{P}{3}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{3}}.$$

Ответ. В основании квадрат со стороной $\sqrt{\frac{P}{3}}$, а высота в два раза меньше стороны квадрата.

$$V_{\max} = \frac{P}{6} \sqrt{\frac{P}{3}}.$$

Глава 14

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

§1 Случайные события

A - событие, $P(A) = \frac{m}{n}$ - классическая формула вероятности события A , где n - число всех возможных элементарных исходов, m - число элементарных исходов, благоприятствующих A .

Если A - достоверное событие, то $P(A) = 1$; если A - невозможное событие, то $P(A) = 0$, для других событий $0 < P(A) < 1$.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.
 $P_n = n!$ - число всех возможных перестановок из n различных элементов.

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.
 $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ - число всех возможных размещений по m элементов из n различных элементов.

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются составом элементов.
 $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ - число всех возможных сочетаний по m элементов из n различных элементов.

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит только один раз?

Решение. Это задание на перестановку, так как в каждой комбинации участвуют три различные цифры.
 $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ чисел, а именно: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Пример 2. В турнире участвуют 5 шахматистов. Каждый с каждым играют по одной партии. Сколькими вариантами может образоваться тройка призеров?

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

Решение. Это задача на размещение из 5 по 3, то есть

Пример 3. В группе 9 студентов. Надо выбрать двоих. Сколько всего способов?

Решение. Это задание на сочетание из 9 по 2, то есть
 $C_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 36$

Пример 4. В урне 4 белых и 5 красных шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что: а) они белые; б) разные.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Решение. а) А - событие, что шары белые, тогда Найдем n , то есть число всех возможных выборов двух шаров из урны, где лежат 9 шаров. Это задача на сочетание из 9 по 2, т.е.

$$n = C_9^2 = \frac{9!}{2!7!} = 36$$

Найдем m , то есть число таких выборов, когда оба шара белые. Это опять на сочетание, но теперь из 4 белых по 2, то есть

$$m = C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

б) В - событие, что один шар белый, а другой шар красный. Тогда

$$P(B) = \frac{m}{n}$$

, здесь $n = 36$. Найдем m , то есть число таких выборов, когда один шар белый, а другой - красный. Белый шар можно выбрать четырьмя способами, а красный - пятью, поэтому

$$m = C_4^1 \cdot C_5^1 = 4 \cdot 5 = 20$$

Тогда

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Классическая формула вероятности неприменима, когда число исходов

$$P(A) = \frac{\mu}{M}$$

бесконечно много. В этом случае используется формула геометрической вероятности, где M - мера (длина, площадь, объем) всего объекта, μ - мера той части объекта, которая благоприятствует событию А.

Пример 5 (задача о встрече). Двое условились встретиться в определенном месте между 18 и 19 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 20 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый наудачу выбирает момент своего прихода в назначенном промежутке.

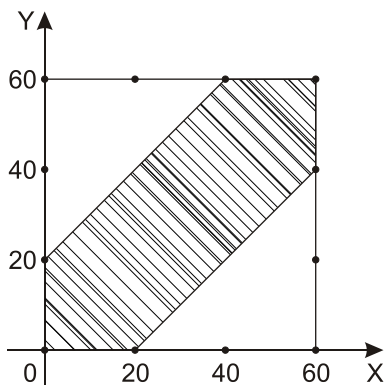


Рис. 3

Решение. В квадрате 60×60 каждой точке соответствует время в минутах после 18 часов прихода одного (x) и другого (y). Встреча состоится, если $|x - y| \leq 20$. Этому соответствует заштрихованная фигура. Здесь мерой является площадь. M - площадь всего квадрата, μ - площадь заштрихованной фигуры (благоприятствующая встрече). А - событие, что встреча состоится.

$$P(A) = \frac{S_{\text{штрих}}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{60 \cdot 60 - 40 \cdot 40}{60 \cdot 60} = \frac{36 - 16}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Тогда

Вероятность встречи больше ?, поэтому можно говорить, что она скорее состоится, чем не состоится.

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Если А и В - два несовместных события, то

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу, то $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$. В частности, при $n=2$ события A_1 и A_2 называются противоположными и обозначаются через A и $\bar{A}$, поэтому $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Пример 6. В урне 15 белых и 10 красных шаров. Найти вероятность того, что среди 6 наудачу извлеченных шаров есть хотя бы один белый шар.

Решение. А - событие, что есть хотя бы один белый шар. Здесь проще найти вероятность $\bar{A}$ - событие, что все шары красные:

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{10}^6}{C_{25}^6} = \frac{\frac{10!}{6!4!}}{\frac{25!}{6!19!}} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25} = \frac{3}{2530} \approx 0,001$$

Тогда
 $P(\bar{A})$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,001 = 0,999$$

- условная вероятность, то есть вероятность события А, вычисленная в предположении, что событие В уже произошло.

$$P(A/B) = P(A)$$

Если , то события А и В называются независимыми.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) =$$

Для совместных событий А и В верна формула $P(A/B) = P(B/A) = 0$ и

Если события А и В несовместны, то $P(AB) = 0$. Если события А и В независимые, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Пример 7. В двух ящиках по 12 деталей. В одном ящике 8, а в другом 9 стандартных деталей. Из каждого ящика вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что: а) вынутые детали будут стандартными; б) что одна деталь стандартная, а другая - нет.

Решение. А - событие, что деталь из первого ящика стандартная, В - событие, что деталь из второго ящика стандартная.

$$P(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad P(B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

а) Тогда . Так как события А и В независимые,

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

то

б) С - событие, что одна деталь стандартная, а другая - нет. Тогда

$$C = AB + \bar{A}B \quad \text{и} \quad P(C) = P(AB + \bar{A}B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A) \cdot P(B) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Пусть D - событие, что вынутые детали будут нестандартными. События

AB, C и D образуют полную группу, поэтому $P(D)=1-P(AB)-P(C)=1-\frac{1}{2}-\frac{5}{12}=\frac{1}{12}$.

Если n событий имеют одинаковую вероятность P , то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна $P(A)=1-(1-P)^n$.

Пример 8. Монета бросается 4 раза. Найти вероятность того, что выпадет хотя бы один герб.

Решение. При одном бросании монеты выпадение герба имеет вероятность $P=\frac{1}{2}$, поэтому

$$P(A)=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^4=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

$P(A)=P(H_1) \cdot P\left(\frac{A}{H_1}\right)+P(H_2) \cdot P\left(\frac{A}{H_2}\right)+\dots+P(H_n) \cdot P\left(\frac{A}{H_n}\right)$ - формула полной вероятности, где $H_1, H_2, \dots, H_n$ - полная группа событий (гипотеза).

Пример 9. В первой урне 3 белых и 5 красных шара, во второй - 6 белых и 4 красных. Из второй урны в первую наудачу перекладывают 2 шара. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из первой урны, будет белым.

Решение. A - событие, что шар будет белым. Составим гипотезу (полную группу возможных событий) по поводу двух шаров, переложенных наудачу из второй урны в первую.

H_1 - событие, что оба шара белые;

H_2 - событие, что оба шара красные;

H_3 - событие, что один шар белый и один красный.

Других вариантов быть не может, а одно из этих событий обязательно наступит, поэтому H_1, H_2, H_3 - полная группа событий. Тогда формула полной вероятности имеет вид

$$P(A)=P(H_1) \cdot P\left(\frac{A}{H_1}\right)+P(H_2) \cdot P\left(\frac{A}{H_2}\right)+P(H_3) \cdot P\left(\frac{A}{H_3}\right)$$

$$P(H_1)=P(BC)=P(B) \cdot P\left(\frac{C}{B}\right), \text{ где}$$

Найдем эти вероятности:

B - событие, что первый шар белый,

C - событие, что второй шар белый.

$$P(H_1)=\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}=\frac{1}{3}, \quad P\left(\frac{A}{H_1}\right)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$P(H_2)=P(\overline{B}\overline{C})=P(\overline{B}) \cdot P\left(\frac{\overline{C}}{\overline{B}}\right)=\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}=\frac{2}{15}, \quad P\left(\frac{A}{H_2}\right)=\frac{3}{10}$$

$$P(H_3)=P(BC+\overline{B}C)=P(BC)+P(\overline{B}C)=\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}+\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}=\frac{8}{15}, \quad P\left(\frac{A}{H_3}\right)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

Подставляя в формулу, получим

$$P(A)=\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}+\frac{2}{15} \cdot \frac{3}{10}+\frac{8}{15} \cdot \frac{2}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{25}+\frac{16}{75}=\frac{21}{50}=0,42$$

Событие A наступит с одной из гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, которые образуют полную группу. После того, как событие A наступило (или не наступило)

можно определить, как изменились вероятности гипотез по формуле Байеса

$$P\left(\frac{H_i}{A}\right) = \frac{P(H_i) \cdot P\left(\frac{A}{H_i}\right)}{P(A)}, \text{ где } i = 1, 2, \dots, n.$$

Пример 10. Мимо заправки проезжают легковых машин в 4 раза больше, чем грузовых. При этом заправляются каждая вторая грузовая машина и каждая пятая легковая. Найти вероятности того, что заправившаяся машина - легковая.

Решение. Составим гипотезу: H_1 - событие, что заправилась легковая машина, H_2 - событие, что заправилась грузовая. A - событие, что машина заправилась. Тогда по формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1) \cdot P\left(\frac{A}{H_1}\right) + P(H_2) \cdot P\left(\frac{A}{H_2}\right)$. Найдем эти вероятности и подставим в формулу.

$P(H_1) = \frac{4}{5}$ и $P(H_2) = \frac{1}{5}$, так как по условию легковых в 4 раза больше грузовых. $P\left(\frac{A}{H_1}\right) = \frac{1}{5}$ и $P\left(\frac{A}{H_2}\right) = \frac{1}{2}$, так как по условию из легковых заправляется каждая пятая, а из грузовых - каждая вторая. Тогда $P(A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{50}$. Теперь по формуле Байеса найдем

$$P\left(\frac{H_1}{A}\right) = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{13}{50}} = \frac{8}{13} \quad P\left(\frac{H_2}{A}\right) = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{13}{50}} = \frac{5}{13}$$

Исследуем эти вероятности. $P(H_1) = \frac{4}{5}$ - было и $P\left(\frac{H_1}{A}\right) = \frac{8}{13}$ - стало, то есть $P(H_1) > P\left(\frac{H_1}{A}\right)$ и $P(H_2) < P\left(\frac{H_2}{A}\right)$.

Вероятность для грузовой машины увеличилась, так как среди них заправляются 50%, а среди легковых только 20%.

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

Формула Бернулли

где n - число испытаний, m - число испытаний, в которых наступает событие A , P - вероятность наступления события A при одном испытании, $P_n(m)$ - вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит ровно m раз.

Пример 11. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) один раз; б) не менее двух раз.

Решение. а) По формуле Бернулли, где $n = 5$, $m = 1$, $P = \frac{1}{2}$, получим

$$P_5(1) = \frac{5!}{1!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{5}{32}$$

б) В - событие, что герб выпадет не менее двух раз.

$$P_5(0) = \frac{5!}{0!5!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

Найдем

События, что герб не выпадет, что герб выпадет один раз и В образуют

$$P_5(0) + P_5(1) + P(B) = 1 \quad P(B) = 1 - \frac{5}{32} - \frac{1}{32} = \frac{13}{16}$$

полную группу, поэтому . Отсюда

Для приближенного вычисления вероятности при больших значениях n используется локальная формула Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

, где $q = 1 - p$,

Функция $\varphi(x)$ - четная, и ее значения удобно находить из таблицы.

Пример 12. Монету бросают 100 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет 40 раз.

Решение. Так как $n = 100$, то используем локальную формулу Лапласа.

$$P = \frac{1}{2} \quad q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad m = 40 \quad x = \frac{40 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{-10}{5} = -2$$

. Отсюда

$$\varphi(-2) = \varphi(2) = 0,054$$

$$P_{100}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \cdot 0,054 = 0,011$$

Тогда

Для приближенного вычисления вероятности того, что событие А появится в n испытаниях от m_1 раз до m_2 раз, используется интегральная формула Лапласа

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

где $x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}}$, - функция Лапласа, которую находят из таблицы.

Пример 13. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 300 выстрелах мишень будет поражена не менее 150 и не более 250 раз.

Решение. Здесь $n = 300$ $m_1 = 150$ $m_2 = 250$ $P = 0,75$ $q = 0,25$

$$x_1 = \frac{150 - 300 \cdot 0,75}{\sqrt{300 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = \frac{-75}{30 \cdot 0,25} = -10 \quad x_2 = \frac{250 - 300 \cdot 0,75}{\sqrt{300 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = \frac{25}{30 \cdot 0,25} = \frac{10}{3} = 3,33$$

Отсюда

$$\Phi(-10) = -0,5 \quad \Phi(3,33) = 0,4995$$

Подставляя в интегральную формулу Лапласа, получим $P_{300}(150, 250) \approx 0,4995 - (-0,5) = 0,9995$

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Интенсивностью потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Вероятность появления k событий простейшего потока за время t определяется формулой:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

Пример 14. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту равно 2. Найти вероятность того, что за 3 минуты поступит: а) 5 вызовов; б) менее 3 вызовов; в) не менее 3 вызовов.

Решение. Здесь $\lambda = 2$ $t = 3$;

а) при $k = 5$ $P_3(5) \approx \frac{(2 \cdot 3)^5 e^{-6}}{5!} = \frac{6^5 e^{-6}}{120} = 0,162$;

б) при $k = 0$ $P_3(0) = e^{-6} = 0,0025$;

при $k = 1$ $P_3(1) = 6 \cdot e^{-6} = 0,015$;

при $k = 2$ $P_3(2) = \frac{6^2 e^{-6}}{2!} = 18 \cdot e^{-6} = 0,045$;

отсюда $P_3(k < 3) = P_3(0) + P_3(1) + P_3(2) = 0,0625$.

в) События «поступило менее 3 вызовов» и «поступило не менее 3 вызовов» - противоположны, поэтому $P_3(k \geq 3) = 1 - P_3(k < 3) = 1 - 0,0625 = 0,9375$

§2 Дискретные случайные величины

Закон распределения дискретной случайной величины

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

где x_i - случайные величины, p_i - их вероятности, причем $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Основными дискретными распределениями являются:

а) биномиальное; б) геометрическое; в) Пуассона.

Они имеют следующие законы распределения:

а)

x	0	1	...	k	...	n
p	q^n	npq^{n-1}	...	$C_n^k q^{n-k} p^k$	...	p^n

Возможными значениями случайной величины являются количество благоприятствующих исходов при n испытаниях. Вероятность вычисляется по формуле Бернулли.

б)

x	1	2	...	k	...	n
p	p	q	...	pq^{k-1}	...	pq^{n-1}

Возможными значениями случайной величины являются количество испытаний, которые надо провести до первого появления благоприятствующего исхода. Вероятности образуют геометрическую прогрессию.

в)

x	0	1	...	k	...	n
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	...	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

Это распределение возникает, когда n велико, а p - мало.

Возможными значениями случайной величины являются количество благоприятствующих исходов при n испытаниях. Вероятность вычисляется

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \lambda = np$$

по формуле Пуассона

Пример 15. Игральный кубик брошен 4 раза. Написать закон распределения числа появлений тройки.

Решение. Случайная величина может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4.

Найдем их вероятности по формуле Бернулли при $p = \frac{1}{6}$ и $n = 4$.

$$P_4(0) = \frac{4!}{0!4!} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \quad P_4(1) = 4 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{324}$$

$$P_4(2) = 6 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216} \quad P_4(3) = 4 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{324} \quad P_4(4) = \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{1296}$$

x	0	1	2	3	4
p	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = \frac{625}{1296} + \frac{125}{324} + \frac{25}{216} + \frac{5}{324} + \frac{1}{1296} = 1$$

Проверим:

Пример 16. Производится бросание монеты. Написать закон распределения числа бросаний монеты до первого появления герба.

$$p = 1/2 \quad \text{и} \quad q = 1/2$$

Решение. Это распределение геометрическое при

x	1	2	3	...	n	...
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...

Основными **числовыми характеристиками** случайной величины являются:

$$1) \text{ математическое ожидание } M(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n;$$

$$2) \text{ дисперсия } D(x) = M(x^2) - (M(x))^2;$$

$$3) \text{ среднее квадратическое отклонение } \delta(x) = \sqrt{D(x)};$$

$$4) \text{ асимметрия теоретического распределения } A_s = \frac{\mu_3}{\delta^3(x)};$$

$$5) \text{ эксцесс теоретического распределения } E_k = \frac{\mu_4}{\delta^4(x)} - 3,$$

где $\mu_k = M[(X - M(x))^k]$ - центральный момент порядка k .

Пример 17. Монета брошена 3 раза. Найти числовые характеристики случайной величины числа выпадения герба.

Решение. Сначала найдем закон распределения этой случайной величины.

$$P_3(0) = \frac{3!}{0!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad P_3(1) = 3 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P_3(2) = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} \quad P_3(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$$

Отсюда имеем следующий закон распределения:

x	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Теперь найдем числовые характеристики.

$$M(x) = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$D(x) = \frac{1}{8} \cdot 0^2 + \frac{3}{8} \cdot 1^2 + \frac{3}{8} \cdot 2^2 + \frac{1}{8} \cdot 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{24}{8} - \frac{9}{4} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\delta(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1,732}{2} = 0,866$$

Найдем центральные моменты порядка 3 и 4.

$$\mu_3 = M[(X - M(x))^3]$$

$$= M \left[\left(X - \frac{3}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{8} \left(0 - \frac{3}{2} \right)^3 + \frac{3}{8} \left(1 - \frac{3}{2} \right)^3 + \frac{3}{8} \left(2 - \frac{3}{2} \right)^3 + \frac{1}{8} \left(3 - \frac{3}{2} \right)^3 = 0$$

$$\mu_4 = M \left[(X - M(X))^4 \right] =$$

$$= M \left[\left(X - \frac{3}{2} \right)^4 \right] = \frac{1}{8} \left(0 - \frac{3}{2} \right)^4 + \frac{3}{8} \left(1 - \frac{3}{2} \right)^4 + \frac{3}{8} \left(2 - \frac{3}{2} \right)^4 + \frac{1}{8} \left(3 - \frac{3}{2} \right)^4 = \frac{21}{16}$$

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3(X)} = 0 \quad E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3 = \frac{\frac{21}{16}}{\frac{9}{16}} - 3 = -\frac{2}{3}$$

Тогда

Функцией распределения $F(x)$ называется функция, равная вероятности события $X < x$, то есть $F(x) = P(X < x)$.

График функции дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид, то есть является разрывной функцией.

Пример 18. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

x	1	3	6
p	0,3	0,5	0,2

Найти функцию распределения и начертить ее график.

Решение. При $x \leq 1$ $P(X < x) = 0 \Rightarrow F(x) = 0$;

при $1 < x \leq 3$ $P(X < x) = 0,3 \Rightarrow F(x) = 0,3$;

при $3 < x \leq 6$ $P(X < x) = 0,3 + 0,5 = 0,8 \Rightarrow F(x) = 0,8$;

при $x > 6$ $P(X < x) = 1 \Rightarrow F(x) = 1$.

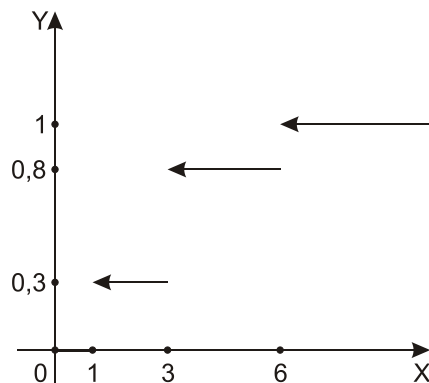


Рис. 4

Запишем полученный результат в виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ 0,3, & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 0,8, & \text{при } 3 < x \leq 6, \\ 1, & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

Теперь нарисуем ее график.

Вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале (a, b) равна $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$.

Пример 19. Найти вероятность того, что случайная величина из примера

17 примет значение, заключенное в интервале (2, 5).

Решение. Эта вероятность по формуле равна $P(2 \leq x \leq 5) = F(5) - F(2)$.
Найдем $F(2) = 0,3$ и $F(5) = 0,8$, поэтому $P(2 \leq x \leq 5) = 0,8 - 0,3 = 0,5$.

§3 Непрерывные случайные величины

Случайная величина называется **непрерывной**, если ее функция распределения $F(x)$ есть непрерывная функция.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют функцию $f(x)$, равную производной от функции распределения, то есть $f(x) = F'(x)$.

Тогда из формулы Ньютона-Лейбница следует, что

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Пример 20. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ x, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения и вероятность того, что данная случайная величина примет значение из интервала $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

Решение. Найдем $f(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 1, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases} \quad \text{или} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{при } x \in (0, 1] \end{cases}$$

$$P\left(\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 1 \cdot dx = x \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Тогда

Зная плотность распределения $f(x)$, можно найти функцию

распределения $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ по формуле.

Пример 21. Найти функцию распределения по данной плотности распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{\sin x}{2}, & \text{при } 0 < x \leq \pi, \\ 0, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Решение. При $x \leq 0$ $F(x) = 0$.

$$\text{При } 0 < x \leq \pi \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{\sin t}{2} dt = -\frac{\cos t}{2} \Big|_0^x = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\text{При } x > \pi \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2} dt + \int_{\pi}^x 0 dt = -\frac{\cos t}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Итак, функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1 - \cos x}{2}, & \text{при } 0 < x \leq \pi, \\ 1, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Основными непрерывными распределениями являются:

а) нормальное; б) равномерное; в) показательное.

Нормальным называют распределение, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

где $a = M(x)$ - математическое ожидание этого распределения,
 $\sigma^2 = D(x)$ - дисперсия.

Равномерным называют распределения, которые описываются

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b], \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b] \end{cases}$$

плотностью

Показательным называют распределение, которое описывается

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0, \lambda > 0, \end{cases}$$

плотностью

где $1/\lambda = M(x)$ - математическое ожидание этого распределения.

Плотность распределения $f(x)$ имеет свойство $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Числовые характеристики непрерывных случайных величин определяются по формулам:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M(x))^2 \quad \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^k f(x) dx$$

Пример 22. Найти числовые характеристики непрерывной случайной

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{при } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

величины x , с плотностью распределения

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Решение.

$$D(x) = \int_0^1 x^2 f(x) dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \quad \sigma = \sqrt{D(x)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Найдем центральные моменты порядка 3 и 4.

$$\mu_3 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 dx = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^4}{4} \Big|_0^1 = 0 \quad \mu_4 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^4 dx = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{80}$$

$$A_s = \frac{\mu_3}{\delta^3(x)} = \frac{0}{\delta^3(x)} = 0 \quad E_k = \frac{\mu_4}{\delta^4(x)} - 3 = \frac{\frac{80}{1}}{144} - 3 = \frac{9}{5} - 3 = -\frac{6}{5}$$

Тогда

Для нормально распределенной случайной величины вероятность того, что ее значение принадлежит интервалу (α, β) , равна

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\delta}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\delta}\right), \text{ где } \Phi(x) - \text{функция Лапласа (§1).}$$

Пример 23. Плотность распределения случайной величины имеет вид $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{50}}$. Найти вероятность того, что x примет значение, принадлежащее интервалу $(-5, 15)$.

Решение. Из определения $f(x)$ следует, что $a = M(x) = 10$ и $\delta(x) = 5$. Отсюда по формуле найдем нужную вероятность:

$$\begin{aligned} P(-5 < x < 15) &= \Phi\left(\frac{15-10}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-5-10}{5}\right) = \Phi(1) - \Phi(-3) = \Phi(1) + \Phi(3) = \\ &= 0,3412 + 0,4987 = 0,84. \end{aligned}$$

Значения $\Phi(1)$ и $\Phi(3)$ найдены из таблицы.

Для равномерно распределенной случайной величины вероятность того, что ее значение принадлежит интервалу (α, β) , равна

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Эта же вероятность для показательного распределения равна $P(\alpha < x < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$.

Пример 24. Случайная величина распределена по закону

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 4e^{-4x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Найти числовые характеристики и вероятность того, что значение попадет в интервал $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 4 \int_0^{\infty} xe^{-4x}dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = 4e^{-4x}dx \\ du = dx \\ v = -e^{-4x} \end{array} \right] =$$

Решение.

$$= -xe^{-4x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-4x}dx = -\frac{1}{4}e^{-4x} \Big|_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{4} = 0,25$$

$$D(x) = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(x)]^2 = 4 \int_0^{\infty} x^2 e^{-4x} dx - (0,25)^2 = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = 4e^{-4x} dx \\ du = 2x dx \\ v = -e^{-4x} \end{array} \right] = -x^2 e^{-4x} \Big|_0^{\infty} +$$

$$+ 2 \int_0^{\infty} x e^{-4x} dx - 0,0625 = \frac{1}{2} M(x) - 0,0625 = \frac{1}{2} \cdot 0,25 - 0,0625 = 0,125 - 0,0625 = 0,0625$$

$$\delta = \sqrt{D(x)} = 0,25$$

$$P\left(0 < x < \frac{1}{4}\right) = e^{-4 \cdot 0} - e^{-4 \cdot \frac{1}{4}} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

Найдем вероятность

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время t , то есть $R(t) = P(T > t)$.

Показательным законом надежности называют функцию надежности, когда $R(t) = e^{-\lambda t}$, где λ - интенсивность отказов.

Пример 25. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону $f(x) = 0,01 \cdot e^{-0,01x}$, t - в часах. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 часов.

Решение. По условию $\lambda = 0,01$. Отсюда по формуле $R(100) = e^{-0,01 \cdot 100} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37$

Искомая вероятность равна 0,37.

§4 Математическая статистика

1 Точечные оценки неизвестных параметров

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом.

Точечная оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру, называется *несмещенной*. Иначе точечная оценка называется *смещенной*.

Для выборки				
x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

$$\bar{x}_B = \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i \right) / n$$

выборочная средняя

служит несмещенной оценкой

$$n = \sum_{i=1}^k n_i$$

генеральной средней, где x_i - варианты, n_i - частоты, - объем выборки.

$$D_B = \left(\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2 \right) / n$$

Выборочная дисперсия генеральной дисперсии.

служит смещенной оценкой

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит исправленная

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B$$

выборочная дисперсия

Пример 1. Для выборки

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Найти выборочную среднюю и исправленную дисперсию.

Решение. $\bar{x}_B = (16 \cdot 2 + 12 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 14 \cdot 10) / 50 = 2,76$

$$S^2 = \frac{50}{49} \cdot \frac{(16 \cdot 3,76^2 + 12 \cdot 0,76^2 + 8 \cdot 1,24^2 + 14 \cdot 4,24^2)}{50} = \frac{(226,2 + 6,9 + 12,3 + 251,7)}{49} = \frac{497,1}{49} \approx 10,14$$

Метод моментов. Для точечной оценки неизвестных параметров приравнивают теоретические моменты соответствующим эмпирическим моментам.

Пример 2. Случайная величина x подчинена нормальному закону распределения и имеет выборку

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,2	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

Найти методом моментов точечные оценки неизвестных параметров α (математического ожидания) и δ (среднего квадратического отклонения).

$$\nu_k = \left(\sum_{i=1}^m n_i x_i^k \right) / n$$

Решение.

- начальный момент порядка k . Приравняем

теоретические и эмпирические моменты: $V_1 = M_1$, $\mu_2 = m_2$. Отсюда $\alpha^* = M(x) = \bar{x}_B$, $\delta^* = \sqrt{D_B}$.

Как в примере 1, найдем $\bar{x}_B$ и D_B .

$$\bar{x}_B = (6 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,5 + 26 \cdot 0,7 + 25 \cdot 0,9 + 30 \cdot 1,1 + 26 \cdot 1,3 + 21 \cdot 1,5 + 24 \cdot 1,7 + 20 \cdot 1,9 + 8 \cdot 2,2 + 5 \cdot 2,3) / 200 = (1,8 + 4,5 + 18,2 + 22,5 + 33 + 33,8 + 31,5 + 40,8 + 38 + 17,6 + 11,5) / 200 = 253,2 / 200 = 1,266$$

$$D_B = \frac{(6 \cdot 0,3^2 + 9 \cdot 0,5^2 + 26 \cdot 0,7^2 + 25 \cdot 0,9^2 + 30 \cdot 1,1^2 + 26 \cdot 1,3^2 + 21 \cdot 1,5^2 + 24 \cdot 1,7^2 + 20 \cdot 1,9^2 + 8 \cdot 2,2^2 + 5 \cdot 2,3^2)}{200} - 1,266^2 = (0,54 + 2,25 + 12,74 + 20,25 + 36,3 + 43,94 + 47,25 + 69,36 + 72,2 + 38,72 + 26,45) / 200 - 1,603 = 370 / 200 - 1,603 = 1,850 - 1,603 = 0,247$$

$$\delta^* = \sqrt{D_B} = 0,497$$

Для точечной оценки неизвестных параметров существуют еще методы наибольшего правдоподобия и наименьших квадратов.

2 Интервальные оценки неизвестных параметров

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами - концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют интервал, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью γ .

Для случайной величины, распределенной по нормальному закону, доверительными интервалами являются: для оценки математического

ожидания a $X_B - \Delta < a < x_B + \Delta$, где $\Delta = \frac{t\delta}{\sqrt{n}}$ - точность оценки при известном δ , а $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, $\Phi(t)$ - функция Лапласа; $\Delta = \frac{tS}{\sqrt{n}}$ при неизвестном δ , а t определяют из таблицы.

Для оценки среднего квадратического отклонения δ
 $\max(0, S(1-q)) < \delta < S(1+q)$,

где q определяют из таблицы.

Пример 3. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,9 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака x генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\delta = 4$, выборочная средняя $X_B = 13,6$ и объем выборки $n = 36$.

$$\Delta = \frac{t\delta}{\sqrt{n}} = \frac{t \cdot 4}{\sqrt{36}} = \frac{2t}{3}$$

Решение. Требуется найти точность оценки

$$\Phi(t) = \frac{0,9}{2} = 0,45$$

Теперь найдем t из соотношения

$$\Delta = \frac{2 \cdot 1,645}{3} = \frac{3,29}{3} = 1,1$$

Из таблицы находим $t = 1,645$,

Подставляя в формулу $X_B - \Delta < a < x_B + \Delta$, получим доверительный интервал $12,5 < a < 14,7$.

Пример 4. Из генеральной совокупности извлечена выборка (пример 2). Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности с помощью доверительного интервала ($n = 200$).

Решение. Выборочную среднюю и исправленное среднее квадратическое отклонение S найдем по формулам (как в примере 2).

$$X_B = 1,266, \quad S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{200}{199} \cdot 0,247 = 0,248, \quad S = 0,498$$

Теперь найдем t из таблицы по $\gamma = 0,95$ и $n = 200$, $t = 1,96$.

$$\Delta = \frac{t \cdot S}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 0,498}{\sqrt{200}} = 0,069$$

Отсюда

Подставляя в формулу, получим $1,266 - 0,069 < a < 1,266 + 0,069$

$$1,197 < a < 1,335$$

Пример 5. Произведено 12 измерений одним прибором некоторой величины, исправленное среднее квадратическое отклонение $S = 0,8$. Найти точность прибора с надежностью 0,95. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Решение. Точность прибора характеризуется средним квадратичным отклонением δ случайных ошибок измерений. Поэтому найдем доверительный интервал для δ . Из таблицы найдем q по $\gamma = 0,95$ и $n = 12$, $q = 0,55$. По формуле $S(1-q) < \delta < S(1+q)$ получим

Подставляя в формулу $0,8(1-0,55) < \delta < 0,8(1+0,55)$ получим $0,36 < \delta < 1,24$.

Глава 15

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§1 Комплексные числа и действия над ними

Выражение вида $z = x + iy$, где x, y - действительные числа, а i - мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$, называется алгебраической формой комплексного числа. При этом x называется действительной частью комплексного числа и обозначается $\operatorname{Re} z = x$, а y называется мнимой частью комплексного числа и обозначается $\operatorname{Im} z = y$.

Комплексное число $z_1 = x_1 + iy_1$ равно комплексному числу $z_2 = x_2 + iy_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Комплексное число $z = x - iy$ называется сопряженным к комплексному числу $z = x + iy$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ - два комплексных числа.

1. Суммой $z_1 + z_2$ называется комплексное число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

2. Произведением комплексного числа z_1 на действительное число α называется комплексное число $\alpha z_1 = \alpha x_1 + \alpha y_1 i$.

3. Произведением $z_1 z_2$ называют комплексное число, которое получается перемножением чисел $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$ как алгебраических двучленов, учитывая, что $i^2 = -1$:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2).$$

Заметим, что к комплексным числам применимы все формулы сокращенного умножения. В частности, перемножая комплексно сопряженные числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, получим, что

$$z \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2.$$

4. Для нахождения частного z_1/z_2 , где $z_2 \neq 0$, надо числитель и знаменатель этой дроби умножить на число, сопряженное знаменателю, т.е. $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i. \end{aligned}$$

Полученное комплексное число называется частным от деления комплексного числа z_1 на комплексное число z_2 .

$$z = \frac{(1-i)^2}{(2+i)^3} - 3(2-5i) + (1-2i)(4-i)$$

Пример 1. Вычислить

$$z = \frac{-2i}{8+12i-6-i} - 6+15i+4-8i-i-2 = \frac{-2i}{2+11i} - 4+6i =$$

Решение.

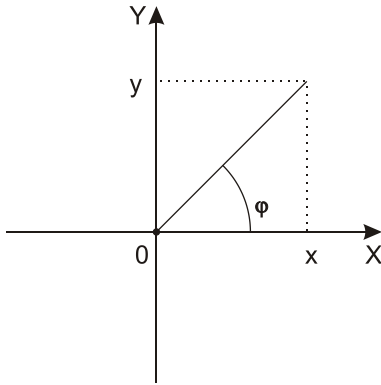


Рис. 5

$$= \frac{-2i(2-11i)}{2^2+11^2} - 4+6i = \frac{-4i-22}{125} - 4+6i = \left(-\frac{22}{125}-4\right) + \left(-\frac{4}{125}+6\right)i = -\frac{522}{125} + \frac{746}{125}i$$

Комплексное число $z = x + iy$ изображают точкой с координатами (x, y) на плоскости XOY. Если провести из начала координат вектор (x, y) , то его длина r называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z| = r$, а угол, который этот вектор составляет с положительным направлением оси OX, - аргументом комплексного числа - и обозначается $\varphi = \text{Arg}z$, причем $\text{Arg}z = \arg z + 2\pi k$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где $\arg z$ - главное значение аргумента, определяемое условиями $-\pi < \arg z \leq \pi$, где

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

(1)

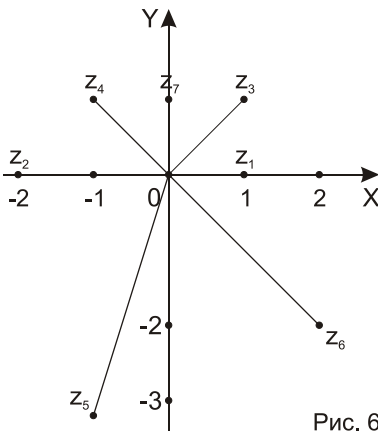


Рис. 6

Вычислив $r = |z|$ и $\varphi = \text{Arg} z$, любое комплексное число z можно записать в тригонометрической форме, подставив $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$ в выражение $x + iy$. Таким образом, получим $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Пример 2. Представить числа $z_1 = 1$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = -1 + i$, $z_5 = -1 - 3i$, $z_6 = 2 - 2i$, $z_7 = i$ в тригонометрической форме.

Решение. Изображаем заданные комплексные числа точками плоскости XOY (рис.6).

Для нахождения $\varphi = \arg z$ воспользуемся формулой (I).

1. Имеем $z_1 = 1 = 1 + 0i$. Для него $r_1 = 1$; $\varphi_1 = 0$, откуда $z_1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$.

2. $z_2 = -2 = -2 + 0i$, поэтому $r_2 = 2$, $\varphi_2 = \pi$, откуда $z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$.

3. $z_3 = 1 + i$, поэтому $r_3 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi_3 = \arctg \frac{1}{1} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$, откуда $z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$,

4. $z_4 = -1 + i$, $r_4 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi_4 = \pi + \arctg \frac{1}{-1} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$, поэтому $z_4 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$;

5. $z_5 = -1 - 3i$, $r_5 = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$, $\varphi_5 = -\pi + \arctg \frac{-3}{-1} = -\pi + \arctg 3$, $z_5 = \sqrt{10} (\cos(\arctg 3 - \pi) + i \sin(\arctg 3 - \pi))$.

6. $z_6 = 2 - 2i$, $r_6 = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi_6 = \arctg \frac{-2}{2} = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $z_6 = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$.

7. $z_7 = i = 0 + 1i$, $\varphi_7 = \frac{\pi}{2}$, $r_7 = 1$, $z_7 = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$.

Положим по определению $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Тогда $z = x + iy =$

$= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$, и выражение $z = re^{i\varphi}$ называется показательной формой комплексного числа.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

1. Умножение. Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тогда

$$z_1 z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) =$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$
 то есть при умножении модули комплексных чисел перемножаются, а аргументы - складываются.

2. Деление. Пусть $z_2 \neq 0$. Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

3. Возведение комплексного числа в степень. Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (2)$$

4. Извлечение корней из комплексного числа.

Существует ровно n значений корней степени n из z . Они могут быть вычислены по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ где } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3)$$

Обозначим эти корни $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$.
 $(-1 + i)^{100}$.

Пример 3. Вычислить

Решение. Число $z = -1 + i$ представим в тригонометрической форме (см. пример 2). Тогда по формуле получим:

$$z^{100} = (\sqrt{2})^{100} \left(\cos \left(100 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(100 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) \right) =$$

$$= 2^{50} (\cos 75\pi + i \sin 75\pi) = 2^{50} (\cos(74\pi + \pi) + i \sin(74\pi + \pi)) = 2^{50} (\cos \pi + i \sin \pi) = -2^{50}.$$

Пример 4. Вычислять все значения $\sqrt[4]{2-2i}$.

Решение. Число $z = 2-2i$ представим в тригонометрической форме (см.

$$z = \sqrt{8} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

пример 2.):

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{\sqrt{8}} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4} \right)$$

Согласно формуле (3) имеем: $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\varepsilon_0 = \sqrt[8]{8} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{16} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{16} \right) \right) = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{\pi}{16} - i \sin \frac{\pi}{16} \right).$$

При $k = 0$ получим

$$\text{При } k = 1: \quad \varepsilon_1 = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi}{4} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi}{4} \right) = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{7\pi}{16} + i \sin \frac{7\pi}{16} \right).$$

$$\text{При } k = 2: \quad \varepsilon_2 = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 4\pi}{4} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 4\pi}{4} \right) = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{15\pi}{16} + i \sin \frac{15\pi}{16} \right).$$

$$\text{При } k = 3: \quad \varepsilon_3 = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 6\pi}{4} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 6\pi}{4} \right) = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{23\pi}{16} + i \sin \frac{23\pi}{16} \right).$$

Напомним, как находятся корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом: $z^2 + 2z + 5 = 0$.

$$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2\sqrt{-1} = -1 \pm 2i$$

Уравнение $z^n = a$, где $a \in (-\infty, \infty)$ имеет ровно n комплексных решений: $z = \sqrt[n]{a}$.

Пример 5. Решить уравнение: $z^3 = -8$.

Решение. $z^3 = -8$, поэтому $z = \sqrt[3]{-8}$. Число -8 представим в тригонометрической форме: $-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$.

$$\sqrt[3]{-8} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

$$\varepsilon_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$$

При $k = 0$

$$\varepsilon_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3} \right) = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2.$$

При $k = 1$

$$\varepsilon_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) =$$

При $k = 2$

$$= 2 \left(\cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 - i\sqrt{3}$$

§2 Функции комплексного переменного

Пусть комплексное переменное $z = x + iy$ принимает значения из некоторого множества A . Если каждому значению $z \in A$ можно поставить в соответствие одно или несколько значений другого комплексного переменного $w = u + iv$, то комплексное переменное w называют функцией комплексного переменного z и обозначают $w = f(z)$. При этом, если каждому $z \in A$ соответствует единственное значение w , то говорят, что $w = f(z)$ - однозначная функция; если же хотя бы одному $z \in A$ соответствует несколько значений $w = f(z)$, то $w = f(z)$ - многозначная функция. Если

$w = u + iv$ является функцией от $z = x + iy$, то u и v являются функциями от x и y , т.е. $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ и можно записать $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ - функции действительного переменного, являющиеся соответственно действительной и мнимой частью функции $w = f(z)$.

$$w = zz + \frac{1}{z^2}$$

Пример 6. Выделить действительную и мнимую части функции

Решение. $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ $zz = x^2 + y^2$

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \quad \frac{1}{z^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2 - y^2 + 2xyi)(x^2 - y^2 - 2xyi)} =$$

$$= \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$w = x^2 + y^2 + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(x^2 + y^2)^3 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Отсюда

$$u(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^3 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad v(x, y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

т.е.

Определение. Однозначная функция комплексного переменного $w = f(z)$ имеет при $z \rightarrow z_0$ конечный предел b , если $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $0 < |z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - b| < \varepsilon$ (z_0 и b - комплексные числа). Обозначается предел так: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = b$.

Функция $f(z)$ называется **непрерывной** в точке z_0 , если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Определение функций e^z , $\sin z$, $\cos z$, chz , shz .

Эти функции комплексного переменного определяются как суммы следующих степенных рядов, сходящихся во всей плоскости комплексного переменного:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Для функций e^z , $\sin z$, $\cos z$ справедливы формулы Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

откуда

Функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ определяются равенствами:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

При этом выполняется следующие соотношения:

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz \quad \cos z = \operatorname{ch} iz \quad \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz \quad \operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz$$

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz \quad \operatorname{ch} z = \cos iz \quad \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz \quad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz$$

Функция $\operatorname{Ln} z$ является многозначной и определяется как функция, обратная показательной:

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi k) \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (6)$$

Главным значением $\operatorname{Ln} z$ называется то значение, которое получается при $k = 0$.

Обратные тригонометрические функции определяются по формулам:

$$\operatorname{Arc} \sin z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{1 - z^2} \right) \quad \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$\operatorname{Arc} \cos z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad \operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}$$

Все эти функции являются многозначными.

Общая степенная функция z^a , где $a = \alpha + i\beta$, определяется формулой $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$ и также является многозначной.

Общая показательная функция a^z определяется равенством $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$, где $a = \alpha + i\beta$.

Пример 7. Найти значения функции $w = e^z$ в точке $z_0 = \pi(1 - i)$.

Решение. Воспользуемся формулой (4).

$$w(z_0) = e^{\pi(1-i)} = e^{\pi - \pi i} = e^{\pi} \cdot e^{-\pi i} = e^{\pi} (\cos \pi - i \sin \pi) = -e^{\pi}$$

Имеем

Пример 8. Вычислить $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i)$.

Решение. Найдем модуль и аргумент числа $z_0 = \sqrt{3} + i$.

$$\operatorname{Имеем} \quad |z_0| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2, \quad \arg z_0 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{Ln} z_0 = \ln 2 + i \frac{\pi}{6} + 2\pi k i \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

тогда из формулы (6) получим:

Пример 9. Найти $\operatorname{Arc} \sin i$.

Решение. Пусть $z_0 = i$, $|z_0| = 1$, $\arg z_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{Arc} \sin z_0 = -i \operatorname{Ln} \left(z_0 + \sqrt{1 - z_0^2} \right) = -i \operatorname{Ln} \left(1 + \sqrt{2} \right) = -i \left(\ln(\sqrt{2} - 1) + (0 + 2\pi k)i \right) =$$

$$= 2\pi k - i \ln(\sqrt{2}-1) \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

§3 Дифференцирование функции комплексного переменного

Определение. Производной функции комплексного переменного $w = f(z)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ к приращению аргумента Δz , когда Δz стремится к нулю произвольным способом, т.е.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Функция $f(z)$ называется аналитической в точке z_0 , если она дифференцируема в точке z_0 и некоторой ее окрестности. Если функция аналитична в каждой точке области M , говорят, что она аналитична в этой области.

Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в области M , то в каждой точке этой области выполняются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Если в некоторой точке области функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы как функции действительных переменных и выполнены соотношения (8), то $f(z)$ является дифференцируемой в этой точке. В этом случае

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$

Пример 10. Является ли функция $f(z) = z^2 \bar{z}$ аналитической?

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции $f(z)$.
 $f(z) = z^2 \bar{z} = (x + iy)^2 (x - iy) = (x + iy)(x^2 + y^2) = (x^3 + xy^2) + i(x^2y + y^3)$.

Таким образом, $u(x, y) = x^3 + xy^2$, $v(x, y) = x^2y + y^3$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

Проверим выполнение условий (8):

$$3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 \quad \text{лишь при} \quad y = \pm x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2xy \quad 2xy = -2xy \quad \text{лишь при} \quad x = 0 \quad \text{или} \quad y = 0$$

Итак, оба условия (8) выполняются только при $x = y = 0$, т.е. $f(z)$ является дифференцируемой в одной точке (0,0) и нигде не аналитична.

Производные элементарных функций комплексного переменного вычисляются так же, как и для действительного аргумента.

Пример 11. Вычислить $f'(z_0)$, где $f(z) = \cos^2(3z)$, $z_0 = \frac{\pi}{6}(i+1)$.

Решение. Функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости.

$$f'(z) = 2 \cos 3z \cdot (-\sin 3z) \cdot 3 = -6 \sin 3z \cdot \cos 3z = -3 \sin 6z$$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= -3 \sin 6 \left(\frac{\pi}{6}(i+1) \right) = -3 \sin (\pi i + \pi) = -3 \sin \pi i \cdot \cos \pi - 3 \sin \pi \cdot \cos \pi i = \\ &= 3(\operatorname{ish}(i \cdot \pi i)) \cdot (-1) = 3i \cdot \operatorname{sh}(-\pi) \cdot (-1) = 3i \operatorname{sh} \pi \end{aligned}$$

Определение. Функция $\Phi(x, y)$ называется гармонической в области M , если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ - аналитична в области M , то функции u и v являются гармоническими.

Пример 12. Проверить, может ли функция $\Phi(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ служить действительной или мнимой частью некоторой аналитической функции?

Решение. Проверим выполнение условий (10):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{xy \cdot 2x}{x^2 + y^2} = y \cdot \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{2xy}{x^2 + y^2} + \frac{4xy(x^2 + y^2) - 2x^2 y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3 y + 2xy^3 + 4xy^3 - 4x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{2x^3 y + 6xy^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} + \frac{4xy(x^2 + y^2) - 2xy^2 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{6x^3 y + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{2xy(4x^2 + 4y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{8xy}{x^2 + y^2}$$

Видно, что условия (10) не выполняются ни при каких условиях x и y . Следовательно, $\Phi(x, y)$ не может являться действительной или мнимой частью некоторой аналитической функции.

Пример 13. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по её заданной действительной части $u(x, y) = 2e^x \cos y$.

Проверим корректность постановки задачи, т.е. выполнение условия (10):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cdot \cos y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^x \cdot \cos y \quad ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \cdot \sin y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2e^x \cdot \cos y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

т.е. аналитическая функция с действительной частью $u(x, y)$ существует.

Для нахождения мнимой части $v(x, y)$ воспользуемся формулами (8).

$$\text{Из условия задачи имеем } u = 2e^x \cdot \cos y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cdot \cos y$$

но тогда, так как в силу первого условия (8) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, имеем $\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \cdot \cos y$, откуда, интегрируя находим:

$$v(x, y) = \int 2e^x \cdot \cos y dy = 2e^x \sin y + \varphi(x) \quad (II)$$

Для нахождения неизвестной функции $\varphi(x)$ используем второе из условий

$$(8): \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{Из условий задачи находим } \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \sin y$$

а дифференцируя равенство (II)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \sin y + \varphi'(x)$$

по x , получаем $-2e^x \sin y = -2e^x \sin y - \varphi'(x)$, откуда, подставляя во второе равенство (8), имеем $\varphi'(x) = 0$ или $\varphi(x) = C = \text{const}$, т.е.

$$\text{Подставляя в формулу (II) } \varphi(x) = C, \text{ получим } v(x, y) = 2e^x \cdot \sin y + C$$

Окончательно имеем

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = 2e^x \cos y + i(2e^x \sin y + C) = 2e^x (\cos y + i \sin y) + iC = 2e^x e^{iy} + iC = 2e^{x+iy} + iC = 2e^z + iC$$

Пример 14. Восстановить аналитическую функцию по её заданной мнимой части: $v(x, y) = 4 \ln(x^2 + y^2) + x$

Решение. Проверим выполнение равенства (10) для функции v :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{8x}{x^2 + y^2} + 1 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{8(x^2 + y^2) - 8x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{8(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{8y}{x^2 + y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{8(x^2 + y^2) - 8y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{8(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

таким образом,

Для определения действительной части $u(x, y)$ функции $f(z)$ воспользуемся условиями (8).

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Из второго равенства

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{8x}{x^2 + y^2} + 1$$

Из условия задачи находим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{8x}{x^2 + y^2} - 1$$

Получаем уравнение:

$$u(x, y) = -\int \frac{8x dy}{x^2 + y^2} - \int dy = -\frac{8x}{x} \arctg \frac{y}{x} - y + \varphi(x) = -y - 8 \arctg \frac{y}{x} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (12)$$

Для определения $\varphi(x)$ воспользуемся первым равенством (8):

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{8y}{x^2 + y^2}$$

Из условия задачи находим

Дифференцируя равенство (12), получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -8 \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) + \varphi'(x) = \frac{8y}{x^2 + y^2} + \varphi'(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Подставляя равенство , получим:

$$\frac{8y}{x^2 + y^2} + \varphi'(x) = \frac{8y}{x^2 + y^2} \quad \varphi'(x) = 0 \quad \varphi(x) = C = const$$

$$u(x, y) = -y - 8 \arctg \frac{y}{x} + C + i(4 \ln(x^2 + y^2) + x) =$$

откуда

$$= -y + xi + \left(-8 \arctg \frac{y}{x} + i \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right) + C =$$

$$= i(x + iy) + 8i \left(i \arctg \frac{y}{x} + \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) + C =$$

$$= iz + 8i(i \arg z + \ln |z|) + C = C + iz + 8i \ln z$$

§4 Интегрирование функции комплексного переменного

Пусть функция $w=f(z)$ непрерывна в некоторой области D . Пусть γ - гладкая кривая, лежащая в D .

Рассмотрим дугу этой кривой с началом в точке z_0 и концом в точке z . Разделим эту дугу на n частей произвольными точками $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = z$, расположенными на линии γ .

Составим сумму $S_n = f(\epsilon_0)\Delta z_0 + f(\epsilon_1)\Delta z_1 + \dots + f(\epsilon_{n-1})\Delta z_{n-1}$,

где $\Delta z = z_{k+1} - z_k$, $\epsilon_k \in (z_k, z_{k+1})$ произвольна.

Пусть $\lambda = \max |\Delta z_k|$. Тогда предел S_n при $n \rightarrow \infty$ и $\lambda \rightarrow 0$, если он существует, называется интегралом функции $f(z)$ по дуге кривой γ ,

заклученной между точками z_0 и z_1 : $\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Если $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то $\int_{\gamma} f(z) dz$ сводится к сумме двух криволинейных интегралов от действительных функций $u(x, y)$ по следующей формуле:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\gamma} (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i \int_{\gamma} (v(x, y)dx + u(x, y)dy) \quad (13)$$

Если контур γ - кусочно гладкий и состоит из гладких контуров γ_1, γ_2 , т.е. $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, то $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$.

Если $f(z) = \alpha f_1(z) + \beta f_2(z)$, то $\int_{\gamma} f(z) dz = \alpha \int_{\gamma} f_1(z) dz + \beta \int_{\gamma} f_2(z) dz$.

Если $f(z)$ - аналитическая функция в односвязной области D , то значение интеграла, взятого по произвольной кусочно-гладкой линии γ , принадлежащей области D , не зависит от линии γ , а зависит лишь от начальной и конечной точек этой линии.

Теорема Коши. Для любой аналитической в некоторой односвязной области D функции $f(z)$ интеграл $\int_C f(z) dz$ взятый по любому замкнутому контуру C , равен нулю.

Если кривая γ задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, где $t_0 \leq t \leq t_1$, то $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) z'(t) dt$, где $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$.

Если функция $f(z)$ - аналитична в односвязной области D , содержащей точки z_0 и z_1 , то $\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0)$, где $F(z)$ - первообразная функции $f(z)$, т.е. $F'(z) = f(z)$.

Для нахождения первообразных аналитических функций применяются обычные формулы интегрирования.

$$J = \int_i^{4+3i} (ze^z + z^2 + 1) dz$$

Пример 15. Вычислить:

Решение. Подынтегральная функция $f(z) = ze^z + z^2 + 1$ является аналитической во всей комплексной плоскости.

$$J = \int_i^{4+3i} ze^z dz + \int_i^{4+3i} z^2 dz + \int_i^{4+3i} 1 dz$$

Для нахождения первообразной первого из этих интегралов воспользуемся формулой интегрирования по части:

$$\int ze^z dz = ze^z - \int e^z dz = ze^z - e^z, \quad z = u, \quad e^z dz = dv, \quad du = dz, \quad v = e^z$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J &= \left(ze^z - e^z + \frac{z^3}{3} + z \right) \Big|_i^{4+3i} = (4+3i)e^{4+3i} - e^{4+3i} + \frac{(4+3i)^3}{3} + 4+3i - ie^i + e^i - \frac{i^3}{3} - i = \\ &= e^{4+3i}(3+3i) + \frac{64+144i-108-27i}{3} + 4+3i + (1-i)e^i + \frac{i}{3} - i = \\ &= 3e^4 e^{3i}(1+i) + (1-i)e^i - \frac{32}{3} + \frac{124}{3}i = \\ &= 3e^4(\cos 3 + i \sin 3)(1+i) + (1-i)(\cos 1 + i \sin 1) - \frac{32}{3} + \frac{124}{3}i = \\ &= 3e^4(\cos 3 - \sin 3 + i \sin 3 + i \cos 3) + (\cos 1 + \sin 1 - i \cos 1 + i \sin 1) - \frac{32}{3} + \frac{124}{3}i = \\ &= \left(3e^4 \cos 3 - 3e^4 \sin 3 + \cos 1 + \sin 1 - \frac{32}{3} \right) + i \left(3e^4 \sin 3 + 3e^4 \cos 3 - \cos 1 + \sin 1 + \frac{124}{3} \right). \end{aligned}$$

Пример 6. Вычислить $J = \int (1-z)dz$, по параболе $y = x^2$, соединяющей точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 2 + 4i$

Решение. Функция $f(z) = 1 - z$ не является аналитической. Действительно, $f(z) = 1 - (x - iy) = 1 - x + iy$, $u(x, y) = 1 - x$, $v(x, y) = y$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$. Проверим выполнения условий Коши-Римана (8): $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, так что первое из этих условий не выполняется и функция $f(z)$ не является аналитической.

$$J = \int (1-x)dx - ydy + i \int ydx + (1-x)dy = J_1 + iJ_2.$$

Вычислим каждый из интегралов J_1 и J_2 .

Имеем: $\gamma: y = x^2, \quad dy = 2x dx, \quad 0 \leq x \leq 2$, поэтому

$$J_1 = \int_0^2 (1-x-x^2 \cdot 2x) dx = \int_0^2 (1-x-2x^3) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^2 = -8,$$

$$J_2 = \int_0^2 (x^2 + (1-x) \cdot 2x) dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

$$J = -8 + \frac{4}{3}i$$

Отсюда

$$J = \int_{\gamma} z^2 \cdot z dz$$

Пример 17. Вычислить $\int_{\gamma} z^2 \cdot z dz$, если γ - отрезок прямой, соединяющий точки $z_0 = 0$ и $z_1 = -2 - 2i$.

Решение. Подынтегральная функция не является аналитической (проверка предоставляется читателю).

Запишем z в показательной форме: $z = re^{i\varphi}$, тогда $z = re^{-i\varphi}$, $dz = e^{i\varphi} dr + rie^{i\varphi} d\varphi$.

$$\varphi = -\frac{3\pi}{4} = \text{const}, \quad d\varphi = 0, \quad 0 \leq r \leq 2\sqrt{2}.$$

Вдоль данного отрезка интегрирования
Поэтому получим:

$$J = \int_0^{2\sqrt{2}} r^2 e^{2i\varphi} r e^{-i\varphi} e^{i\varphi} dr = \int_0^{2\sqrt{2}} r^3 e^{2i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} dr = e^{-\frac{3\pi i}{2}} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2\sqrt{2}} = \left(\cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \cdot \frac{64}{4} = 16i$$

$$J = \int (\Im + z^2) dz$$

Пример 18. Вычислить $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$, где γ - дуга окружности $|z| = 2$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение. Функция $f(z) = 3 + z^2$ не является аналитической (проверьте!).
Представим z в показательной форме: $z = re^{i\varphi}$. Тогда имеем: $z = re^{-i\varphi}$,
 $dz = e^{i\varphi} dr + ire^{i\varphi} d\varphi$.

Вдоль контура γ : $r = |z| = 2$, $dr = 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\Im + r^2 e^{-2i\varphi}) ire^{i\varphi} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (6ie^{i\varphi} + 8ie^{-i\varphi}) d\varphi = 6e^{i\varphi} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - 8e^{-i\varphi} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= 6e^{i\pi/2} - 6e^{-i\pi/2} - 8e^{-i\pi/2} + 8e^{i\pi/2} = 14e^{i\pi/2} - 14e^{-i\pi/2} = \\ &= 14 \cos \frac{\pi}{2} + 14i \sin \frac{\pi}{2} - 14 \cos \frac{\pi}{2} + 14i \sin \frac{\pi}{2} = 28i \end{aligned}$$

§5 Интегральная формула Коши

Если функция $f(z)$ является аналитической в области D , ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром C , и на самом контуре, то справедлива интегральная формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0}, \quad z_0 \in D \quad (14)$$

Эта формула позволяет вычислить некоторые интегралы.

Пример 19. Вычислить интеграл $\int_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z+1} dz$.

Решение. Внутри окружности $|z|=3$ знаменатель обращается в нуль в точке $z = -1$, и функция $f(z) = e^{iz}$ является аналитической в круге $|z| \leq 3$.

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z+1} dz = 2\pi i \left(e^{iz} \right) \Big|_{z=-1} = 2\pi i e^{-1} = 2\pi i (\cos 1 - i \sin 1) = 2\pi \sin 1 + i 2\pi \cos 1$$

Поэтому

Пример 20. Вычислить интеграл $\int_C \frac{chz}{z^2 - 3z + 2} dz$, если

- I) C: $|z-i| = 1$,
 II) C: $|z-i| = 2$,
 III) C: $|z-i| = 3$.

Решение I. В замкнутой области $|z-i| \leq 1$ подынтегральная функция $\int_C \frac{chz}{z^2-3z+2} dz = 0$

является аналитической, поэтому в силу теоремы Коши .

Решение II. В замкнутой области $|z-i| \leq 2$ в точке $z=1$ знаменатель обращается в нуль. Подынтегральную функцию перепишем в виде

$$\frac{chz}{(z-1)(z-2)} = \frac{\frac{chz}{z-2}}{z-1}$$

$$f(z) = \frac{chz}{z-2}$$

Функция $f(z)$ является аналитической в области $|z-i| \leq 2$. Применяя интегральную формулу Коши при $z_0 = 1$, получим

$$\int_C \frac{chz}{z^2-3z+2} dz = \int_C \frac{\frac{chz}{z-2}}{z-1} dz = 2\pi i \frac{chz}{z-2} \Big|_{z=1} = 2\pi i \frac{ch1}{-1} = -i2\pi ch1$$

Решение III. В области, ограниченной окружностью $|z-i| \leq 3$ в двух точках $z=1$ и $z=2$, знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль.

Поэтому разложим дробь $\frac{1}{z^2-3z+2}$ на сумму $\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2)+B(z-1)}{(z-1)(z-2)}$

отсюда $1 = A(z-2) + B(z-1)$; при $z=1$ $1 = -A$, $A = -1$ при $z=2$ $1 = B$, т.е. $\frac{1}{z^2-3z+2} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$, подставляя в интеграл, получим

$$\int_C \frac{chz}{z^2-3z+2} dz = \int_C \frac{chz}{z-2} dz - \int_C \frac{chz}{z-1} dz = 2\pi i chz \Big|_{z=2} - 2\pi i chz \Big|_{z=1} = 2\pi i (ch2 - ch1)$$

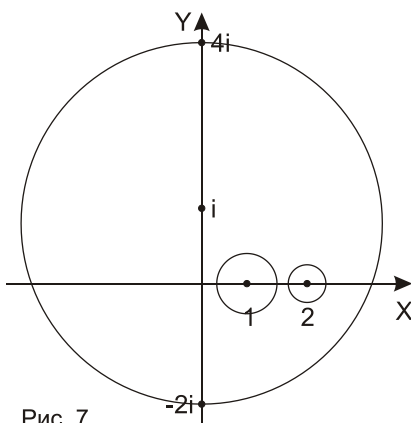


Рис. 7

Можно поступить и иначе.

Воспользуемся теоремой Коши для многосвязной области.

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz$$

Для этого построим окружности C_1 и C_2 с центрами в точках $z=1$, $z=2$ достаточно малых радиусов таких, чтобы эти окружности не пересекались и целиком лежали в круге $|z-i| \leq 3$ (рис. 7). Получим

$$\int_C \frac{chz}{z^2-3z+2} dz = \int_{C_1} \frac{chz}{z-1} dz + \int_{C_2} \frac{chz}{z-2} dz = 2\pi i \frac{chz}{z-2} \Big|_{z=1} + 2\pi i \frac{chz}{z-1} \Big|_{z=2} = -2\pi i ch1 + 2\pi i ch2$$

Если функция $f(z)$ аналитична в области D и на ее границе C , то для любого натурального n имеет место формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad z_0 \in D, \quad z \in C \quad (15)$$

Пример 21. Вычислить интеграл $\int_{|z+2i|=2} \frac{\sin z}{(z+i)^3} dz$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{\sin z}{(z+i)^3}$ является аналитической в области $|z+2i| \leq 2$, кроме $z=-i$.

Функция $f(z) = \sin z$ является аналитической в круге $|z+2i| \leq 2$.

Полагая в формуле (15) $n=2$, получим $\int_{|z+2i| \leq 2} \frac{\sin z}{(z+i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (\sin z)'' \Big|_{z=-i}$.

Находим $(\sin z)' = \cos z$, далее $(\sin z)'' = (\cos z)' = -\sin z$.

Следовательно,

$$\int_{|z+2i|=2} \frac{\sin z}{(z+i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (-\sin z) \Big|_{z=-i} = \pi i (-\sin(-i)) = \pi i \sin i = \pi i^2 sh1 = -\pi sh1$$

Пример 22. Вычислить интеграл $\int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{(z-i)^2 z} dz$.

Решение. Знаменатель обращается в нуль в двух точках $z=0$ и $z=i$. Построим окружности C_1 и C_2 с центрами в точках $z_1=0$, $z_2=i$ достаточно малых радиусов так, чтобы эти окружности не пересекались и целиком лежали в круге $|z|=3$.

В трехсвязной области применима теорема Коши для многосвязной

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{(z-i)^2 z} dz = \int_{C_1} \frac{e^{3z}}{(z-i)^2 z} dz + \int_{C_2} \frac{e^{3z}}{(z-i)^2 z} dz$$

К первому интегралу правой части равенства применима формула (14),

$$f(z) = \frac{e^{3z}}{(z-i)^2}$$

где, а сама подынтегральная функция представима в виде

$\frac{e^{3z}}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{z} \quad f(z) = \frac{e^{3z}}{(z-i)^2}$ является аналитической внутри C_1 , поэтому в силу формулы (14)

$$\int_{C_1} \frac{e^{3z}}{(z-i)^2 z} dz = \int_{C_1} \frac{\frac{e^{3z}}{(z-i)^2}}{z} dz = 2\pi i \frac{e^{3z}}{(z-i)^2} \Big|_{z=0} = -2\pi i$$

, ко второму интегралу в правой части равенства применима формула (15).

Функция $f(z) = \frac{e^{3z}}{z}$ является аналитической внутри C_2 , поэтому в силу формулы (15) при $n=1$

$$\int_{C_2} \frac{e^{3z}}{(z-i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{e^{3z}}{z} \right)' \Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{3e^{3z}z - e^{3z}}{z^2} \Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{3ie^{3i} - e^{3i}}{-1} = 2\pi e^{3i}(3+i) = 2\pi(\cos 3 + i \sin 3)(3+i) = 2\pi(3\cos 3 - \sin 3 + i(3\sin 3 + \cos 3))$$

Окончательно получаем

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{(z-i)^2 z} dz = -2\pi i + 2\pi(3\cos 3 - \sin 3 + i(3\sin 3 + \cos 3)) = 2\pi(3\cos 3 - \sin 3 + i(3\sin 3 + \cos 3 - 1))$$

Можно поступить иначе.

Разложим дробь на сумму простейших дробей

$$\frac{1}{(z-i)^2 z} = \frac{A}{(z-i)^2} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z}$$

Определив A, B, C окончательно получим

$$\frac{1}{(z-i)^2 z} = \frac{-i}{(z-i)^2} + \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z}$$

Подставим в подынтегральную функцию полученный результат

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{(z-i)^2 z} dz = -i \int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{(z-i)^2} dz + \int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{(z-i)} dz - \int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{z} dz$$

Применяя формулы (14) и (15), получим

$$-i \int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{(z-i)^2} dz = -i \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{e^{3z}}{z} \right)' \Big|_{z=i} = -\frac{i 2\pi i 3e^{3i}}{1!} = 6\pi e^{3i} = 6\pi(\cos 3 + i \sin 3)$$

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{(z-i)} dz = 2\pi i e^{3i} \Big|_{z=i} = 2\pi i e^{3i} = 2\pi i(\cos 3 + i \sin 3) = 2\pi(-\sin 3 + i \cos 3)$$

$$- \int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{z} dz = -2\pi i e^{3i} \Big|_{z=0} = -2\pi i$$

Окончательно получим

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{(z-i)^2 z} dz = 6\pi(\cos 3 + i \sin 3) + 2\pi(-\sin 3 + i \cos 3) - 2\pi i =$$

$$= 2\pi((3\cos 3 - \sin 3) + i(3\sin 3 + \cos 3 - 1))$$

§6 Ряды Тейлора и Лорана

Пусть функция $\omega = f(z)$ аналитическая в кольце $D: 0 \leq r \leq |z - z_0| < R \leq \infty$. Тогда она представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (16)$$

коэффициенты которого определяются однозначно, а именно

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (17)$$

где Γ - произвольный замкнутый кусочно-гладкий контур, принадлежащий нашему кольцу и содержащий внутри точку z_0 .

Если $r = 0$ и функция $\omega = f(z)$ аналитическая еще и в самой точке z_0 , то разложение в ряд Лорана превращается в разложение в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad |z - z_0| \leq R \leq \infty \quad (18)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Здесь (19)

Отличие от разложения функций действительного переменного в ряд Тейлора состоит в том, что для функций комплексного переменного гораздо проще указать область, в которой справедливо разложение. А именно, если $\omega = f(z)$ аналитична в окрестности точки z_0 , то наше разложение верно в

круге $|z - z_0| < R$, где R - расстояние от точки z_0 до ближайшей к ней особой точки функции $\omega = f(z)$.

Приведем разложение в ряд Тейлора при $z_0 = 0$ некоторых простейших функций:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} z^n = 1 + \alpha \cdot z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots$$

Первые три разложения справедливы на всей комплексной плоскости, а

два последних разложения справедливы при $|z| < 1$. Из последнего разложения, в частности, получаем

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1,$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

$$f(z) = \frac{5z-4}{z^2-z+2}.$$

Пример 23.

а) Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$.

б) Разложить в ряд Лорана в кольце $1 < |z| < 2$.

в) Разложить в ряд Лорана в кольце $0 < |z+1| < 3$.

Решение. Разложим исходную рациональную дробь на простые дроби:

$$\frac{5z-4}{z^2-z-2} = \frac{5z-4}{(z-2)(z+1)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+1};$$

$$5z-4 = A(z+1) + B(z-2);$$

$$z=2: 6 = 3A, \quad A=2;$$

$$z=-1: -9 = -3B, \quad B=3;$$

$$f(z) = \frac{2}{z-2} + \frac{3}{z+1}.$$

т.е.

Особыми точками функции являются точки $z_1=2$ и $z_2=-1$.

$$f(z) = \frac{3}{1+z} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[3(-1)^n - \frac{1}{2^n} \right] z^n;$$

а)

Разложение верно в круге $|z| < R$, где $R=1$ - расстояние от точки $z_0=0$ до ближайшей к ней особой точки функции $f(z)_{z_2=-1}$. Кстати, именно при

условии $|z| < 1$ мы можем использовать приведенные выше разложения функций $\frac{1}{1+z}$ и $\frac{1}{1-z}$ (с заменой z на $\frac{z}{2}$).

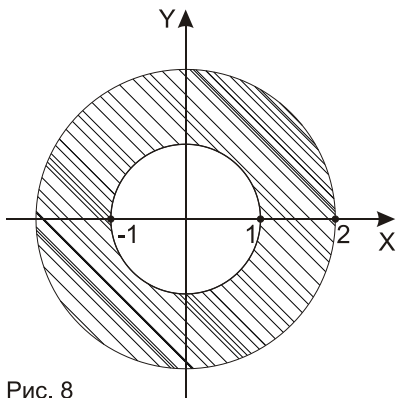


Рис. 8

б) В этой области (рис.8) дробь $\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ разлагается в ряд так же, как и в случае а), так как по условию $|z| < 2$, $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$.

Для разложения же дроби $\frac{3}{1+z}$ нужно в знаменателе вынести за скобку z , так как в нашей области $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$:

$$\frac{3}{1+z} = \frac{3}{z(1+\frac{1}{z})} = \frac{3}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n}$$

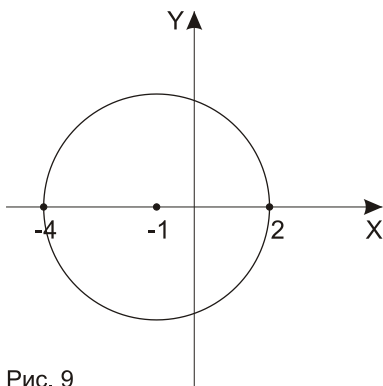


Рис. 9

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n}$$

В итоге получаем

в) В этой области (рис.9) дробь $\frac{3}{\frac{z+1}{2}}$ является одним из членов искомого ряда Лорана. С дробью же $\frac{2}{z-2}$ поступим следующим образом:

$$\frac{2}{z-2} = \frac{2}{z+1-3} = -\frac{2}{3(1-\frac{z+1}{3})} = -\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{3}\right)^n$$

При этом как раз учитывается, что $\left|\frac{z+1}{3}\right| < 1$

$$f(z) = \frac{3}{z+1} - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^n}$$

В результате получаем

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$$

Пример 24.

Разложить в ряд Лорана в области $|z-1| > \sqrt{2}$.

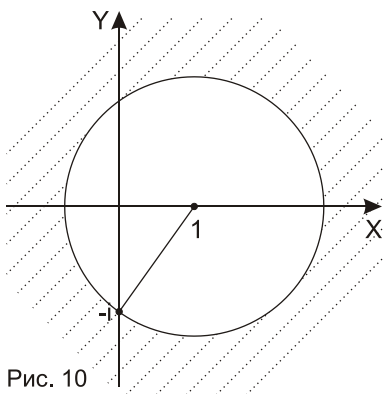


Рис. 10

Решение. Единственной особой точкой $f(z)$ является (рис.10) точка $z_1 = -i$. Ее расстояние до точки $z_0 = 1$ равно $\sqrt{2}$. Далее имеем:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1+1+i)^2} = \frac{1}{(z-1)^2 \left(1 + \frac{1+i}{z-1}\right)^2}$$

Используя разложение $(1+z)^\alpha$ при $\alpha = -2$ по степеням z с заменой z на $\frac{1+i}{z-1}$, находим

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2} \left[1 - 2 \frac{1+i}{z-1} + 3 \left(\frac{1+i}{z-1} \right)^2 - 4 \left(\frac{1+i}{z-1} \right)^3 + 5 \left(\frac{1+i}{z-1} \right)^4 + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} - 2 \frac{1+i}{(z-1)^3} + 3 \frac{(1+i)^2}{(z-1)^4} - 4 \frac{(1+i)^3}{(z-1)^5} + 5 \frac{(1+i)^4}{(z-1)^6} - \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1) (1+i)^{n-2}}{(z-1)^n} \end{aligned}$$

При этом полезно заметить, что в нашей области $\left| \frac{1+i}{z-1} \right| = \frac{\sqrt{2}}{|z-1|} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.

Пример 25. $f(z) = \ln(3-z)$. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$.

$$f(z) = \ln 3 \left(1 - \frac{z}{3} \right) = \ln 3 + \ln \left(1 - \frac{z}{3} \right).$$

Решение.

Используя приведенное выше разложение функции $\ln(1+z)$ с заменой z на $-\frac{z}{3}$, получаем

$$f(z) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(-\frac{z}{3} \right)^n}{n} = \ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n 3^n} = \ln 3 - \frac{z}{3} - \frac{z^2}{2 \cdot 3^2} - \frac{z^3}{3 \cdot 3^3} - \frac{z^4}{4 \cdot 3^4} - \dots$$

Разложение верно при $|z| < 3$ так как 3 - это расстояние от точки $z_0 = 0$ до единственной особой точки $f(z)$ $z_1 = 3$.

§7 Классификация изолированных особых точек. Вычеты

Пусть z_0 - изолированная особая точка функции $\omega = f(z)$, т.е. $\omega = f(z)$ аналитическая в некоторой окрестности точки z_0 за исключением самой точки z_0 . Рассмотрим разложение функции $\omega = f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 .

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (20)$$

Этот ряд представим в виде суммы двух рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

- правильной части ряда Лорана и

$$\sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

- главной части ряда Лорана.

Точка z_0 называется **устранимой** особой точкой функции $\omega = f(z)$, если в разложении (20) главная часть ряда Лорана отсутствует, т.е. $a_{-n} = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Это эквивалентно существованию конечного предела $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Точка z_0 называется **полюсом** функции $\omega = f(z)$, если в разложении (20) главная часть ряда Лорана содержит лишь конечное число членов. Пусть $a_{-n} = 0$ для $n > k$ и $a_{-k} \neq 0$. Тогда число k называется **порядком полюса**. Полюса первого порядка называются также простыми полюсами.

Если в окрестности точки z_0 функция $\omega = f(z)$ представляется в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}$, где $\varphi(z)$ аналитическая в этой окрестности и $\varphi_0(z) \neq 0$, то z_0 - полюс функции $\omega = f(z)$ порядка k .

Если в окрестности точки z_0 функция $\omega = f(z)$ представляется в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитические в этой окрестности, $\varphi(z)$ имеет в точке z_0 ноль кратности $m \geq 0$ а $\psi(z)$ имеет в точке z_0 ноль кратности $n > m$, то z_0 - полюс функции $\omega = f(z)$ порядка $n - m$.

Если же $n \leq m$, то z_0 - **устраняемая** особая точка функции $\omega = f(z)$. (Здесь уместно отметить, что $\varphi(z)$ имеет в точке z_0 ноль кратности m , если в окрестностях точки z_0 $\varphi(z)$ представима в виде $\varphi(z) = (z - z_0)^m \varphi_1(z)$, где $\varphi_1(z_0) \neq 0$, что равносильно выполнению условий $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) = 0$, ..., $\varphi^{(m-1)}(z_0) = 0$, $\varphi^{(m)}(z_0) \neq 0$).

Точка z_0 называется **существенно особой** точкой функции $\omega = f(z)$, если в разложении (20) главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число

членов.

Вычетом функции $\omega = f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется коэффициент a_{-1} в разложении ряда Лорана (20).

$$a_{-1} = \operatorname{res} f(z_0) = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$$

Обозначения:

Если z_0 - устранимая особая точка, то $\operatorname{res} f(z_0) = 0$.

Если z_0 - существенно особая точка, то $\operatorname{res} f(z_0)$ находится из разложения $f(z)$ в ряд Лорана (20).

Если же z_0 - полюс порядка k , то вычет функции $\omega = f(z)$ в этой точке находится по формуле

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [f(z)(z-z_0)^k]$$

Если $k=1$, то отсюда следует формула для нахождения вычета в простом полюсе

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z-z_0)]$$

В частности, если в окрестности точки z_0 функции $\omega = f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитические в этой окрестности, $\varphi(z_0) \neq 0$,

$\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то z_0 - простой полюс и $\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

В нижеследующих примерах нужно найти особые точки функции, указать их характер и вычислить вычеты функций в этих особых точках.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

Пример 26.

Решение. Числитель и знаменатель дроби - аналитические функции на всей комплексной плоскости, поэтому функция $\frac{\sin z}{z}$ аналитическая при знаменателе z , отличном от 0. Значит, $z_0 = 0$ - единственная особая точка нашей функции (в ней функция не определена). Так как $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, то $z_0 = 0$ - устранимая особая точка и $\operatorname{res} f(0) = 0$. Тот же результат следует и из разложения нашей функции в ряд Лорана по степеням z .

Пример 27. $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$.

Решение. Так как функция $\omega = e^z$ аналитическая для всех z , а функция $\omega = \frac{z}{1-z}$ аналитическая при $z \neq 1$, то сложная функция $\omega = e^{\frac{z}{1-z}}$ будет аналитической при $z \neq 1$. Так как в точке $z_0 = 1$ исходная функция не

определена, то $z_0 = 1$ - единственная особая точка нашей функции. Разложим ее в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$. Имеем:

$$e^{\frac{z}{1-z}} = e^{\frac{z-1+1}{1-z}} = e^{-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{e} e^{-\frac{1}{z-1}}$$

Далее используем разложение функции e^z в степенной ряд

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Заменяя в этом разложении z на $-\frac{1}{z-1}$, получаем нужное нам разложение в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{1}{e} \left[1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n} + \dots \right]$$

Из этого ряда видно, что $z_0 = 1$ - существенно особая точка функции и $\text{resf}(1) = -\frac{1}{e}$.

$$f(z) = -\frac{1}{(z^2+1)^3}$$

Пример 28.

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$$

Решение. Так как $z_1 = i$ и $z_2 = -i$, то особыми точками нашей функции являются точки $z_1 = i$ и $z_2 = -i$.

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^3} \quad f(z) = \frac{1}{(z-i)^3}$$

Из представлений и одной из приведенных выше теорем о полюсах следует, что обе эти точки являются полюсами третьего порядка и

$$\text{resf}(i) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \left\{ \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3} (z-i)^3 \right\}'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{12}{(z+i)^3} = \frac{6}{(2i)^3} = \frac{3}{16i} = -\frac{3}{16}i$$

Аналогично вычисляется $\text{resf}(-i)$.

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{1-z}$$

Пример 29.

Решение. Особыми точками нашей функции будут являться точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$. Из приведенного в примере 27 разложения в степенной ряд функции $\omega = e^z$ и из разложения

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad |z| < 1,$$

следует, что при $|z| < 1$

$$f(z) = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots \right) (1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots)$$

Перемножая почленно эти ряды, легко увидеть, что главная часть получаемого ряда Лорана будет содержать бесконечное число членов, т.е. $z_1 = 0$

является существенно особой точкой нашей функции и вычет в этой точке - коэффициент ряда Лорана при z^{-1} будет равен

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Но из того же разложения в степенной ряд функции $\omega = e^z$ при $z=1$ следует, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e^1 = e$, значит, $\text{res}f(0) = e$.

Что же касается точки $z_2 = 1$, то в окрестности этой точки $|z-1| < 1$ функция $f(z)$ может быть представлена в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z) = e^{\frac{1}{z}}$ - аналитическая в этой окрестности и $\varphi(1) \neq 0$, $\psi(z) = 1-z$ тоже аналитическая в этой окрестности, $\psi(1) = 0$, $\psi'(1) = -1 \neq 0$. Значит, $z_2 = 1$ - простой полюс $f(z)$.

$$\text{res}f(1) = \frac{\varphi(1)}{\psi'(1)} = \frac{e}{-1} = -e$$

и

$$f(z) = \frac{1 + \cos z}{(z - \pi)^6}$$

Пример 30.

Решение. Единственной особой точкой этой функции является точка $z_0 = \pi$. Введем функцию $\varphi(z) = 1 + \cos z$. Так как $\varphi(\pi) = 0$, $\varphi'(z) = -\sin z$, $\varphi'(\pi) = 0$, $\varphi''(z) = -\cos z$, $\varphi''(\pi) = 1 \neq 0$, то $\varphi(z)$ имеет в точке $z_0 = \pi$ ноль кратности 2, тогда из приведенных выше теорем о полюсах следует, что $z_0 = \pi$ - полюс функции $f(z)$ порядка 4 и

$$\text{res}f(\pi) = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow \pi} \left\{ \frac{1 + \cos z}{(z - \pi)^6} (z - \pi)^4 \right\}''' = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow \pi} \left\{ \frac{1 + \cos z}{(z - \pi)^2} \right\}'''$$

Нетрудно провести нужные дальнейшие вычисления, однако пример можно решить более простым способом. При доказательстве приведенной нами формулы для нахождения вычета в полюсе k -го порядка не используется то, что $a_{-k} \neq 0$, $a_{-k+1} \neq 0$, ..., поэтому она справедлива и для полюса любого порядка, меньшего, чем k . Значит, при вычислении вычетов

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

функции в точке z_0 можно исходить только из кратности z_0 как корня знаменателя, не обращая внимания на числитель. В нашем примере используем формулу для вычета в полюсе порядка 6

$$\operatorname{resf}(\pi) = \frac{1}{5!} \lim_{z \rightarrow \pi} \left\{ \frac{1 + \cos z}{(z - \pi)^6} (z - \pi)^6 \right\}^{(5)} = \frac{1}{120} \lim_{z \rightarrow \pi} \{1 + \cos z\}^{(5)} = \frac{1}{120} \lim_{z \rightarrow \pi} (-\sin z) = 0$$

Если функция $\omega = f(z)$ аналитическая внутри замкнутого контура L и на этом контуре, за исключением конечного числа особых точек внутри $L: z_1, z_2, \dots, z_n$, то

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{resf}(z_k) \quad (21)$$

(контур L проходимся в положительном направлении, т.е. при движении вдоль L ограниченная им область остается слева от наблюдателя).

$$\int_{|z+1|=3} \frac{\operatorname{tg} \frac{z}{2}}{(z-1)^2} dz$$

Пример 31. Вычислить

Решение. Особыми точками подынтегральной функции будут являться точка $z_1 = 1$ и решения уравнения $\cos \frac{z}{2} = 0$, т.е. $\frac{z}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $z = \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Легко видеть, что на контуре $|z+1|=3$ особых точек нет, а внутри контура будет лишь две особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = \pi - 2\pi = -\pi$ (т.е. $k = -1$).

$z_1 = 1$ - полюс второго порядка $\left(\operatorname{tg} \frac{z}{2} \Big|_{z=1} \neq 0 \right)$ и

$$\operatorname{resf}(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{\operatorname{tg} \frac{z}{2}}{(z-1)^2} (z-1)^2 \right\} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{z}{2}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{2}}$$

$z_2 = -\pi$ - простой полюс, так как если обозначить $\varphi(z) = \frac{\sin \frac{z}{2}}{(z-1)^2}$ и $\psi(z) = \cos \frac{z}{2}$, то $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ - аналитические в окрестности точки $-\pi$, $\varphi(-\pi) \neq 0$,

$\psi(-\pi) = 0$, а $\psi'(-\pi) = -\frac{1}{2} \sin \frac{z}{2} \Big|_{z=-\pi} \neq 0$,

$$\operatorname{resf}(-\pi) = \frac{\varphi(-\pi)}{\psi'(-\pi)} = -\frac{2 \sin(-\frac{\pi}{2})}{(-\pi-1)^2 \sin(-\frac{\pi}{2})} = -\frac{2}{(\pi+1)^2}$$

Тогда

$$\int_{|z+1|=3} \frac{\operatorname{tg} \frac{z}{2}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i [\operatorname{resf}(1) + \operatorname{resf}(-\pi)] =$$

По основной теореме о вычетах

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{2}} - \frac{2}{(\pi+1)^2} \right] = \pi i \left[\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}} - \frac{4}{(\pi+1)^2} \right]$$

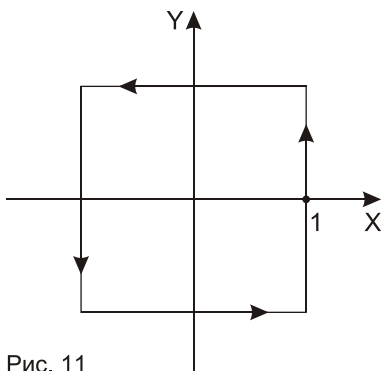


Рис. 11

$$J = \int_L \frac{1 - \cos z}{z^3(z-3)} dz$$

Пример 32. Вычислить J , где L - квадрат со стороной 2 и центром в начале координат, проходимый в положительном направлении.

Решение. Так как внутри нашего контура попадает только одна особая точка подынтегральной функции $z_1 = 0$, а вторая особая точка $z_2 = 3$ находится вне контура, то $J = 2\pi i \operatorname{res} f(0)$.

В окрестностях точки $z_1 = 0$ подынтегральная функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z) = 1 - \cos z$, $\psi(z) = z^3(z-3)$.

Имеем: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(z) = \sin z$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(z) = \cos z$, $\varphi''(0) \neq 0$, т.е. $\varphi(z)$ имеет в точке $z_1 = 0$ ноль кратности 2; $\psi(z)$, как легко видеть, имеет в точке $z_1 = 0$ ноль кратности 3, поэтому $z_1 = 0$ простой полюс $f(z)$ и

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - \cos z}{z^3(z-3)} z \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2(z-3)} = -\frac{1}{3} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos z)(1 + \cos z)}{(1 + \cos z)z^2} = -\frac{1}{3} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin^2 z}{(1 + \cos z)z^2} = -\frac{1}{6} \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \right)^2 = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$J = 2\pi i \left(-\frac{1}{6} \right) = -\frac{\pi i}{3}$$

Отсюда

$$\int_{|z|=1} z \cos^2 \frac{1}{z} dz$$

Пример 33. Вычислить $\int_{|z|=1} z \cos^2 \frac{1}{z} dz$.

Решение. Внутри контура $|z|=1$ находится единственная особая точка подынтегральной функции $z_0 = 0$. Из разложения в степенной ряд функции $\omega = \cos z$: $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$ получаем разложение функции $f(z) = z \cos^2 \frac{1}{z}$ в ряд

Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$:

$$z \cos^2 \frac{1}{z} = z \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2}{z} \right) = \frac{z}{2} \left(1 + 1 - \frac{2^2}{2!z^2} + \frac{2^4}{4!z^4} - \dots \right) = z - \frac{2}{2!z} + \frac{2^3}{4!z^3} - \dots$$

т.е. $z_0 = 0$ - существенно особая точка, и $\operatorname{res} f(0) = -1$.

Тогда по основной теореме о вычетах

$$\int_{|z|=1} z \cos^2 \frac{1}{2} dz = -2\pi i$$

$$J = \oint_{|z|=2} \frac{z}{z^4+1} dz$$

Пример 34. Вычислить

Решение. Особые точки подынтегральной функции - это корни уравнения $z^4 + 1 = 0$, т.е. $z = \sqrt[4]{-1}$. Записывая число -1 в тригонометрической форме и используя формулу для извлечения корня из комплексного числа, получаем

$$z = \sqrt[4]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4},$$

$k = 0, 1, 2, 3$. Отсюда получаем 4 особых точки z_k . Все эти точки находятся внутри круга $|z|=2$, и $J = 2\pi i \sum_{k=0}^3 \operatorname{res} f(z_k)$.

Однако вычисление интеграла таким способом получается довольно громоздким. Для упрощения сделаем в интеграле замену $z = \frac{1}{\xi}$. Тогда

$$J = \oint_{|\xi|=\frac{1}{2}} \frac{-\frac{1}{\xi^2} d\xi}{\xi^5 \left(\frac{1}{\xi^4} + 1 \right)} = \oint_{|\xi|=\frac{1}{2}} \xi^3 \left(\frac{d\xi}{1 + \xi^4} \right)$$

(Отметим, что при замене переменной $z = \frac{1}{\xi}$ направление обхода контура меняется на противоположное, так как $\arg z = -\arg \xi$.)

В полученном после замены интеграле внутри контура $|\xi| = \frac{1}{2}$ будет лишь одна особая точка подынтегральной функции $z_0 = 0$. Это полюс третьего порядка и

$$\begin{aligned} J &= 2\pi i \operatorname{res}_{\xi=0} \xi^3 \left(\frac{1}{1 + \xi^4} \right) = \pi i \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{1 + \xi^4} \right\}'' = \pi i \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{-4\xi^3}{(1 + \xi^4)^2} \right\}' = \\ &= -4\pi i \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{3\xi^2 (1 + \xi^4) - \xi^3 \cdot 2(1 + \xi^4) \cdot 4\xi^3}{(1 + \xi^4)^3} = 0 \end{aligned}$$

Впрочем, данный пример достаточно просто решается и если рассматривать вычет подынтегральной функции в бесконечно удаленной точке $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$.

§8 Вычисление интегралов от функций действительного переменного

Основная теорема о вычетах помогает вычислять и некоторые интегралы от функций действительного переменного.

Рассмотрим $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$, где $P_m(x)$ - многочлен степени m , $Q_n(x)$ - многочлен степени n , не имеющий действительных корней, и $n-m \geq 2$. Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = 2\pi i \delta$, где δ - сумма вычетов функции $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ в особых точках, находящихся в верхней полуплоскости.

$$J = \int_0^{\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 4} \right) dx$$

Пример 35. Вычислить интеграл

Решение. В силу четности подынтегральной функции

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 4} \right) dx$$

Особые точки подынтегральной функции $\pm 2i$, из них в верхней полуплоскости расположена точка $2i$, и

$$J = \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{res}_{z=2i} \left(\frac{z^2}{z^2 + 4} \right) = \pi i \operatorname{res}_{z=2i} \left(\frac{z^2}{(z+2i)(z-2i)} \right)$$

Из теорем о полюсах видно, что $z = 2i$ - полюс второго порядка и

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=2i} \left(\frac{z^2}{(z+2i)(z-2i)} \right) &= \lim_{z \rightarrow 2i} \left[\frac{z^2(z-2i)^2}{(z+2i)^2(z-2i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2z(z+2i)^2 - z^2 \cdot 2(z+2i)}{(z+2i)^4} = \\ &= 2 \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z(z+2i) - z^2}{(z+2i)^3} = 2 \frac{-8+4}{-64i} = \frac{1}{8i} \end{aligned}$$

. Тогда

$$J = \pi i \frac{1}{8i} = \frac{\pi}{8}$$

Теперь рассмотрим интеграл вида $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{i\lambda x} dx$, где $R(x)$ - правильная рациональная дробь, знаменатель которой не имеет действительных корней.

Тогда при $\lambda > 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \delta$, где δ - сумма вычетов функции $f(z) = R(z) e^{i\lambda z}$ в особых точках верхней полуплоскости.

Так как $\cos \lambda x = \operatorname{Re} e^{i\lambda x}$ и $\sin \lambda x = \operatorname{Im} e^{i\lambda x}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \lambda x dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{i\lambda x} dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \lambda x dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{i\lambda x} dx$$

Пример 36. Вычислить интегралы

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx \quad J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx$$

и

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx$$

Решение. Рассмотрим

Особые точки подынтегральной функции - это решение уравнения $x^2 - 2x + 10 = 0$, т.е. $z_{1,2} = 1 \pm 3i$. Из этих точек в верхней полуплоскости

находится точка $1+3i$ и $J = 2\pi i \operatorname{res}_{z=1+3i} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10}$.

Обозначая $\varphi(z) = ze^{iz}$ и $\psi(z) = z^2 - 2z + 10$, имеем $\varphi(1+3i) \neq 0$, $\psi(1+3i) = 0$, $\psi'(z) = 2z - 2$, $\psi'(1+3i) = 2 + 6i - 2 = 6i \neq 0$, $z_0 = 1+3i$ - простой полюс и

$$J = 2\pi i \frac{\varphi(1+3i)}{\psi'(1+3i)} = 2\pi i \frac{(1+3i)e^{i(1+3i)}}{6i} = \frac{\pi}{3} (1+3i)e^{-3+i} = \frac{\pi}{3e^3} (1+3i)(\cos 1 + i \sin 1) =$$

$$= \frac{\pi}{3e^3} [\cos 1 - 3 \sin 1 + i(3 \cos 1 + \sin 1)]$$

Взяв действительную и мнимую части этого ответа, получаем

$$J_1 = \frac{\pi}{3e^3} (\cos 1 - 3 \sin 1) \quad J_2 = \frac{\pi}{3e^3} (3 \cos 1 + \sin 1)$$

Для вычисления интегралов вида $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$ рекомендуется замена $z = e^{ix}$, при которой

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

$$dz = ie^{ix} dx = iz dx, \quad dx = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) \frac{1}{iz} dz = \int_{|z|=1} F(z) dz,$$

где $F(z)$ - рациональная функция.

Последний интеграл считается при помощи основной теоремы о вычетах.

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 4 \cos x)^2}$$

Пример 37. Вычислить

Решение. После замены переменной $z = e^{ix}$, согласно предыдущему, получаем

$$J = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left[5 + \frac{2(z^2 + 1)}{z} \right]^2} = -i \int_{|z|=1} \frac{z}{2z^2 + 5z + 2} dz$$

Особые точки подынтегральной функции - это решения уравнения $2z^2 + 5z + 2 = 0$, т.е.

$$z_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4}, \quad z_1 = -2, \quad z_2 = -\frac{1}{2}.$$

Из этих точек внутри круга $|z|=1$ находится только точка $z_2 = -\frac{1}{2}$, и

$$J = -i2\pi \operatorname{res}_{z=-\frac{1}{2}} \left(\frac{z}{2z^2 + 5z + 2} \right) = 2\pi \operatorname{res}_{z=-\frac{1}{2}} \frac{z}{4(z+2)^2 \left(z + \frac{1}{2} \right)^2}.$$

Так как $z_2 = -\frac{1}{2}$ - полюс второго порядка, то

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left\{ \frac{z(z + \frac{1}{2})^2}{(z+2)^2 (z + \frac{1}{2})^2} \right\} = \frac{\pi}{2} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left\{ \frac{z}{(z+2)^2} \right\} = \frac{\pi}{2} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(z+2)^2 - 2z(z+2)}{(z+2)^4} = \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{z+2-2z}{(z+2)^3} = \frac{\pi}{2} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2-z}{(z+2)^3} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5 \cdot 8}{2 \cdot 27} = \frac{10\pi}{27}. \end{aligned}$$

Глава 16

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Функция $f(t)$ называется Лапласовым изображением функции $F(p)$ $F(p) \rightarrow f(t)$ или $L\{f(t)\} = F(p)$ называется оригиналом. Это пишут так: $F(p) \rightarrow f(t)$ или $L\{f(t)\} = F(p)$. Отметим свойства преобразования Лапласа.

- 1° $L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
- 2° $L\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(p) + F_2(p)$
- 3° $L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(p + \alpha)$
- 4° $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(p)$
- 5° $L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - [p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \dots + p f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)]$
- 6° $L\left\{\int_0^t f_1(z) f_2(t-z) dz\right\} = F_1(p) F_2(p)$
- 7° $L\{f(t - t_0)\} = e^{-pt_0} F(p)$

Таблица некоторых изображений

	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	1	$\sin at$	$\cos at$	$e^{-\alpha t}$	$\sin \alpha t$	$\cos \alpha t$
$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\frac{1}{p + \alpha}$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$

	7	8	9	10	11	12
$f(t)$	$e^{-\alpha t} \sin at$	$e^{-\alpha t} \cos at$	t^n	$t \sin at$	$t \cos at$	$te^{-\alpha t}$
$F(p)$	$\frac{a}{(p + \alpha)^2 + a^2}$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + a^2}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$

Пример 1. Найти изображение функции $f(t) = \sin 2t - 2 \cos 3t$.

Решение. Используя свойство 2° и формулы (2) и (3) из таблицы, получим:

$$F(p) = L\{f(t)\} = L\{\sin 2t\} - 2L\{\cos 3t\} =$$

$$= \frac{2}{p^2 + 4} - 2 \frac{p}{p^2 + 9} = \frac{2(p^2 - p^3 + 9 - 4p)}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)} = -\frac{2(p^3 - p^2 + 4p - 9)}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}$$

$$F(p) = \frac{6}{p^2 + 9} + \frac{3p}{p^2 + 4}$$

Пример 2. Найти оригинал для изображения

$F(p) = 2 \cdot \frac{3}{p^2 + 3^2} + 3 \cdot \frac{p}{p^2 + 2^2}$
Решение. Представим $F(p)$ в виде
 Используя формулы (2) и (3) из таблицы, получим
 $f(t) = 2 \sin 3t + 3 \cos 2t$

$F(p) = \frac{10}{p^2 + 2p + 5}$
Пример 3. Найти оригинал для изображения

$F(p) = 5 \cdot \frac{2}{(p+1)^2 + 2^2}$
Решение. Представим $F(p)$ в виде
 Отсюда по формуле (7) таблицы найдем $f(t) = 5 \cdot e^{-t} \sin 2t$

$F(p) = \frac{p+2}{p^2 + 6p + 13}$
Пример 4. Найти оригинал для изображения

$F(p) = \frac{(p+3)-1}{(p+3)^2 + 4} = \frac{p+3}{(p+3)^2 + 2^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(p+3)^2 + 2^2}$
Решение. Представим $F(p)$ в виде

Тогда из формулы (7) и (8) таблицы следует:
 $f(t) = e^{-3t} \cos 2t - \frac{1}{2} e^{-3t} \sin 2t = e^{-3t} \left(\cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \right)$

$f(t) = t^2 e^{-2t}$
Пример 5. Найти изображение функции $L\{e^{-2t}\} = \frac{1}{p+2}$

Решение. Из формулы (4) таблицы следует
 Теперь используем свойство 4°, получим

$$L\{t^2 e^{-2t}\} = (-1)^2 \left(\frac{1}{p+2} \right)'' = \left(-\frac{1}{(p+2)^2} \right)' = \frac{2}{(p+2)^3}$$

$F(p) = \frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$
Пример 6. Найти оригинал для изображения

Решение. Разложим $F(p)$ на сумму простейших дробей:

$$F(p) = \frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)} = \frac{a}{p-1} + \frac{bp+c}{p^2-6p+10}$$

где a, b, c - неизвестные числа, которые найдем из тождества
 $3p-2 = a(p^2-6p+10) + (bp+c)(p-1)$

Придавая p удобные значения, получим:

при $p=1$: $1 = 5a$ $a = \frac{1}{5}$

при $p=0$: $-2 = 2 - c$ $c = 4$

при $p=2$: $4 = \frac{2}{5} + 2b + 4$ $b = -\frac{1}{5}$

$$F(p) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p-1} - \frac{1}{5} \cdot \frac{p-20}{p^2-6p+10}$$

Отсюда имеем

Оригинал для первой дроби найдем по формуле (4) таблицы, а для второй дроби - как в примере 4.

$$F(p) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p-1} - \frac{1}{5} \cdot \frac{(p-3)-17}{(p-3)^2+1} \rightarrow \frac{1}{5} e^t - \frac{1}{5} e^{3t} \cos t + \frac{17}{5} e^{3t} \sin t$$

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+4p+8)}$$

Пример 7. Найти оригинал для изображения $F(p)$

Решение. Приведем к виду

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4p+8} \cdot \frac{1}{p^2+4p+8} = F_1(p) \cdot F_2(p)$$

Найдем оригиналы для $F_1(p)$ и $F_2(p)$:

$$F_1(p) = \frac{p}{p^2+4p+8} = \frac{p+2}{(p+2)^2+2^2} - \frac{2}{(p+2)^2+2^2} \rightarrow e^{-2t} \cos 2t - e^{-2t} \sin 2t = f_1(t)$$

$$F_2(p) = \frac{1}{p^2+4p+8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(p+2)^2+2^2} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} \sin 2t = f_2(t)$$

Отсюда по свойству 6° получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t f_1(z) \cdot f_2(t-z) dz = \int_0^t e^{-2z} (\cos 2z - \sin 2z) \cdot \frac{1}{2} e^{-2(t-z)} \sin 2(t-z) dz = \\ &= \frac{1}{2} e^{-2t} \int_0^t (\cos 2z - \sin 2z) \cdot \sin 2(t-z) dz = \\ &= \frac{1}{2} e^{-2t} \int_0^t (\cos 2z - \sin 2z) \cdot (\sin 2t \cos 2z - \sin 2z \cos 2t) dz = \\ &= \frac{1}{2} e^{-2t} \left[\sin 2t \int_0^t \cos^2 2z dz + \cos 2t \int_0^t \sin^2 2z dz - (\sin 2t + \cos 2t) \int_0^t \sin 2z \cdot \cos 2z dz \right] = \\ &= \frac{1}{4} e^{-2t} \left[\sin 2t \int_0^t (1 + \cos 4z) dz + \cos 2t \int_0^t (1 - \cos 4z) dz - (\sin 2t + \cos 2t) \int_0^t \sin 4z dz \right] = \\ &= \frac{1}{4} e^{-2t} \left[\sin 2t \left(z + \frac{1}{4} \sin 4z \right) \Big|_0^t + \cos 2t \left(z - \frac{1}{4} \sin 4z \right) \Big|_0^t + \frac{1}{4} (\sin 2t + \cos 2t) \cos 4z \Big|_0^t \right] = \\ &= \frac{1}{4} e^{-2t} \left[\sin 2t \left(t + \frac{1}{4} \sin 4t \right) + \cos 2t \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) + \frac{1}{4} (\sin 2t + \cos 2t) \cdot (\cos 4t - 1) \right] = \\ &= \frac{1}{16} e^{-2t} (4t \sin 2t + 4t \cos 2t + \sin 2t \sin 4t - \cos 2t \sin 4t + \sin 2t \cos 4t + \cos 2t \cos 4t - \\ &- \sin 2t - \cos 2t) = \frac{1}{8} e^{-2t} [2t(\sin 2t + \cos 2t) - \sin 2t] \end{aligned}$$

Метод операционного исчисления для решения задачи Коши:

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \quad (1)$$

$$x(0) = c_1, \quad x'(0) = c_2, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = c_n, \quad (2)$$

где (1) - линейное дифференциальное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами a_i ;

(2) - начальное условие, $c_i - \text{const}$;

$x(t)$ - неизвестная функция аргумента t .

Используя свойство 5° и начальное условие (2) запишем уравнение (1) в изображениях

$$x(p)[a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n] = a_0 [p^{n-1} c_1 + p^{n-2} c_2 + \dots + c_n] + \\ + a_1 [p^{n-2} c_1 + p^{n-3} c_2 + \dots + c_{n-1}] + a_{n-2} [p c_1 + c_2] + a_{n-1} c_1 + F(p), \\ x(p) \rightarrow x(t)$$

где

Из этих уравнений находится $x(p)$, затем его оригинал $x(t)$, который и будет решением данной задачи.

$$x'' - 3x' + 2x = 2e^t \cos \frac{t}{2}, \quad x(0)=1, \quad x'(0)=0.$$

Пример 8. Решить задачу Коши

Решение. Перейдем к изображениям

$$p^2 x(p) - p \cdot 1 - 3(px(p) - 1) + 2x(p) = 2 \frac{p-1}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} \\ x(p)[p^2 - 3p + 2] = p - 3 + \frac{2(p-1)}{p^2 - 2p + \frac{5}{4}}.$$

Отсюда

$$x(p) = \frac{p-3}{p^2-3p+2} + \frac{2}{(p-2)\left(p^2-2p+\frac{5}{4}\right)}.$$

Для определения оригинала вторую дробь разложим на сумму двух простейших дробей, как в примере 6.

$$\frac{2}{(p-2)\left(p^2-2p+\frac{5}{4}\right)} = \frac{a}{p-2} + \frac{bp+c}{p^2-2p+\frac{5}{4}} \\ 2 = a\left(p^2-2p+\frac{5}{4}\right) + (p-2)(bp+c).$$

Составим тождество

Придавая p удобные значения, получим

$$2 = \frac{5}{4}a \quad a = \frac{8}{5}.$$

$$\text{при } p=2: \quad 2 = 2 - 2c \quad c = 0.$$

$$\text{при } p=0: \quad 2 = \frac{2}{5} - b \quad b = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{при } p=1: \quad 2 = \frac{2}{5} - b \quad b = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{при } p=1: \quad 2 = \frac{2}{5} - b \quad b = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{при } p=1: \quad 2 = \frac{2}{5} - b \quad b = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{при } p=1: \quad 2 = \frac{2}{5} - b \quad b = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{при } p=1: \quad 2 = \frac{2}{5} - b \quad b = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{при } p=1: \quad 2 = \frac{2}{5} - b \quad b = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{при } p=1: \quad 2 = \frac{2}{5} - b \quad b = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{при } p=1: \quad 2 = \frac{2}{5} - b \quad b = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{при } p=1: \quad 2 = \frac{2}{5} - b \quad b = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{при } p=1: \quad 2 = \frac{2}{5} - b \quad b = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{при } p=1: \quad 2 = \frac{2}{5} - b \quad b = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{при } p=1: \quad 2 = \frac{2}{5} - b \quad b = -\frac{8}{5}.$$

Придавая p удобные значения, получим

при $p=2$: $-1=e^{-1}$ $e=-1$.

при $p=1$: $-2=-2d$ $d=2$.

$$x(p) = \frac{2}{p-1} - \frac{1}{p-2} + \frac{8}{5} - \frac{8}{5} \frac{p}{p^2-2p+\frac{5}{4}} = \frac{2}{p-1} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{8}{5} \cdot \frac{p}{p^2-2p+\frac{5}{4}} =$$

Тогда

$$= \frac{2}{p-1} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{8}{5} \cdot \frac{p-1}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} - \frac{16}{5} \cdot \frac{1}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}}.$$

$$x(t) = 2e^t + \frac{3}{5}e^{2t} - \frac{8}{5}e^t \cos \frac{t}{2} - \frac{16}{5}e^t \sin \frac{t}{2}.$$

Отсюда

- решение данной задачи Коши.

Когда для $f(t)$ найти оригинал невозможно, используется формула Дюамеля:

$$x(t) = \int_0^t x_1'(z) f(t-z) dz$$

, где $x_1(t)$ - решение того же уравнения (1) при $f(t)=1$ и

все $c_i = 0$.

$$x'' + x' = \frac{1}{1+e^t} \quad x(0)=0 \quad x'(0)=0.$$

Пример 9. Решить задачу Коши

Решение. Сначала решим уравнение $x'' + x' = 1$. Для этого перейдем к изображениям и получим

$$x_1(p)(p^2 + p) = \frac{1}{p} \quad x_1(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$$

Теперь найдем оригинал $x_1(t)$ для $x_1(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p+1}$.

Составим тождество

Придавая p удобные значения, получим:

при $p=0$: $1=a$;

при $p=-1$: $1=c$;

при $p=1$: $1=2+2b+1$ $b=-1$.

$$x_1(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}.$$

Отсюда

Используя формулы (1), (4) и (9) таблицы,

получим оригинал: $x_1(t) = t - 1 + e^{-t}$. Тогда $x_1'(t) = 1 - e^{-t}$.

Теперь применим формулу Дюамеля:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{1-e^{-z}}{1+e^{t-z}} dz = \int_0^t \frac{e^z-1}{e^t+e^z} dz = \left| \frac{e^z=y}{dy=e^z dz} \right| = \int_1^{e^t} \frac{(y-1)dy}{y(y+e^t)} = \int_1^{e^t} \left(\frac{1+e^{-t}}{y+e^t} - \frac{e^{-t}}{y} \right) dy = \\ &= \left[(1+e^{-1}) \ln(y+e^t) - e^{-t} \ln y \right]_1^{e^t} = (1+e^{-t}) \ln 2e^t - te^{-t} - (1+e^{-t}) \ln(1+e^t) = \end{aligned}$$

$$= t + (1 + e^{-t}) \ln \frac{2}{1 + e^t} - \text{решение данной задачи Коши.}$$

Метод операционного исчисления для решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему из уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x' = ax + by + f_1(t) \\ y' = cx + dy + f_2(t) \end{cases} \quad x(0) = x_0 \quad y(0) = y_0$$

где $x(t), y(t)$ - неизвестные функции от аргумента t ;

x_0, y_0, a, b, c, d - постоянные;

$f_1(t), f_2(t)$ - данные функции.

От данной системы перейдем к системе их изображений:

$$\begin{cases} px(p) - x_0 = ax(p) + by(p) + F_1(p) \\ py(p) - y_0 = cx(p) + dy(p) + F_2(p) \end{cases}$$

Полученная система является алгебраической относительно неизвестных $x(p)$ и $y(p)$.

Решая систему, найдем $x(p)$ и $y(p)$ и затем для них определим оригиналы $x(t)$ и $y(t)$.

$$\begin{cases} x' = 4x - 8y + e^t \\ y' = -8x + 4y - e^{2t} \end{cases} \quad x(0) = 0 \quad y(0) = 0$$

Пример 10. Решить систему

Решение. Запишем эту систему в изображениях:

$$\begin{cases} px(p) - x_0 = 4x(p) - 8y(p) + \frac{1}{p-1} \\ py(p) - y_0 = -8x(p) + 4y(p) - \frac{1}{p-2} \end{cases}$$

Найдем из системы $x(p)$ и $y(p)$. Из первого уравнения найдем $y(p) = \frac{1}{8} \left(4x(p) - px(p) + \frac{1}{p-1} \right)$

и подставим это во второе уравнение:

$$8x(p) + (p-4) \frac{1}{8} \left(4x(p) - px(p) + \frac{1}{p-1} \right) = -\frac{1}{p-2}$$

$$\left(8 + \frac{p}{2} - 2 - \frac{p^2}{8} + \frac{p}{2} \right) x(p) = -\frac{p-4}{8(p-1)} - \frac{1}{p-2}$$

$$x(p) = \frac{\frac{p-4}{8(p-1)} + \frac{1}{p-2}}{\frac{p^2}{8} - p - 6} = \frac{\frac{p-4}{p-1} + \frac{8}{p-2}}{p^2 - 8p - 48} = \frac{p^2 + 2p}{(p-12)(p+4)(p-1)(p-2)}$$

Разложим эту дробь на сумму простейших:

$$x(p) = \frac{a}{p-12} + \frac{b}{p+4} + \frac{c}{p-1} + \frac{d}{p-2}$$

Составим тождество:

$$p^2 + 2p = a(p+4)(p-1)(p-2) + b(p-12)(p-1)(p-2) + c(p-12)(p+4)(p-2) + d(p-12)(p+4)(p-1)$$

Придавая p удобные значения, найдем неизвестные a, b, c и d :

$$\text{при } p=1: 3=55c, \quad c=\frac{3}{55};$$

$$\text{при } p=2: 8=-60d, \quad d=-\frac{2}{15};$$

$$\text{при } p=12: 168=1760a, \quad a=\frac{21}{220};$$

$$\text{при } p=-4: 8=-480b, \quad b=-\frac{1}{60}.$$

Подставляя эти значения, получим:

$$x(p) = \frac{21}{220} \cdot \frac{1}{p-12} - \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{p+4} + \frac{3}{55} \cdot \frac{1}{p-1} - \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{p-2}$$

Теперь найдем по формуле (4) таблицы оригинал:

$$x(t) = \frac{21}{220} e^{12t} - \frac{1}{60} e^{-4t} + \frac{3}{55} e^t - \frac{2}{15} e^{2t}$$

Неизвестную функцию $y(t)$ можно найти из первого уравнения данной системы, подставляя вместо $x(t)$ и $x'(t)$ их значения.

$$x'(t) = \frac{63}{55} e^{12t} + \frac{1}{15} e^{-4t} + \frac{3}{55} e^t - \frac{4}{15} e^{2t}$$

Найдем

$$y = \frac{1}{8} (4x - x' + e^t)$$

Из первого уравнения имеем

Подставим сюда значения x и x' .

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{8} \left(\frac{21}{55} e^{12t} - \frac{1}{15} e^{-4t} + \frac{12}{55} e^t - \frac{8}{15} e^{2t} - \frac{63}{55} e^{12t} + \frac{1}{15} e^{-4t} - \frac{3}{55} e^t + \frac{4}{15} e^{2t} + e^t \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left(-\frac{42}{55} e^{12t} - \frac{2}{15} e^{-4t} + \frac{64}{55} e^t - \frac{4}{15} e^{2t} \right) = -\frac{21}{220} e^{12t} - \frac{2}{60} e^{-4t} + \frac{8}{55} e^t - \frac{1}{30} e^{2t} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x(t) = \frac{21}{220} e^{12t} - \frac{1}{60} e^{-4t} + \frac{3}{55} e^t - \frac{2}{15} e^{2t} \\ y(t) = -\frac{21}{220} e^{12t} - \frac{2}{60} e^{-4t} + \frac{8}{55} e^t - \frac{1}{30} e^{2t} \end{cases}$$

Индивидуальные домашние задания 8

ИДЗ 8.1

Найти область определения функций и нарисовать график:

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|
| 1. $z = \sqrt{x^2 - 4y^2}$ | 2. $z = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ | 3. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ |
| 4. $z = \arcsin \frac{x}{y}$ | 5. $z = \arccos \frac{y}{x}$ | 6. $z = \arcsin(xy)$ |
| 7. $z = \ln(y^2 - x^2)$ | 8. $z = \ln(x - y^2)$ | 9. $z = \ln(y + 1 - x^2)$ |
| 10. $z = \sqrt{x - 1 - y^2}$ | 11. $z = \sqrt{y + 2 - x^2}$ | 12. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ |
| 13. $z = \arcsin \frac{x-1}{y}$ | 14. $z = \arccos \frac{y+1}{x}$ | 15. $z = \arccos(x + y - 1)$ |
| 16. $z = \ln(4 - 4x^2 - y^2)$ | 17. $z = \ln(2 + y^2 - x)$ | 18. $z = \ln(3 + x^2 - y)$ |
| 19. $z = \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y}$ | 20. $z = \sqrt{xy} + \sqrt{y-x}$ | |

Пример 1 гл. 13.

ИДЗ 8.2

Найти линии уровня функции:

- | | | |
|---------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| 1. $z = \arccos(x^2 - y)$ | 2. $z = \arcsin(x - y^2)$ | 3. $z = \arccos(x^2 + y^2 - 1)$ |
| 4. $z = \arcsin(2 - x^2 - y^2)$ | 5. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 3}$ | 6. $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ |
| 7. $z = \sqrt{x^2 - y - 3}$ | 8. $z = \sqrt{y - 2x^2 + 1}$ | 9. $z = \frac{y+1}{x}$ |
| 10. $z = \frac{x-2}{y}$ | 11. $z = \frac{y}{x+1}$ | 12. $z = \frac{x}{y-1}$ |
| 13. $z = x^2 + y^2 - 4$ | 14. $z = 2x^2 + y - 1$ | 15. $z = y - x^2 - 2$ |
| 16. $z = xy$ | 17. $z = x(y-1)$ | 18. $z = y(x+2)$ |
| 19. $z = \frac{x-y}{x-1}$ | 20. $z = \frac{x+y}{y+1}$ | |

Примеры 3, 4 гл.13.

ИДЗ 8.3

Найти частные производные второго порядка:

- | | | | |
|---|--|--------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $z = \ln(xy + 1)$ | 2. $z = \ln\left(\frac{x}{y} + 1\right)$ | 3. $z = \ln(x^2 + y^2)$ | 4. $z = \sin(xy)$ |
| 5. $z = \cos(x^2 + y)$ | 6. $z = \operatorname{tg}(x + y)$ | 7. $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$ | 8. $z = \arccos \frac{y^2}{x}$ |
| 9. $z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy}$ | 10. $z = \frac{x^2}{y+1}$ | 11. $z = \frac{y^2}{x-1}$ | 12. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ |
| 13. $z = e^{xy}$ | 14. $z = e^{x/y}$ | 15. $z = e^{y/x}$ | 16. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ |

17. $z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 18. $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$ 19. $z = \frac{\sqrt{x+y}}{x}$ 20. $z = \frac{\sqrt{x+y}}{y}$
 Примеры 5, 6, 7 гл. 13.

ИДЗ 8.4

Найти полный дифференциал функции:

1. $z = x^y$ 2. $z = x^{\ln y}$ 3. $z = y^{\ln x}$
 4. $z = \frac{\ln x}{y}$ 5. $z = \frac{\ln y}{x}$ 6. $z = \frac{x-y}{x+y}$
 7. $z = \sqrt{x}y + x + y$ 8. $z = x\sqrt{y} - x - y$ 9. $z = \sqrt{xy}$
 10. $z = \ln(x + y^2)$ 11. $z = (x + y^2)$ 12. $z = \frac{x+y}{x-y}$
 13. $z = \frac{x^2}{y-2}$ 14. $z = \frac{y^2}{x+3}$ 15. $z = \sqrt{x^2 + y + 1}$
 16. $z = \sqrt{x - y^2 - 1}$ 17. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ 18. $z = \arcsin(xy + 1)$
 19. $z = \arccos\left(\frac{x}{y} + 1\right)$ 20. $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$
 Пример 8 гл. 13.

ИДЗ 8.5

Найти уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M:

1. $z = \ln(1 - xy)$, M(0, 2, 0) 2. $z = \ln\left(\frac{y}{x} + 1\right)$, M(-2, 0, 0)
 3. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}$, M(2, 3, 2) 4. $z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y}}$, M(0, 1, 1)
 5. $z = \sqrt{x + y^2 + 2}$, M(-2, -1, 1) 6. $z = \sqrt{x^2 - y + 2}$, M(-1, 2, 1)
 7. $z = \sqrt{xy} - 1$, M(2, 2, 1) 8. $z = \sqrt{x - y}$, M(3, -1, 2)
 9. $z = \ln(x^2 + y - 2)$, M(-2, -1, 0) 10. $z = \ln(x - y^2 + 1)$, M(1, -1, 0)
 11. $z = \frac{x+1}{x+y}$, M(1, -2, -2) 12. $z = \frac{y-2}{x-y}$, M(2, 1, -1)
 13. $z = \arcsin \frac{x+1}{y}$, M(0, 2, $\frac{\pi}{6}$) 14. $z = \arccos \frac{y-1}{x}$, M(2, 0, $\frac{2\pi}{3}$)
 15. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, M(-2, -1, 2) 16. $z = \sqrt{x^2 - y^2 + 1}$, M(-1, 1, 1)
 17. $z = \frac{x^2 + 1}{y}$, M(1, -1, -2) 18. $z = \frac{y^2 - 1}{x}$, M(1, -2, 3)
 19. $z = \operatorname{arctg} \frac{y+1}{x}$, M(1, -1, 0) 20. $z = e^{x^2 - y^2}$, M(1, -1, 1)

Пример 9 гл. 13.

ИДЗ 8.6

Вычислить приближенно:

1. $\sqrt{\frac{1,96-1}{1,02+3}}$
2. $\frac{1+0,98}{2-1,03}$
3. $\sqrt{\frac{2+2,01}{0,97}}$
4. $\frac{1,01}{3-0,96}$
5. $\ln \frac{1+1,02}{3-1,04}$
6. $\ln \frac{2-0,98}{1,03}$
7. $\ln \frac{1,02}{3-2,03}$
8. $\ln \frac{2,04}{1+0,97}$
9. $\frac{1,02^2+1}{0,96}$
10. $\frac{1,96^2-1}{1+2,03}$
11. $\frac{2,02-1}{0,98^2}$
12. $\frac{1+2,97}{2,02^2}$
13. $\sqrt{\frac{0,98}{1,03^2+3}}$
14. $\sqrt{\frac{1,05}{2-0,96^2}}$
15. $\sqrt{\frac{1+1,95^2}{4+1,02}}$
16. $\sqrt{\frac{2-1,01^2}{0,95}}$
17. $e^{1,97^2-4,02}$
18. $e^{1,02^2-0,96}$
19. $e^{0,97^2+2,02-3}$
20. $e^{2,01^2-1,03-3}$

Пример 10 гл. 13.

ИДЗ 8.7

Исследовать на экстремум функцию:

1. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$
2. $z = 100 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$
3. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 100$
4. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 3$
5. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 5$
6. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 2$
7. $z = 4(x - y - 1) - x^2 - y^2$
8. $z = 6(x - y - 1) - 3x^2 - 3y^2$
9. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y + 20$
10. $z = (x - 1)^2 + 2y^2 + 1$
11. $z = 2x^2 + (y + 1)^2 + 2$
12. $z = x^3 + y^3 - 3xy + 2$
13. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2 + 1$
14. $z = x\sqrt{y} - x^2 + y + 6x$
15. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 3$
16. $z = xy - x^2 - y^2 + 4$
17. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 3$
18. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
19. $z = xy(6 - x - y)$
20. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$

Примеры 12, 16 гл. 13.

ИДЗ 8.8

Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области D, ограниченной заданными линиями:

1. $z = 3x + y - xy$, $D: x = 0, y = 4, y = x$
2. $z = xy - x - 2y$, $D: x = 3, y = 0, y = x$
3. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$
4. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y$, $D: x = 0, y = 0, x + y = 1$
5. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$

6. $z = x^2 + 2xy$ $D: y = 0, y = x^2 - 4$
7. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ $D: y = 8, y = 2x^2$
8. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x$ $D: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0$
9. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y$ $D: x = 5, y = 0, x - y = 1$
10. $z = xy - 3x - 2y$ $D: x = 0, y = 0, x = 4, y = 4$
11. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$ $D: x = 0, y = 2, y = 2x$
12. $z = xy - 2x - y$ $D: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4$
13. $z = x^2 + xy$ $D: y = 0, y = 4x^2 - 4$
14. $z = x^2y(4 - x - y)$ $D: x = 0, y = 0, x + y = 6$
15. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ $D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$
16. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ $D: x = 3, y = 0, y = x + 1$
17. $z = 4 - 2x^2 - y^2$ $D: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$
18. $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$ $D: x = 0, y = 0, x + y = 6$
19. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ $D: x = -1, x = 1, y = -1, y = 1$
20. $z = 2x^2 + 3y^2$ $D: y = 0, y = \sqrt{4 - x^2}$

Примеры 15, 16 гл. 13.

ИДЗ 8.9

Найти экстремумы функции

$z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$:

1. $z = x - y$ при $x^2 + y^2 = 1$
2. $z = x + y$ при $x^2 + 2y^2 = 2$
3. $z = 2x - y$ при $x^2 + 3y^2 = 3$
4. $z = x - 2y$ при $2x^2 + y^2 = 1$
5. $z = x + 2y$ при $2x^2 + xy = 1$
6. $z = x + 3y$ при $2xy + y^2 = 1$
7. $z = 3x + y$ при $x^2 + y^2 = 4$
8. $z = y - 2x$ при $x^2 + y^2 = 2$
9. $z = x - 3y$ при $xy + y^2 = 2$
10. $z = y - 3x$ при $x^2 + xy = 3$
11. $z = x^2 - y^2$ при $x + 2y - 1 = 0$
12. $z = 2x^2 - y^2$ при $x + y + 2 = 0$
13. $z = x^2 + y^2$ при $x - 2y + 2 = 0$
14. $z = 2x^2 + y^2$ при $2x - y + 3 = 0$
15. $z = x^2 + 2y^2$ при $2x + y - 2 = 0$
16. $z = x^2 + xy$ при $3x + y + 1 = 0$
17. $z = 2xy + y^2$ при $2x - y + 3 = 0$
18. $z = 2x^2 - xy$ при $x + 2y + 3 = 0$
19. $z = xy - y^2$ при $x + y + 3 = 0$
20. $z = x^2 - 2xy$ при $x - 3y + 2 = 0$

Примеры 13, 14 гл. 13.

ИДЗ 8.10

Проверить, удовлетворяет ли данному уравнению функция $z = f(x, y)$:

1. $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0$, $z = \frac{y}{x}$
3. $xz'_x + yz'_y = 3(x^3 - y^3)$, $z = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3$
5. $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$, $z = \ln(x^2 + (y+1)^2)$
7. $yz''_{xy} = (1 + y \ln x)z'_x$, $z = x^y$
9. $z''_{xx} = z''_{yy}$, $z = e^{-\cos(x+y)}$
11. $x^2 z'_x - xyz'_y + y^2 = 0$, $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$
13. $x^2 z''_{xx} - 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} + 2xyz = 0$, $z = e^{xy}$
15. $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$, $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$
17. $9z''_{xx} + z''_{yy} = 0$, $z = e^{-x-3y} \cdot \sin(x+3y)$
19. $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0$, $z = xe^{y/x}$

Примеры 5, 6, 7 гл. 13.

2. $xz'_x + yz'_y = 2z$, $z = \frac{xy}{x+y}$
4. $x^2 z''_{xx} + y^2 z''_{yy} = 0$, $z = e^{xy}$
6. $z''_{xx} = z''_{yy}$, $z = \sin^2(x-y)$
8. $x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} = 0$, $z = y\sqrt{\frac{y}{x}}$
10. $xz'_x + yz'_y = z$, $z = x \ln \frac{y}{x}$
12. $yz'_x - xz'_y = 0$, $z = \ln(x^2 + y^2)$
14. $z''_{xy} = 0$, $z = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$
16. $xz'_x + yz'_y + z = 0$, $z = \frac{2x+3y}{x^2+y^2}$
18. $xz'_x + yz'_y = 2z$, $z = (x^2 + y^2) \operatorname{tg} \frac{x}{y}$
20. $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$, $z = \arctg \frac{y}{x}$

Индивидуальные домашние задания 9

ИДЗ 9.1

Среди n лотерейных билетов m выигрышных. Наудачу взяли k билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных. (Исходные данные в таблице 1.)

Пример 4 гл. 14.

ИДЗ 9.2

Коэффициенты p и q уравнения $x^2 + px + q = 0$ удовлетворяют условиям: $0 \leq p \leq a$, $0 \leq q \leq b$. Найти вероятность того, что у уравнения: варианты 1-10 - есть решения; варианты 11-20 - нет решений. (Исходные данные в таблице 1.)

Пример 5 гл. 14.

ИДЗ 9.3

В двух ящиках $n\%$ и $k\%$ стандартных изделий соответственно. Наудачу выбирают по одному из каждого ящика. Найти вероятность того, что а) два стандартных; б) одно стандартное; в) хотя бы одно стандартное. (Исходные данные в таблице 1.)

Пример 7 гл. 14.

ИДЗ 9.4

Из 100 ламп n_i изготовлены в i цехе, $i=1, 2, 3$, $n_1 + n_2 + n_3 = 100$. В лампах первого цеха 6%, второго - 4%, третьего - 2% бракованных. Наудачу берут одну лампу. Найти вероятность того, что она не бракованная. (Исходные данные в таблице 1.)

Пример 9 гл. 14.

ИДЗ 9.5

В первой урне n белых и m черных шаров, во второй k белых и l черных. Из первой во вторую переложено S шаров. Найти вероятность того, что шар, взятый из второй урны, - белый. (Исходные данные в таблице 1.)

Пример 9 гл. 14.

ИДЗ 9.6

Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна p . Куплено n билетов. Составить закон распределения случайной величины количества выигранных билетов. (Исходные данные в таблице 1.)

Пример 15 гл. 14.

ИДЗ 9.7

В магазин поступили изделия с двух заводов в количестве n и k . Среди них $m\%$ изделий первого завода и $l\%$ второго завода первосортных. Куплено одно первосортное изделие. Найти вероятность того, что оно изготовлено

первым заводом. (Исходные данные в таблице 2.) Пример 10 гл. 14.

ИДЗ 9.8

n раз бросили (монету в вариантах 1-10; игральный кубик в вариантах 11-20). Найти вероятность того, что герб (в вариантах 1-10) или шестерка (в вариантах 11-20) выпадет: а) ровно k раз; б) не менее m_1 и не более m_2 раз. (Исходные данные в таблице 2.)

Примеры 12, 13 гл. 14.

ИДЗ 9.9

Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины. Найти параметр α , математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения, вероятность попадания в интервал (x_1, x_2) .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - a}, & \text{при } x \in [a, b] \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b] \end{cases};$$

Варианты 1-5:

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{при } x \in [\alpha, b] \\ 0, & \text{при } x \notin [\alpha, b] \end{cases};$$

Варианты 6-10:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{при } x \in [a, b] \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b] \end{cases};$$

Варианты 11-15:

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{при } x \in [a, \alpha] \\ 0, & \text{при } x \notin [a, \alpha] \end{cases};$$

Варианты 16-20:

(Исходные данные в таблице 2.) Примеры 21, 22 гл. 14.

ИДЗ 9.10

Дана плотность распределения $f(x) = \gamma e^{-ax^2 + bx + c}$ случайной величины. Найти параметр γ , математическое ожидание, дисперсию, вероятность попадания в интервал (x_1, x_2) . (Исходные данные в таблице 2.)

Пример 23 гл. 14.

Та бл иц а 1	6	n	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5
		p	0,2	0,3 5	0,1 5	0,1	0,3	0,0 5	0,1 5	0,2 5	0,1	0,2 5	0,2	0,2 5	0,3	0,1 5	0,2	0,0 5	0
		S	3	2	4	3	2	4	3	2	4	3	2	4	3	2	4	3	2
		l	8	3	5	4	3	6	5	4	5	3	7	3	5	4	6	6	3
		k	6	4	3	5	6	3	6	4	5	4	3	6	4	3	6	5	3
		m	6	5	8	7	5	4	5	5	2	5	4	3	4	6	3	6	4
		n	5	5	6	6	4	7	7	6	6	5	4	7	6	4	5	7	5
		n ₂	40	39	39	40	41	43	38	38	37	37	36	36	34	34	35	35	4
		n ₁	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	32	31	30	29	28	27	2
		k	65	70	82	64	90	66	85	56	78	58	84	53	91	67	92	51	9
		n	80	75	76	83	72	87	63	88	54	81	55	89	52	79	62	93	5
		b	1	1	2	1	2	3	2	3	3	1	2	3	4	4	4	4	5
		a	2	3	3	1	2	3	1	1	2	4	4	4	4	3	2	1	5
		l	7	6	5	5	4	3	4	5	6	6	5	7	7	4	5	7	6
		k	15	13	12	8	7	7	8	10	8	7	6	9	8	9	11	10	1
		m	12	14	11	10	9	10	9	8	10	8	9	12	10	10	12	13	1
		n	20	21	22	18	19	17	17	16	16	15	15	18	19	20	21	22	2
	№ за да ни я	№ ва ри ан та	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1

Таблица 2	10	x_2	3	0	2	0	2	3	-1	1	-1	0	3	-2	4	0	-1	4	-
		x_1	1	-2	0	-1	1	2	-2	0	-3	-3	0	-3	0	-4	-4	1	-
		c	1	1	-1	-1	-2	1	1	-1	-1	2	?	?	-1	-1	1	-?	
		b	1	-1	2	-2	3	4	-4	2	-2	-8	1	-1	?	-?	-2	1	-
		a	?	?	?	?	?	2	2	2	2	2	?	?	?	?	?	$\frac{1}{8}$	
		x_2	5	6	9	7	8	3	2	2,5	2	5	4	3	4	2	5	2,5	1
		x_1	3	4	6	5	5	2	1	2	1,5	4	3,5	2	3	1	3	1,5	
		b	7	8	9	8	10	4	3	3	2	5	4	5	4	4	5	?	
		a	3	3	4	4	4	?	?	1	1	?	3	2	2	1	1	1	
		m_2	7	7	8	8	6	7	9	9	8	10	4	5	4	5	7	7	
		m_1	4	3	4	5	3	5	5	6	6	7	1	1	2	2	4	3	
		k	6	5	4	7	6	4	7	5	7	6	3	4	2	3	4	2	
		n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	19	18	17	16	15	14	1
		l	58	84	53	91	67	92	51	94	60	67	61	78	65	70	64	82	6
		m	92	57	95	59	93	62	79	52	89	55	81	54	88	63	87	72	8
		k	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	1
		n	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	26	27	28	29	30	31	3
	№ задания	№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1

Индивидуальные домашние задания 10

ИДЗ 10.1

Представить в тригонометрической форме:

- | | | | |
|--------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1. $1+i$ | 2. $1-\sqrt{3}i$ | 3. $\sqrt{3}+i$ | 4. $2-2i$ |
| 5. $2i$ | 6. $-2i$ | 7. $-\sqrt{3}+i$ | 8. $-\sqrt{3}-i$ |
| 9. -1 | 10. $\sqrt{3}-i$ | 11. $1+\sqrt{3}i$ | 12. $-1-\sqrt{3}i$ |
| 13. $-1+\sqrt{3}i$ | 14. $-1+i$ | 15. $-2+2i$ | 16. $3-\sqrt{3}i$ |
| 17. $\sqrt{3}+3i$ | 18. $3+\sqrt{3}i$ | 19. $-\sqrt{3}+3i$ | 20. $\sqrt{3}-3i$ |

Пример 2 гл. 15.

ИДЗ 10.2

Найти все корни и указать их на координатной плоскости:

- | | | | |
|----------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $\sqrt[4]{16}$ | 2. $\sqrt[6]{8\sqrt{3}-8i}$ | 3. $\sqrt[4]{-4}$ | 4. $\sqrt[3]{8\sqrt{3}+8i}$ |
| 5. $\sqrt[5]{-32}$ | 6. $\sqrt[5]{i}$ | 7. $\sqrt[5]{16-16\sqrt{3}i}$ | 8. $\sqrt[5]{16\sqrt{3}+16i}$ |
| 9. $\sqrt[6]{8}$ | 10. $\sqrt[6]{-4i}$ | 11. $\sqrt[6]{8+8\sqrt{3}i}$ | 12. $\sqrt[4]{8\sqrt{3}-8i}$ |
| 13. $\sqrt[6]{-16}$ | 14. $\sqrt[3]{4i}$ | 15. $\sqrt[4]{8-8\sqrt{3}i}$ | 16. $\sqrt[5]{16+16i}$ |
| 17. $\sqrt[5]{-1+i}$ | 18. $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$ | 19. $\sqrt[6]{-4\sqrt{3}-4i}$ | 20. $\sqrt[3]{-8}$ |

Примеры 4, 5 гл. 15.

ИДЗ 10.3

Восстановить аналитическую функцию $\omega(z) = u(x, y) + i.v(x, y)$:

- | | |
|--|---|
| 1. $u = x^2 - y^2 + 3x + y$ | 2. $v = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ |
| 3. $u = x^3 - 3y^2x + 2$ | 4. $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 1$ |
| 5. $u = x^2 - y^2 + xy$ | 6. $v = 3 \ln(x^2 + y^2)$ |
| 7. $u = 3(x^2 - y^2 + 1)$ | 8. $v = 2e^{x \cos y}$ |
| 9. $u = e^{x \cos y}$ | 10. $v = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y$ |
| 11. $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$ | 12. $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$ |
| 13. $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$ | 14. $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$ |
| 15. $u = y - 2xy$ | 16. $v = xy + x$ |
| 17. $u = e^{-y} \cos x$ | 18. $v = x^2 - y^2 + 2x$ |
| 19. $u = e^x \sin y$ | 20. $v = 3x^2y - y^3$ |

Примеры 6, 13, 14 гл. 15.

ИДЗ 10.4

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного:

1. $\int_L \operatorname{Im} z dz$, L - отрезок от точки $z_1 = 3$ до $z_2 = -3$;
2. $\int_L \operatorname{Im} z dz$, L - дуга окружности $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$;
3. $\int_L |z|^2 dz$, L - отрезок от точки $z_1 = 0$ до $z_2 = e^{\frac{i\pi}{4}}$;
4. $\int_L |z| dz$, L - отрезок от точки $z_1 = 0$ до $z_2 = 2 + i$;
5. $\int_L |z| dz$, L - дуга окружности $|z| = 2$, $0 \leq \arg z \leq \pi$;
6. $\int_L |z| dz$, L - окружность $|z| = 3$;
7. $\int_L \operatorname{Re} z dz$, L - дуга параболы $y = 2x^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + 2i$;
8. $\int_L \operatorname{Re} z dz$, L - отрезок от точки $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$;
9. $\int_L \operatorname{Re} z dz$, L - дуга окружности $|z| = 3$, $0 \leq \arg z \leq \pi$;
10. $\int_L \operatorname{Im} z dz$, L - окружность $|z - 1| = 1$;
11. $\int_L \operatorname{Im} z dz$, L - отрезок от точки $z_1 = 0$ до $z_2 = 2 + i$;
12. $\int_L (z + 1)e^z dz$, L - окружность $|z + 1| = 1$;
13. $\int_L (z^2 + z + 1) dz$, L - дуга окружности $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$;
14. $\int_L z^2 dz$, L - отрезок от точки $z_1 = 1$ до $z_2 = 1 - i$;
15. $\int_L z|z| dz$, L - отрезок от точки $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$;
16. $\int_L z \operatorname{Im} z dz$, L - дуга окружности $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$;
17. $\int_L (z + 1)z dz$, L - отрезок от точки $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + 2i$;
18. $\int_L (2z + 1) dz$, L - отрезок от точки $z_1 = 1 + i$ до $z_2 = i$;
19. $\int_L y = x^2$, L - дуга параболы от точки $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$;

20. $\int_L (z^2 + 1) dz$, L - отрезок от точки $z_1 = -1 + i$ до $z_2 = i$;
Примеры 16, 17, 18 гл. 15.

ИДЗ 10.5

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z :

1. $\frac{2z^3 + z^2 - z}{z - 10}$
2. $\frac{z^4 + z^3 - 2z^2}{z - 4}$
3. $\frac{z^4 + 2z^3 - 8z^2}{z - 8}$
4. $\frac{2z^3 + 5z^2 - 25z}{z - 14}$
5. $\frac{z^4 + 3z^3 - 18z^2}{z - 12}$
6. $\frac{2z^3 + 3z^2 - 9z}{z - 18}$
7. $\frac{2z^3 + 7z^2 - 49z}{z - 20}$
8. $\frac{z^4 + 4z^3 - 32z^2}{z + 2}$
9. $\frac{2z^3 + 9z^2 - 81z}{z + 4}$
10. $\frac{z^4 + 5z^3 - 50z^2}{z + 6}$
11. $\frac{z + z^2 - 2z^3}{z + 8}$
12. $\frac{2z^2 + z^3 - z^4}{z + 10}$
13. $\frac{9z + 3z^2 - 2z^3}{z + 12}$
14. $\frac{8z^2 + 2z^3 - z^4}{z + 14}$
15. $\frac{25z + 5z^2 - 2z^3}{z + 16}$
16. $\frac{18z^2 + 3z^3 - z^4}{z + 20}$
17. $\frac{49z + 7z^2 - 2z^3}{z + 18}$
18. $\frac{32z^2 + 4z^3 - z^4}{z + 16}$
19. $\frac{50z^2 + 5z^3 - z^4}{z + 20}$
20. $\frac{81z + 9z^2 - 2z^3}{z + 18}$

Пример 24 гл. 15.

ИДЗ 10.6

Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции:

1. $\frac{e^z - 1}{z - \frac{z^3}{6} - \sin z}$
2. $\frac{\sin 4z - 3z}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}$
3. $\frac{\cos z - 1}{z + \frac{z^3}{6} - \operatorname{sh} z}$
4. $\frac{\operatorname{sh} z - z}{1 + \frac{z^2}{2} - \operatorname{ch} z}$
5. $\frac{\operatorname{ch} z - 1}{1 + z - e^z}$
6. $\frac{1 - e^{2z}}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}$
7. $\frac{1 - \cos z^2}{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}$
8. $\frac{\sin z - z}{e^z - 1 - z}$
9. $\frac{z^4 \cos \frac{1}{z^2}}{\operatorname{ch} 2z - 1}$
10. $\frac{\cos 2z - 1}{\sin 2z - 2z + \frac{4z^3}{3}}$
11. $\frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{1 - \frac{z^2}{2} - \cos z}$
12. $\frac{\operatorname{ch} 2z - 1}{1 + z + \frac{z^2}{2} - e^z}$
13. $\frac{1}{ze^{\frac{1}{z^2}}}$
14. $\frac{e^z}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{z^2}{2}}$
15. $\frac{\sin z^2 - z^2}{e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2}}$
16. $\frac{1 - \cos 4z}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24}}$
17. $\frac{z \sin \frac{2}{z^3}}{z \sin \frac{2}{z^3}}$
18. $\frac{z - \sin z}{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}$

$$19. \frac{1 - chz}{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cos z}$$

$$20. \frac{e^z}{1 + z + \frac{z^2}{2} - e^z}$$

Примеры 26-30 гл. 15.

ИДЗ 10.7

Вычислить интеграл:

$$1. \oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z(1-z)}$$

$$2. \oint_{|z|=3} \frac{e^z dz}{z(z-2i)}$$

$$3. \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z(z^2-1)}$$

$$4. \oint_{|z|=3} \frac{z^3 dz}{z(z-i)}$$

$$5. \oint_{|z|=2} \frac{\cos z dz}{z(z+i)}$$

$$6. \oint_{|z|=3} \frac{z dz}{z^2+1}$$

$$7. \oint_{|z|=2} \frac{z^4 dz}{(z+1)^3}$$

$$8. \oint_{|z-i|=1} \frac{ze^z dz}{(z-i)^2}$$

$$9. \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^2}$$

$$10. \oint_{|z|=3} \frac{\sin z dz}{(z-1)(z+2i)}$$

$$11. \oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{(z+1)^3}$$

$$12. \oint_{|z-1|=2} \frac{z dz}{(z+i)^2}$$

$$13. \oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z(1+z)^2}$$

$$14. \oint_{|z|=2} \frac{z dz}{(z^2+1)^2}$$

$$15. \oint_{|z|=3} \frac{(2z-1) dz}{z(z-1)^2}$$

$$16. \oint_{|z+i|=2} \frac{\sin z dz}{z(z+1)}$$

$$17. \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z(z^2+1)}$$

$$18. \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^2(z+2i)}$$

$$19. \oint_{|z|=4} \frac{\cos z dz}{z(z+\pi)}$$

$$20. \oint_{|z|=2} \frac{(\sin z + 1) dz}{z(z + \pi/2)}$$

Примеры 19-22, 31-34 гл. 15.

ИДЗ 10.8

Вычислить интеграл:

$$1. \oint_{|z|=1} \frac{(z^2+1) dz}{(z+1) \sin z}$$

$$2. \oint_{|z-3|=1} \frac{e^z dz}{\sin z}$$

$$3. \oint_{|z-1|=2} \frac{(1+z) dz}{\sin z}$$

$$4. \oint_{|z-1|=3} \frac{ze^z dz}{\sin z}$$

$$5. \oint_{|z|=1} \frac{(z+1)^2 dz}{\sin 2\pi z}$$

$$6. \oint_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{(i-z) dz}{\sin \pi z}$$

$$7. \oint_{|z|=1} \frac{e^{iz} dz}{\sin 3\pi z}$$

$$8. \oint_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{(z^2+3) dz}{(\pi+z) \sin z}$$

$$9. \oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z \sin \left(z + \frac{\pi}{2} \right)}$$

$$10. \oint_{|z|=1} \frac{(z^3-i) dz}{(z-\pi) \sin 2z}$$

$$11. \oint_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi) dz}{\sin 2z}$$

$$12. \oint_{|z|=2} \frac{(\sin z + 2) dz}{z^2 + \pi z}$$

$$13. \oint_{|z-\frac{3}{2}|=1} \frac{z(z+\pi) dz}{(z-\pi) \sin z}$$

$$14. \oint_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2+\pi) dz}{i \sin z}$$

$$15. \oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z dz}{z \cos z}$$

$$16. \oint_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z dz}{z \sin z}$$

$$17. \oint_{|z-1|=2} \frac{(z+1) dz}{\sin \frac{z}{3}}$$

$$18. \oint_{|z-\frac{3}{2}|=2} \frac{(z^2 + \sin 2z) dz}{\sin \frac{z}{2}}$$

$$19. \oint_{|z+1|=3} \frac{(z+2)dz}{\sin 2z} \quad 20. \oint_{|z|=1} \frac{(e^z+1)dz}{z \sin z}$$

Примеры 19-22, 31-34 гл. 15.

ИДЗ 10.9

Вычислить интеграл:

$$\begin{array}{llll} 1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sqrt{3}\sin x} & 2. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\sqrt{15}\sin x} & 3. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+2\sqrt{6}\sin x} & 4. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{6+\sqrt{35}\sin x} \\ 5. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{7+4\sqrt{3}\sin x} & 6. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-4\sin x} & 7. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\sin x} & 8. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{8-3\sqrt{7}\sin x} \\ 9. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{9-4\sqrt{5}\sin x} & 10. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-\sqrt{7}\sin x} & 11. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-\sqrt{5}\sin x} & 12. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-2\sqrt{2}\sin x} \\ 13. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\sqrt{3}\sin x} & 14. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-\sqrt{21}\sin x} & 15. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+2\sqrt{2}\sin x} & 16. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{3}\sin x-2} \\ 17. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\sqrt{6}\sin x-5} & 18. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4\sin x+5} & 19. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3\sin x+5} & 20. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{7}\sin x+4} \end{array}$$

Пример 37 гл. 15.

ИДЗ 10.10

Вычислить интеграл:

$$\begin{array}{lll} 1. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)dx}{(x^2+1)^2} & 2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} & И. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\ 4. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} & 5. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2} & 6. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \\ 7. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} & 8. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} & 9. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)dx}{(x^2+4)^2} \\ 10. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} & 11. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} & 12. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)} \\ 13. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9} & 14. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+3)^2} & 15. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)} \\ 16. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{(x^2+x+1)^2} & 17. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{(x^2+4x+13)^2} & 18. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+5)^2} \\ 19. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} & 20. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+10)dx}{(x^2+4)^2} \end{array}$$

Примеры 35, 36 гл. 15.

Индивидуальные домашние задания 11

ИДЗ 11.1

Найти изображение функции $f(t)$:

- | | | |
|---|--|--|
| <p>1. $f(t) = \sin 3t - t^2$</p> <p>4. $f(t) = 3\operatorname{ch} 2t + 3t$</p> <p>7. $f(t) = 4te^{-t} + 3$</p> <p>10. $f(t) = 2\cos t - 3\sin 2t$</p> <p>13. $f(t) = 2\operatorname{sh} 2t - 3t$</p> <p>16. $f(t) = 3t \cos 2t - 2$</p> <p>19. $f(t) = e^{-t} \cos 3t + 4$</p> | <p>2. $f(t) = 2\cos 2t + t^3$</p> <p>5. $f(t) = 3t \sin 2t - 2$</p> <p>8. $f(t) = e^{-2t} \sin 3t + t$</p> <p>11. $f(t) = 3\sin 2t + 2t^2$</p> <p>14. $f(t) = 3\operatorname{sh} t - 2t^2$</p> <p>17. $f(t) = 2te^{2t} - 5$</p> <p>20. $f(t) = 3e^{-t} + 2e^{3t}$</p> | <p>3. $f(t) = \operatorname{sh} 3t + 2t$</p> <p>6. $f(t) = 2t \cos t + 1$</p> <p>9. $f(t) = e^{2t} \cos t - 2$</p> <p>12. $f(t) = 4\cos 3t - 3t$</p> <p>15. $f(t) = 2t \sin 3t + 1$</p> <p>18. $f(t) = e^{3t} \sin 2t - 3$</p> |
|---|--|--|

Пример 1 гл. 16.

ИДЗ 11.2

Найти оригинал для изображения $F(p)$:

- | | | |
|---|--|--|
| <p>1. $F(p) = \frac{3}{p^2-1} - \frac{4p}{p^2+4}$</p> <p>4. $F(p) = \frac{3p}{p^2+1} - \frac{2}{p^2-4}$</p> <p>7. $F(p) = \frac{2p-1}{p^2+6p+13}$</p> <p>10. $F(p) = \frac{p^2-1}{(p^2+1)}$</p> <p>13. $F(p) = \frac{2p+3}{p^2-10p+29}$</p> <p>16. $F(p) = \frac{2p+3}{p^2-5p+4}$</p> <p>19. $F(p) = \frac{32p+5}{p^2-3p-4}$</p> | <p>2. $F(p) = \frac{2}{p^2} - \frac{3p}{p^2+2p+2}$</p> <p>5. $F(p) = \frac{p}{p^2+4p+5} - \frac{2}{p}$</p> <p>8. $F(p) = \frac{3p+8}{p^2-8p+17}$</p> <p>11. $F(p) = \frac{3p}{(p^2+4)}$</p> <p>14. $F(p) = \frac{2p^2-18}{(p^2+9)}$</p> <p>17. $F(p) = \frac{p-2}{p^2+3p-4}$</p> <p>20. $F(p) = \frac{3p-1}{p^2-p-2}$</p> | <p>3. $F(p) = \frac{2p}{p^2-2p+5} - \frac{3}{p^2}$</p> <p>6. $F(p) = \frac{3}{p} - \frac{4p}{p^2-6p+13}$</p> <p>9. $F(p) = \frac{p-3}{p^2+8p+20}$</p> <p>12. $F(p) = \frac{3p+1}{p^2+10p+26}$</p> <p>15. $F(p) = \frac{5p}{(p^2+9)}$</p> <p>18. $F(p) = \frac{3p-2}{p^2+5p-6}$</p> |
|---|--|--|

Примеры 2,3,4,6 гл.16.

ИДЗ 11.3

Найти оригинал для изображения $F(p)$:

- | | |
|--|--|
| <p>1. $F(p) = \frac{p-2}{(p+2)(p^2+p+1)}$</p> <p>3. $F(p) = \frac{3}{p^3-8}$</p> <p>5. $F(p) = \frac{3}{p^4+p^2}$</p> | <p>2. $F(p) = \frac{3p+4}{(p-2)(p^2+2p+2)}$</p> <p>4. $F(p) = \frac{2}{p^3+8}$</p> <p>6. $F(p) = \frac{p+3}{(p-1)(p^2+4p+5)}$</p> |
|--|--|

$$7. \quad F(p) = \frac{p+4}{p^3+2p^2+5p}$$

$$9. \quad F(p) = \frac{2+p}{p^3+p^2+p}$$

$$11. \quad F(p) = \frac{p-2}{p^2(p+1)}$$

$$13. \quad F(p) = \frac{p+4}{p^3+1}$$

$$15. \quad F(p) = \frac{3p+1}{(p+2)(p^2-2p+2)}$$

$$17. \quad F(p) = \frac{p-1}{p^3+5p^2+4p}$$

$$19. \quad F(p) = \frac{2p-1}{(p+3)(p^2-4)}$$

$$8. \quad F(p) = \frac{p-1}{(p^2+1)(p^2+4)}$$

$$10. \quad F(p) = \frac{p+3}{p(p^2+4)}$$

$$12. \quad F(p) = \frac{3p}{p^3-1}$$

$$14. \quad F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p+1)}$$

$$16. \quad F(p) = \frac{p+4}{p^3+3p^2+2p}$$

$$18. \quad F(p) = \frac{p-2}{(p+2)(p^2-1)}$$

$$20. \quad F(p) = \frac{p+1}{(p-2)(p^2-9)}$$

Примеры 2, 3, 4, 6 гл.16.

ИДЗ 11.4

Найти оригинал для изображения $F(p)$:

$$1. \quad F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)^2}$$

$$2. \quad F(p) = \frac{1}{(p^2+4)^2}$$

$$3. \quad F(p) = \frac{p^2+1}{(p^2+9)^2}$$

$$4. \quad F(p) = \frac{p^2-p}{(p^2+1)^2}$$

$$5. \quad F(p) = \frac{p^2-2p}{(p^2+4)^2}$$

$$6. \quad F(p) = \frac{p^2+3p}{(p^2+9)^2}$$

$$7. \quad F(p) = \frac{p^2}{(p^2+16)^2}$$

$$8. \quad F(p) = \frac{p^2+p}{(p^2+16)^2}$$

$$9. \quad F(p) = \frac{p}{(p^2+2p+2)^2}$$

$$10. \quad F(p) = \frac{2p}{(p^2+2p+5)^2}$$

$$11. \quad F(p) = \frac{3p}{(p^2-2p+2)^2}$$

$$12. \quad F(p) = \frac{p}{(p^2-2p+5)^2}$$

$$13. \quad F(p) = \frac{p^2+2p}{(p^2+25)^2}$$

$$14. \quad F(p) = \frac{p^2-1}{(p^2+25)^2}$$

$$15. \quad F(p) = \frac{1}{(p^2+4p+5)^2}$$

$$16. \quad F(p) = \frac{p}{(p^2-4p+5)^2}$$

$$17. \quad F(p) = \frac{2}{(p^2+4p+13)^2}$$

$$18. \quad F(p) = \frac{1}{(p^2-4p+8)^2}$$

$$19. \quad F(p) = \frac{p}{(p^2+2p+10)^2}$$

$$20. \quad F(p) = \frac{1}{(p^2-2p+10)^2}$$

Примеры 6, 7 гл. 16.

ИДЗ 11.5

Найти изображение функции $f(t)$:

$$1. \quad f(t) = (t^2+1)e^t$$

$$2. \quad f(t) = (t^2-t)e^{-t}$$

$$3. \quad f(t) = (t^2+2t)e^{2t}$$

$$4. \quad f(t) = t^2 \sin t$$

$$5. \quad f(t) = (t^2+2)\cos 2t$$

$$6. \quad f(t) = t^2 \sinh 2t$$

7. $f(t) = t^2 \operatorname{ch} 3t$ 8. $f(t) = (t^2 - 1) \sin 2t$ 9. $f(t) = (t^2 + t) \cos 3t$
 10. $f(t) = (t^2 - 2) \operatorname{sh} t$ 11. $f(t) = (t^2 + 3t) \operatorname{ch} 2t$ 12. $f(t) = t^3 e^{-t}$
 13. $f(t) = t^3 \sin t$ 14. $f(t) = t^3 \cos 2t$ 15. $f(t) = t^3 \operatorname{sh} 2t$
 16. $f(t) = t^3 \operatorname{ch} 3t$ 17. $f(t) = (t-1)^2 e^{-2t}$ 18. $f(t) = (t+1)^2 \sin t$
 19. $f(t) = (t+2)^2 \cos t$ 20. $f(t) = (t-2)^2 \operatorname{sh} t$
- Примеры 1, 5 гл.16.

ИДЗ 11.6

$F(p)$

Найти оригинал для изображения :

1. $F(p) = \frac{p^2 + 3p + 5}{p^3 - p^2 - p + 1}$ 2. $F(p) = \frac{p^2 - 3p}{p^3 + p^2 + p + 1}$ 3. $F(p) = \frac{p^2 + 1}{p^3 + 2p^2 - 3p - 4}$
 4. $F(p) = \frac{p^2 - p}{p^3 - 3p^2 - 3p + 1}$ 5. $F(p) = \frac{p^2 - 3}{p^3 - 4p - 3}$ 6. $F(p) = \frac{p^2 - p + 3}{p^3 + 4p + 5}$
 7. $F(p) = \frac{p^2 + p + 4}{p^3 + 4p^2 - 3}$ 8. $F(p) = \frac{p^2 + 5}{p^3 + 3p^2 - 2}$ 9. $F(p) = \frac{p^2 - p - 4}{p^3 + 2p^2 + 3p + 2}$
 10. $F(p) = \frac{p^2 + 2p + 6}{p^3 + 3p^2 + 4p + 2}$ 11. $F(p) = \frac{p^2 + 10}{p^3 + 5p^2 - 6}$
 12. $F(p) = \frac{p^2 + p}{p^3 - 4p^2 + 3}$ 13. $F(p) = \frac{p^2 - 3p + 4}{p^3 + 4p^2 + 3p - 8}$
 14. $F(p) = \frac{p^2 - p + 3}{p^3 + 4p - 5}$ 15. $F(p) = \frac{p^2 + 2p + 2}{p^3 - 4p^2 - 2p + 5}$
 16. $F(p) = \frac{p^2 + 7}{p^3 - 5p + 4}$ 17. $F(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p^3 + 2p^2 + p - 4}$
 18. $F(p) = \frac{p^2 - p + 1}{p^3 - 2p^2 - 3p + 4}$ 19. $F(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{p^3 + 3p^2 - p - 3}$
 20. $F(p) = \frac{p^2 - 2p + 5}{p^3 + 4p^2 - 2p - 3}$
- Примеры 2, 3, 4, 6 гл. 16.

ИДЗ 11.7

Решить задачу Коши:

1. $x'' + x = 6e^{-t}$ $x(0) = 3$ $x'(0) = 1$
 2. $x'' - x' = t^2$ $x(0) = 0$ $x'(0) = 1$
 3. $x'' + x' = t^2 + t$ $x(0) = 0$ $x'(0) = -2$
 4. $x'' - x = \cos 3t$ $x(0) = 1$ $x'(0) = 1$
 5. $x'' - 9x = \sin t - \cos t$ $x(0) = -3$ $x'(0) = 2$
 6. $x'' + 2x' = 2 + e^t$ $x(0) = 1$ $x'(0) = 2$
 7. $2x'' - x' = \sin 3t$ $x(0) = 2$ $x'(0) = 1$

8. $x'' + 2x' = \frac{1}{2} \sin t \quad x(0) = -2 \quad x'(0) = 4$
9. $x'' + x = \sin t \quad x(0) = 2 \quad x'(0) = 1$
10. $x'' + 4x = \sin 2t \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 1$
11. $2x'' + 5x' = 29 \cos t \quad x(0) = -1 \quad x'(0) = 0$
12. $x'' + 4x = 8 \sin 2t \quad x(0) = 3 \quad x'(0) = -1$
13. $x'' + x = 2 \cos t \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 1$
14. $x'' + x' - 2x = e^{-t} \quad x(0) = -1 \quad x'(0) = 0$
15. $x'' - 2x' = e^t(t^2 + t - 3) \quad x(0) = 2 \quad x'(0) = 2$
16. $x'' - 3x' + 2x = 12e^{3t} \quad x(0) = 2 \quad x'(0) = 6$
17. $x'' - x' - 6x = 2 \quad x(0) = 1 \quad x'(0) = 0$
18. $x'' - 2x' - 3x = 2t \quad x(0) = 1 \quad x'(0) = 1$
19. $x'' - 3x' + 2x = e^t \quad x(0) = 1 \quad x'(0) = 0$
20. $x'' + 4x' + 29x = e^{-2t} \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 1$

Пример 8 гл. 16.

ИДЗ 11.8

Решить задачу Коши при начальных условиях $x(0) = 0, x'(0) = 0$:

1. $x'' - x' = \frac{1}{1+e^t}$
2. $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{1+t^2}$
3. $x'' - x = \sin t$
4. $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{\cosh^2 t}$
5. $x'' - x' = \frac{1}{\cosh t}$
6. $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{1+t}$
7. $x'' - x' = \frac{e^t}{1+e^t}$
8. $x'' - 2x' = \frac{e^t}{\cosh t}$
9. $x'' + x' = \frac{e^{2t}}{e^t + 3}$
10. $x'' - x' = \frac{1}{1+\cosh t}$
11. $x'' - 4x = \frac{1}{\cosh^2 2t}$
12. $x'' - x = \frac{1}{\cosh^2 t}$
13. $x'' + x' = \frac{e^t}{1+e^t}$
14. $x'' - 4x' + 4x = \frac{2e^{2t}}{\cosh^2 2t}$
15. $2x''x' = \frac{e^t}{(1+e^{t/2})^2}$
16. $x'' + 2x' + x = \frac{te^{-t}}{t+1}$
17. $x'' - x' = \frac{e^{2t}}{2+e^t}$
18. $x'' - x' = \frac{\sin t}{\cosh^2 t}$
19. $x'' + x' = \left(\frac{e^t}{1+e^t}\right)'$
20. $x'' + x' = \left(\frac{1}{1+e^t}\right)'$

Пример 9 гл. 16.

ИДЗ 11.9

Решить систему однородных уравнений при начальных условиях $x(0) = 0, y(0) = 0$:

1. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$
6. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$
7. $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$
8. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$
9. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$
10. $\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$
11. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$
12. $\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$
13. $\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$
14. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y \end{cases}$
15. $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$
16. $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y \end{cases}$
17. $\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$
18. $\begin{cases} x' = 4x - 5y \\ y' = -8x + 4y \end{cases}$
19. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$
20. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$

Пример 10 гл. 16.

ИДЗ 11.10

- Решить систему уравнений при начальных условиях $x(0)=0 \quad y(0)=0$:
1. $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = -4x + y + e^t \end{cases}$
 2. $\begin{cases} x' = -x + 8y + 2 \\ y' = x + y - e^{-t} \end{cases}$
 3. $\begin{cases} x' = 2x + y - 3 \\ y' = 3x + 4y + e^{-2t} \end{cases}$
 4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y + 4 \\ y' = -x + e^{3t} \end{cases}$
 5. $\begin{cases} x' = -2x + y + 3 \\ y' = -3x + 2y - e^{2t} \end{cases}$
 6. $\begin{cases} x' = 6x - y - 4 \\ y' = 3x + 2y + e^{-3t} \end{cases}$
 7. $\begin{cases} x' = y + 5 \\ y' = x - e^{4t} \end{cases}$
 8. $\begin{cases} x' = -x - 2y - 5 \\ y' = 3x + 4y + e^{-5t} \end{cases}$
 9. $\begin{cases} x' = -2x + e^t \\ y' = y - e^{2t} \end{cases}$
 10. $\begin{cases} x' = 4x + 2y - 1 \\ y' = 4x + 6y - e^t \end{cases}$
 11. $\begin{cases} x' = 8x - 3y - 2 \\ y' = 2x + y + e^{2t} \end{cases}$
 12. $\begin{cases} x' = 3x + y - 3 \\ y' = x + 3y - e^{1/t} \end{cases}$
 13. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = 5x + 4y + e^{4t} \end{cases}$
 14. $\begin{cases} x' = x + 2y + 2 \\ y' = 4x + 3y - e^{3t} \end{cases}$
 15. $\begin{cases} x' = 5x + 4y - 4 \\ y' = 4x + 5y + e^t \end{cases}$
 16. $\begin{cases} x' = x + 4y + 3 \\ y' = x + y + e^{-4t} \end{cases}$
 17. $\begin{cases} x' = 3x - 2y - 2 \\ y' = 2x + 8y + e^{-3t} \end{cases}$
 18. $\begin{cases} x' = x + 4y - 5 \\ y' = 2x + 3y + e^{-2t} \end{cases}$
 19. $\begin{cases} x' = 7x + 3y - 1 \\ y' = x + 5y - e^{-2t} \end{cases}$
 20. $\begin{cases} x' = 4x - y - 2 \\ y' = -x + 4y + e^{5t} \end{cases}$

Пример 10 гл. 16.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Глава 13. Функции нескольких переменных	5
Глава 14. Теория вероятностей и математическая статистика	11
§1 Случайные события	11
§2 Дискретные случайные величины	18
§3 Непрерывные случайные величины	21
§4 Математическая статистика	24
Глава 15. Теория функций комплексного переменного	28
§1 Комплексные числа и действия над ними	28
§2 Функции комплексного переменного	32
§3 Дифференцирование функций комплексного переменного	34
§4 Интегрирование функций комплексного переменного	38
§5 Интегральная формула Коши	41
§6 Ряды Тейлора и Лорана	44
§7 Классификация изолированных особых точек. Вычеты	47
§8 Вычисление интегралов от функций действительного переменного	54
Глава 16. Операционное исчисление	57
Индивидуальные домашние задания 8	64
Индивидуальные домашние задания 9	69
Индивидуальные домашние задания 10	73
Индивидуальные домашние задания 11	78

Ильясов Муратхан Нурмагамбетович

Сборник домашних заданий по высшей математике

Учебно-методическое пособие
3 часть

Подписано в печать 15.12.2004.
Формат 29,7 x 42?. Бумага книжно-журнальная.
Объем 1,7 усл.печ.л. Тираж 100 экз.
Заказ № 0009

Редакционно-издательский отдел
Павлодарского государственного педагогического института
637002, г.Павлодар, ул.Мира, 60
E-mail: nauka.ppi@unicode.kz