

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«Московский государственный университет технологий и управления
имени К.Г. Разумовского»**
Филиал ФГБОУ ВПО «МГУТУ имени К.Г. Разумовского» в г. Мелеузе (Республика Башкортостан)

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

*Методические рекомендации по выполнению контрольных работ для
бакалавриата заочной формы обучения по квалификации*

080100.62 по направлению **Экономика**



Введение

Настоящее методическое пособие разработано в соответствии с программой и тематическими планами по математике для бакалавриата заочной формы обучения по квалификации 080100.62 по направлению Экономика.

По каждой теме дано краткое изложение основных теоретических сведений, приведены примеры решения типовых задач, даны вопросы для самоконтроля и тесты, способствующие самостоятельному изучению материала и подготовке к зачётам и экзаменам. Теоретический материал снабжен многочисленными примечаниями и замечаниями, помогающими студенту рационально организовать свой труд.

По всем возникнувшим в ходе изучения вопросам студентам рекомендуется обращаться к преподавателям кафедры «Физики и высшей математики» МГУТУ, проводящим еженедельные консультации, а так же пользоваться учебным пособием и литературой, список которой дан в данной методичке.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Рабочая программа курса «Линейная алгебра».....
2. Учебная литература
3. Методические указания к решению задач
4. Задачи для контрольной работы
- 4.1. Раздел I. Линейная алгебра.
- 4.2. Раздел II. Аналитическая геометрия
5. Таблица распределения задач по вариантам и контрольной работе
6. Правила выполнения и оформления контрольной работы

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА «Линейная алгебра»

I. Элементы линейной алгебры.

1. Матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами, свойства матриц. Обратная матрица. Определители, их свойства. Вычисление определителей.
2. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса, правило Крамера. Ранг матрицы, теорема Кронекера - Капелли. Квадратичные формы.
3. Понятие о задаче линейного программирования и симплекс – методе.

II. Элементы векторной алгебры и аналитическая геометрия плоскости.

1. Системы координат на плоскости. Векторы. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Базис, координаты вектора в данном базисе. Скалярное произведение векторов. Уравнения прямых на плоскости. Кривые второго порядка.

2. УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

а) Основная.

1. Шипачев В.С. Высшая математика: Учеб. Для вузов/ В.С. Шипачев. – М.: Высш. Шк., 2006. – 479 с.
2. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учеб. Пособие для вузов/ В.С. Шипачев. – М.: Высш. Шк., 2003. – 304 с.
3. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 575 с.
4. Практикум по высшей математике для экономистов. Под ред. проф. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 423 с.

б) Дополнительная

1. Баврин И.И. Курс высшей математики. Учебник. – М., Просвещение, 1992.
2. Беклемишева Л.А., Петрович Ю.А., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М., Наука, 1987.
3. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. - М., Высшая школа, 1991 (уч. пособие).
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М., Наука, 1984.
5. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.- М., 1985.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник. – М., Наука, 1982.
7. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике. Ч.1, - М., Финансы и статистика, 1998.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Для того, чтобы облегчить студенту-заочнику самостоятельное выполнение контрольных работ, приведем примеры решений задач, аналогичных тем, какие предлагаются в контрольных работах. Подобные задачи включаются и в экзаменационные билеты.

Задача из раздела I

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 15 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$$

Требуется показать, что система совместна, и найти ее решение тремя способами: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса; в) методом обратной матрицы. Выполнить проверку решения.

Решение.

Система n линейных уравнений с n неизвестными является совместной и имеет единственное решение, так как определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных не равен нулю. Вычислим определитель системы методом разложения его по элементам строки. Разложим по первой строке:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2(-20 - 12) - 2(15 - 8) - 3(18 + 16) =$$

$$= -180 \neq 0$$

Так как определитель системы не равен нулю, система уравнений совместна и имеет единственное решение.

а) Найдем решение системы по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

где D_1 D_2 D_3 - определители, которые получаются из определителя D системы путем замены в нем соответственно 1-го, 2-го, 3-го столбцов коэффициентов при неизвестных x_1 x_2 x_3 столбцом свободных членов уравнений, стоящих в правой части данной системы. Получим следующие три определителя:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 15 & 2 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 15(-20 - 12) - 2(-20 + 2) - 3(-24 - 4) = -360$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 15 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 15 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-20 + 12) - 15(15 - 8) - 3(-3 + 16) = -180$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 15 \\ 3 & -4 & -4 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 15 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(4 + 24) - 2(-3 + 16) + 15(18 + 16) = 540$$

Вычислить неизвестные $x_1 = \frac{-360}{-180} = 2$, $x_2 = \frac{-180}{-180} = 1$, $x_3 = \frac{540}{-180} = -3$.

Проверим это решение, подставив значения неизвестных во все уравнения

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3(-3) = 4 + 2 + 9 = 15$$

системы. Получим $3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 2(-3) = 6 - 4 - 6 = -4$ Решение верное.

$$4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 5(-3) = 8 + 6 - 15 = -1$$

б) Решим ту же систему уравнений методом Гаусса. Для этого выпишем расширенную матрицу системы и приведем основную матрицу системы к треугольному виду или ступенчатому виду, если число уравнений окажется меньшим числа неизвестных. Приведение матрицы к треугольному виду, то есть такому, когда ниже (или выше) главной диагонали все элементы будут нулевыми, а на главной диагонали - ненулевые, всегда возможно. Оно основано на следующих элементарных преобразованиях матрицы, соответствующих эквивалентным преобразованиям система:

1. Перестановка строк матрицы;
2. Перестановка столбцов;
3. Умножение всех элементов строки на одно и то же число;
4. Сложение элементов любой строки с соответствующими элементами любой другой строки;
5. Вычеркивание получившихся нулевых строк.

Вот решение одной системы методом последовательных исключений неизвестных:

$$\begin{array}{ccc} \text{Расширенная матрица} & \text{1-й шаг} & \text{2-шаг} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 15 \\ 3 & -4 & 2 & -4 \\ 4 & 6 & 5 & -1 \end{array} \right) & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3/2 & 15/2 \\ 3 & -4 & 2 & -4 \\ 4 & 6 & 5 & -1 \end{array} \right) & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3/2 & 15/2 \\ 0 & -7 & 13/2 & -53/2 \\ 0 & 2 & 11 & -31 \end{array} \right) \\ & & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3/2 & 15/2 \\ 0 & 1 & -13/14 & 53/14 \\ 0 & 2 & 11 & -31 \end{array} \right) & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3/2 & 15/2 \\ 0 & 1 & -13/14 & 53/14 \\ 0 & 0 & 90/7 & -270/7 \end{array} \right) \end{array}$$

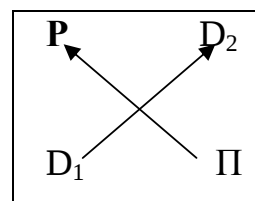
Возвратимся теперь от матричной записи к системе уравнений. Из последней строки матрицы следует уравнение $\frac{90}{7}x_3 = -\frac{270}{7}$, откуда $x_3 = -3$. Подставляя $x_3 = -3$ в последнее уравнение (вторая строка расширенной матрицы) получим $x_2 - \frac{13 \cdot (-3)}{14} = \frac{53}{14}$ или $x_2 = \frac{53 - 39}{14} = \frac{14}{14} = 1$. Наконец, из первого уравнения системы (первая строка матрицы) найдем $x_1 = \frac{15}{2} - 1 - \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Решение $\{2; 1; -3\}$ такое же, как в случае (а). Оно уже проверено.

Существует модифицированный метод Гаусса, так называемый метод полного исключения неизвестных, в результате которого основная матрица системы преобразуется в каноническую матрицу, на главной диагонали которой остаются единицы, а все остальные элементы обращаются в нули. Таким образом сразу получается решение.

В основе этого метода лежит следующий алгоритм (строго определенный порядок действий)

1. Выберем разрешающую строку и в ней разрешающий элемент. Обычно это первый элемент первой строки, считая слева направо. Строки можно целиком переставлять, так что на первое место можно записать любую строку, в которой первый элемент не равен нулю.
2. Каждый элемент, разрешающий строки разделим на разрешающий элемент.
3. Элементы разрешающего столбца заменим нулями во всех строках матрицы, кроме разрешающей, где он будет равен единице.
4. Элементы столбцов, которые были разрешающими на предыдущих шагах исключения, переписываем без изменения.
5. Остальные элементы пересчитаем по следующему правилу «прямоугольника»:

$$\frac{П \cdot Р - D_1 \cdot D_2}{Р} = И$$



Где П – пересчитываемый элемент, Р – Разрешающий, D_1 и D_2 – “диагональные”, И – искомый. Все эти элементы каждый раз должны быть вершинами воображаемого прямоугольника, образованного параллельными строками и столбцами. Искомый элемент записываем на месте пересчитываемого.

Вернемся к расширенной матрице данной системы и выполним эквивалентной преобразования по предложенной выше схеме полного

исключения неизвестных. Рекомендуем читателю все пересчеты коэффициентов по правилу «четырёхугольника» записывать подробно.

$$\begin{array}{l}
 \text{Данная расширенная матрица} \quad \quad \quad \text{1-й шаг} \quad \quad \quad \text{2-й шаг} \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 15 \\ 3 & -4 & 2 & -4 \\ 4 & 6 & 5 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3/2 & 15/2 \\ 0 & -7 & 13/2 & -53/2 \\ 0 & 2 & 11 & -31 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/7 & 26/7 \\ 0 & 1 & -13/14 & 53/14 \\ 0 & 0 & 90/7 & -270/7 \end{array} \right) \sim \\
 \quad \quad \quad \text{3-й шаг} \quad \quad \quad \text{4-й шаг} \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/7 & 26/7 \\ 0 & 1 & -13/14 & 53/14 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Если в последней матрице вернуться к записи уравнений, то получим $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$, а это и есть решение данной системы.

Замечания: 1. Кругами обведены разрешающие элементы.

2. При переходе от 2-го шага к 3-му третью строку почленно разделили на 90/7.

в) Решить данную систему методом обратной матрицы.

Решение. Данную систему можно записать в матричном виде $AX = B$,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Решение матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1} B = N$, где A^{-1} – матрица, обратная матрицы A . Так как определитель матрицы системы $D(A) = 180$ отличен от нуля то матрица A имеет обратную. Для вычисления обратной

$$\text{матрицы воспользуемся формулой } A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Где $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{33}$ – алгебраические дополнения элементов $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ матрицы A . Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -32; \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 34;$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -28; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 22; \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -14.$$

Составим обратную матрицу

$$A^{-1} = -\frac{1}{180} \begin{pmatrix} -32 & -28 & -8 \\ -7 & 22 & -13 \\ 34 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь матрицу X.

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{180} \begin{pmatrix} -32 & -28 & -8 \\ -7 & 22 & -13 \\ 34 & -4 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{180} \begin{pmatrix} -480 & 112 & 8 \\ -105 & -88 & 13 \\ 510 & 16 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{180} \begin{pmatrix} -360 \\ -180 \\ 540 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = N$$

Из равенства матриц $X = N$ или $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ следует решение системы

$$x_1=2, \quad x_2=1, \quad x_3=-3.$$

Задача 2. Методом исключения неизвестных найти общее и базисное

$$\text{решение системы линейных уравнений} \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

Решение.

Это система двух уравнений с тремя неизвестными. Она совместна и неопределенна. Надо описать совокупность всех ее решений. В качестве базисных неизвестных данной системы можно взять те неизвестные, для которых определитель составленный из коэффициентов при них известных, не равен нулю. Здесь три таких определителя, один из которых равен нулю

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0. \text{ Следовательно, неизвестные } x_1 \text{ и } x_2 \text{ нельзя брать в}$$

качестве базисных. Примем за базисные неизвестные x_1 и x_2 , для которых

определитель $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 = 23 \neq 0$. Будем считать неизвестную x_3

свободной и запишем систему в виде $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -7 - 6x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 = 12 - 4x_3 \end{cases}$

Или в матричной форме $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -4 & -7 & -6 \\ 2 & 5 & 12 & -4 \end{array} \right)$. Воспользуемся методом полного

исключения неизвестных: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4/3 & -7/3 & -6/3 \\ 0 & 23/3 & 50/3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 13/23 & -2 \\ 0 & 1 & 50/23 & 0 \end{array} \right)$

Общее решение: $\begin{cases} x_1 = \frac{13}{23} - 2x_3 \\ x_2 = \frac{50}{23} \end{cases}$

Полагая в общем решении $x_3 = 0$, получим базисное решение $x_1 = \frac{13}{23}$, $x_2 = \frac{50}{23}$

Проверка базисного решения показывает, что оно удовлетворяет обоим уравнениям системы, то есть, является частным решением системы. Давая x_3 любые другие числовые значения, получим бесчисленное множество частных решений.

Аналогично решаются системы с несколькими свободными неизвестными.

Задача 3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 8 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 6 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Найти

произведение матриц AB .

Решение.

Эти матрицы являются соответственными, так как число столбцов первой матрицы равно числу строк второй: их размеры 2×3 и 3×2 . В результате умножения матриц получим новую матрицу C размера 2×2 , а ее элементы будут равны скалярным произведениям векторов-строк первой матрицы на векторы-столбцов второй:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} -4 \cdot 10 + 3 \cdot 6 + 8 \cdot 1 & -4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \\ 2 \cdot 10 - 5 \cdot 6 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 - 5 \cdot 3 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 + 18 + 8 & 9 + 56 \\ 20 - 30 + 1 & -15 + 7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -14 & 65 \\ -9 & -8 \end{pmatrix} = C \end{aligned}$$

Задачи раздела II

Задача 1. Даны вершины треугольника $A(-3;-2)$, $B(1;8)$, $C(5;3)$.

- Найти: а) уравнения всех трех его сторон;
 б) систему неравенств, определяющих множество точек, принадлежащих треугольнику, включая его стороны;
 в) внутренний угол A треугольника в градусах и минусах;
 г) длину высоты, опущенной из вершины A ;
 д) площадь треугольника.

Решение.

а) Уравнения сторон найдем по формуле прямой, проходящей через две данные

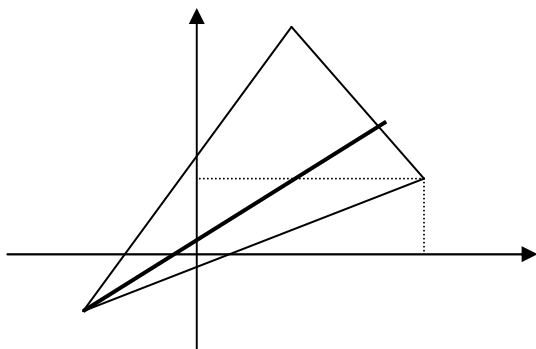
$$\text{точки } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\text{Уравнение стороны АВ: } \frac{x + 3}{1 + 3} = \frac{y + 2}{8 + 2}, \quad \text{или} \quad \begin{aligned} 10x + 30 &= 4y + 8, \\ 10x - 4y + 22 &= 0 \quad (\text{AB}). \\ 5x - 2y + 11 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Уравнение стороны АС: } \frac{x + 3}{5 + 3} = \frac{y + 2}{3 + 2}, \quad \text{или} \quad \begin{aligned} 5x + 15 &= 8y + 16 \\ 5x - 8y - 1 &= 0 \quad (\text{AC}) \end{aligned}$$

б) Каждая из прямых, уравнения которых только это найдены, разделяет плоскость на две полуплоскости, определяемые соответствующими неравенствами.

Чтобы определить знаки этих неравенств, возьмем координаты какой-нибудь точки заведомо расположенной внутри треугольника ABC (см. рисунок 1). Такой точкой является, например точка $N(0;1)$ подставляя координаты этой точки в уравнения граничных прямых (сторон) в силу того, что точка N не лежит ни на одной стороне, получим следующую



$$\text{систему неравенств. } \begin{cases} 5x - 2y + 11 > 0, \\ 5x - 8y - 1 < 0, \\ 5x + 4y - 37 < 0, \end{cases}$$

определяющих множество внутренних точек треугольника.

Рис. 1.

Система неравенств
$$\begin{cases} 5x - 2y + 11 \geq 0, \\ 5x - 8y - 1 \leq 0, \\ 5x + 4y - 37 \leq 0, \end{cases}$$
 определяет множество точек, принадлежащих треугольнику ABC, включая его стороны.

в) Внутренний угол треугольника найдем, зная угловые коэффициенты сторон

AB и AC, образующих этот угол, по формуле $\operatorname{tg} A = \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB} k_{AC}}$.

Угловые коэффициенты прямых выложим по формуле $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$$\text{Получим } k_{AB} = \frac{8+2}{1+3} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}; \quad k_{AC} = \frac{3+2}{5+3} = \frac{5}{8}.$$

$$\text{Тогда } \operatorname{tg} A = \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{8}}{1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{8}} = \frac{\frac{40-10}{8}}{\frac{16+25}{8}} = \frac{30}{41} \approx 0,7317$$

$\angle A = 36^\circ 12'$. Угол определяем с помощью таблицы тангенсов или калькулятора

г) Длину высоты $AD \perp BC$ (рис. 1) найдем как расстояние от данной точки

$A(-3; -2)$ до данной прямой BC: $5x + 4y - 37 = 0$ по формуле

$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где A, B, C – коэффициенты прямой, $x_0 y_0$ – координаты данной точки.

$$\text{Получим } d = |AD| = \frac{|5 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) - 37|}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = \frac{60}{\sqrt{41}} \approx 9,37 \text{ (мин. ед.)}$$

д) Площадь треугольника можно вычислить несколькими способами.

Вычислить ее через координаты вершин треугольника по формуле

$$S = \operatorname{mod} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Получим } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1+3 & 8+2 \\ 5+3 & 3+2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (20 - 80) = -30.$$

Итак, площадь треугольника $S_{ABC} = 30$ кв. ед.

Задача 2. Даны векторы $\bar{a} = (1; 1; 1)$, $\bar{b} = (2; 1; 4)$, $\bar{c} = (3; -1; 1)$ Найти:

- длину вектора $|2\bar{a} - \bar{b}|$;
- скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
- косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
- смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$;
- объем параллелепипеда V_1 и объем пирамиды V_2 , построенных на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Решение:

$$\text{a) } 2\bar{a} - \bar{b} = 2(1; 1; 1) - (2; 1; 4) = (2; 2; 2) - (2; 1; 4) = (0; 1; -2). |2\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

$$\text{b) } \bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 7.$$

$$\text{c) } \cos \alpha = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{7}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

$$\text{d) } \bar{a} \bar{b} \bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 12 - 2 - 3 + 4 - 2 = 10.$$

$$\text{e) } V_1 = \text{mod}(\bar{a} \bar{b} \bar{c}) = \text{mod} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 12 - 2 - 3 + 4 - 2 = 10 (\text{ёóá.ää})$$

$$V_2 = \frac{1}{6} \text{mod}(\bar{a} \bar{b} \bar{c}) = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (1 + 12 - 2 - 3 + 4 - 2) = \frac{5}{3} (\text{ёóá.ää}).$$

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

4.1. Раздел I.

Линейная алгебра.

- 1 – 20.** Дана система линейных уравнений. Требуется показать, что система совместна и найти ее решение тремя способами: а) по формулам Крамера, выполнить проверку решения; б) методом Гаусса; в) методом обратной матрицы.

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -2 \\ 7x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ 7x_1 - 5x_3 = 16 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 15 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 18 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 18 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 10x_3 = -16 \\ 2x_1 + 7x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 20x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 11 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 - 8x_3 = -7 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 12x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 - 5x_2 - 8x_3 = -41 \\ 2x_1 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 \\ -5x_2 + 8x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -2 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7 \\ 13x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 7x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 9 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} -4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

21 – 40 Методом исключения неизвестных найти общее и базисные решения систем уравнений:

$$21. \begin{cases} 5x_1 - 8x_2 - 4x_3 = -10 \\ 7x_1 - x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 25 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ 7x_1 - 8x_2 - 7x_3 = -25 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 12x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0 \\ 8x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 2x_1 + 15x_2 + 2x_3 = -6 \\ 6x_1 - 8x_2 - 20x_3 = -1 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 30 \\ x_1 + x_3 = 10 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 = -20 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -14 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 12x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} 11x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 12x_1 - x_2 + 9x_3 = 21 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 23 \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = -17 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} 6x_1 - 6x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = -14 \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} 4x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} 15x_1 - 6x_2 + 5x_3 = -22 \\ 11x_1 + 10x_2 - 5x_3 = -2 \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} 6x_1 - 11x_2 + 7x_3 = 11 \\ 11x_1 + 10x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 8x_1 + 5x_2 - 11x_3 = -1 \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} 7x_1 - x_2 + 8x_3 = 0 \\ 21x_1 + 3x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

41 – 60. Найти произведение матриц $AB = C$, если A, B даны:

$$41. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$42. A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$43. A \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 10 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$44. A \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -7 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$45. A \begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$46. A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 8 & 0 & 15 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$47. A \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$48. A \begin{pmatrix} 3 & 5 & 15 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$49. A \begin{pmatrix} 13 & -7 & 2 \\ 1 & 14 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -7 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$50. A \begin{pmatrix} 3 & 13 & 23 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 50 & 25 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$51. A \begin{pmatrix} 44 & 2 & 1 \\ 14 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$52. A \begin{pmatrix} 9 & -9 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$53. A \begin{pmatrix} 16 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 21 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$54. A \begin{pmatrix} 8 & -11 & 12 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -1 & 12 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$55. A \begin{pmatrix} 14 & 2 & 6 \\ 4 & 12 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$56. A \begin{pmatrix} 13 & 3 & 10 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$57. A \begin{pmatrix} -4 & 3 & 12 \\ 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$58. A \begin{pmatrix} 18 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$59. A \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 10 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$60. A \begin{pmatrix} 22 & 10 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5. 2. Раздел II.

Аналитическая геометрия

61 – 80. Даны вершины треугольника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти:

- а) уравнения всех трех его сторон;
- б) систему неравенств, определяющих множество точек, принадлежащих треугольнику, включая его стороны;
- в) внутренний угол A треугольника в градусах и минутах;
- г) длину высоты, проведенной из вершины A ;
- д) площадь треугольника.

61. $A(6;14)$, $B(1;2)$, $C(9;8)$.

62. $A(4;10)$, $B(-1;-2)$, $C(7;4)$.

63. $A(6;11)$, $B(1;-1)$, $C(9;5)$.

64. $A(4;13)$, $B(-1;1)$, $C(7;7)$.

65. $A(6;10)$, $B(1;-2)$, $C(9;4)$.

66. $A(4;14)$, $B(-1;2)$, $C(7;8)$.

67. $A(6;13)$, $B(1;1)$, $C(9;7)$.

68. $A(7;11)$, $B(2;-1)$, $C(10;5)$.

69. $A(3;13)$, $B(-2;1)$, $C(6;7)$.

70. $A(4;11)$, $B(-1;-1)$, $C(7;5)$.

71. $A(1;0), B(7;3), C(4;4)$.
72. $A(0;1), B(6;4), C(3;5)$.
73. $A(-1;-1), B(-7;2), C(-4;3)$.
74. $A(-1;-1), B(5;2), C(2;3)$.
75. $A(1;-1), B(-5;2), C(-2;3)$.
76. $A(1;-1), B(7;2), C(4;5)$.
77. $A(-1;1), B(-7;4), C(-4;5)$.
78. $A(-1;1), B(5;4), C(2;5)$.
79. $A(1;1), B(-5;4), C(-2;5)$.
80. $A(1;1), B(7;4), C(4;5)$.

80 – 100. Даны координаты векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Найти:

- а) длину вектора $|2\bar{a} - \bar{b}|$;
- б) скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
- в) косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
- г) смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$;
- е) объем параллелепипеда V_1 и объем пирамиды V_2 , построенных на векторах $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$.

81. $\bar{a} = (2; 3; 1), \bar{b} = (2; 3; 4), \bar{c} = (3; 1; -1)$.
82. $\bar{a} = (1; -1; -3), \bar{b} = (2; 3; 1), \bar{c} = (2; 3; 4)$.
83. $\bar{a} = (3; 1; -1), \bar{b} = (-2; -1; 0), \bar{c} = (5; 2; -1)$.
84. $\bar{a} = (4; 3; 1), \bar{b} = (6; 7; 4), \bar{c} = (2; 0; -1)$.
85. $\bar{a} = (-3; 3; 1), \bar{b} = (1; 0; -3), \bar{c} = (2; 1; 6)$.
86. $\bar{a} = (1; -2; 6), \bar{b} = (1; 0; 1), \bar{c} = (2; -6; 7)$.
87. $\bar{a} = (1; 3; 7), \bar{b} = (-1; 3; 5), \bar{c} = (-6; 0; 2)$.
88. $\bar{a} = (4; 0; 3), \bar{b} = (1; -2; 4), \bar{c} = (1; -1; 2)$.
89. $\bar{a} = (2; 3; 2), \bar{b} = (4; 6; 4), \bar{c} = (2; -1; 3)$.
90. $\bar{a} = (3; 10; 5), \bar{b} = (-2; -2; -3), \bar{c} = (2; 4; 3)$.
91. $\bar{a} = (1; 2; -1), \bar{b} = (2; -3; 4), \bar{c} = (2; 1; -1)$.
92. $\bar{a} = (-1; 1; 3), \bar{b} = (4; 3; 1), \bar{c} = (2; 3; 1)$.
93. $\bar{a} = (6; -1; 1), \bar{b} = (2; -1; 0), \bar{c} = (5; 2; -1)$.
94. $\bar{a} = (2; 3; 1), \bar{b} = (6; 3; 4), \bar{c} = (2; 0; -1)$.
95. $\bar{a} = (-1; 3; 1), \bar{b} = (1; 0; -3), \bar{c} = (2; 1; 4)$.
96. $\bar{a} = (1; 2; 5), \bar{b} = (1; 3; 1), \bar{c} = (2; -1; 5)$.
97. $\bar{a} = (1; -3; 2), \bar{b} = (-1; 3; -5), \bar{c} = (-1; 3; 2)$.
98. $\bar{a} = (-4; 2; 3), \bar{b} = (1; -2; 4), \bar{c} = (4; -1; 2)$.
99. $\bar{a} = (2; 1; 2), \bar{b} = (4; 2; 4), \bar{c} = (2; -1; 3)$.
100. $\bar{a} = (3; -3; 5), \bar{b} = (-2; 2; -3), \bar{c} = (2; -4; 3)$.

6. Таблица распределения задач по вариантам и контрольным работам.

Номер варианта	Номера задач				
	Контрольная работа				
1	1	21	41	61	81
2	2	22	42	62	82
3	3	23	43	63	83
4	4	24	44	64	84
5	5	25	45	65	85
6	6	26	46	66	86
7	7	27	47	67	87
8	8	28	48	68	88
9	9	29	49	69	89
10	10	30	50	70	90
11	11	31	51	71	91
12	12	32	52	72	92
13	13	33	53	73	93
14	14	34	54	74	94
15	15	35	55	75	95
16	16	36	56	76	96
17	17	37	57	77	97
18	18	38	58	78	98
19	19	39	59	79	99
20	20	40	60	80	100

7. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении контрольных работ надо придерживаться указанных ниже правил.

1. ВЫБОР ВАРИАНТА. Каждому студенту при поступлении присваивается учебный шифр. Он указан в зачетной книжке и студенческом билете. Студенты, учебные шифры которых равны числам от 1 до 20 выбирают соответствующие варианты заданной от 1 до 20. Если номер шифра больше 20, то вариант определяется по целому остатку от деления номера шифра на 20. Например, если шифр 60, то остаток от деления на 20 равен 0, следовательно, номер варианта 20. Если шифр 173, то остаток равен 13, следовательно, номер варианта 13, если шифр 1350, то остаток равен 10 и вариант 10-й и т.д. Номера задач, входящих в тот или иной вариант, указаны в специальной таблице (см. оглавление).

2. Контрольную работу надо выполнить в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний рецензента. В конце работы оставьте 3 – 4 чистых страницы которые, возможно, понадобятся для исправления решений.

3. В заголовке работы должны быть разборчиво написана фамилия, имя и отчество, учебный шифр, номер контрольной работы, название дисциплины. Заголовок надо поместить на обложке тетради. Здесь же указать адрес студента и дату выполнения контрольной работы.

4. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номер задач своего варианта.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие, заменив, где надо, общие данные контрольными из своего варианта.

6. Решения задач излагайте аккуратно, объясняя основные действия, выписывая нужные формулы, делая необходимые чертежи.

7. После получения прорецензированной работы исправьте все ошибки и недочеты, отмеченные рецензентом, вписав исправления на оставленных чистых страницах.