УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА» РАЗДЕЛ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ» ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ

I БЛОК – ИНФОРМАЦИОННЫЙ

Курс «Математика» является обязательным в цикле естественнонаучных дисциплин Федерального компонента государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Основные положения дисциплины «Математика» являются фундаментом математического образования дипломированного специалиста, имеющим важное значение для успешного изучения специальных дисциплин, которые предусмотрены учебной программой для каждой специальности.

График самостоятельной работы по изучению теоретического материала; выполнению практических и контрольных заданий по дисциплине приведен в Таблице 1.

Таблица 1.

График самостоятельной работы по дисциплине «Математика»

Содержание	Сроки сдачи	Критерии оценки
1.Изучение теоретического материала (учебно-методический комплекс)		
2.Выполнение практических заданий (самостоятельная работа)	за 1,5 месяца до сессии	Каждое задание оценивается от одного до пяти баллов
3.Решение контрольных работ (подробные рекомендации по выполнению и оформлению контрольных работ см. в УМК по математике)	за 1 месяц до сессии	Переаттестация (если предусмотрена учебным планом); Контрольная работа.
4. Подготовка к итоговой аттестации	во время сессии	

К сессии Вам необходимо изучить теоретический материал и выполнить все практические задания в соответствии с графиком изучения и отчетности по дисциплине; предоставить все материалы для проверки преподавателю в указанные сроки. Баллы, полученные за выполнение практических и контрольных работ, будут учитываться при итоговой аттестации. Выполненные задания необходимо выслать на электронный адрес кафедры: moais@usue.ru, в теме сообщения указать – группу, предмет, ФИО студента, например: ТПОП11 математика Иванов ИИ.

II БЛОК – МЕТОДИЧЕСКИЙ

Для получения итоговой аттестации по дисциплине студент в течение семестра должен выполнить практические задания. Выбор варианта производится по начальной букве фамилии студента:

Начальная буква фамилии студента	Вариант
А, Б	1
В, Г	2
Д, Е, Ж	3
З, И, К	4
Л, М	5
Н, О, П	6
Р, С	7
Т, У, Ф, Х	8
Ц, Ч, Ш, Щ	9
Э, Ю, Я	10

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Математический анализ

Задание 1. (5 баллов)

Вычислить производную сложной функции:

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$y=\sqrt{3x+ctg\left(x+\frac{1}{x}\right)}$; $y=\left(x^2-5x\right)^{2x-3}$	6	$y=\frac{1-\cos 2x}{1+\sin^2 x}$; $y=arctg\sqrt{6x-1}$
2	$y=\ln\left(\frac{\sqrt[3]{x-3}}{2x+1}\right)$; $y=\sqrt{2x-\sin 2x}$	7	$y=\sin^2 x-\arcsin x^2$; $y=\lg 5x$
3	$y=\left(x^3-\frac{1}{x}\right)\cdot\sqrt{x^2+1}$; $y=\left(\arcsin\sqrt{1-4x}\right)^{2x}$	8	$y=\ln\sqrt{\frac{e^x}{x+e^{2x}}}$; $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+\arcsin e^x$

4	$y=\frac{1}{\sqrt{x+\arccos^2 x}}$; $y=(\sin 2x)^{4x}$	9	$y=\sqrt{1+tg\left(x+\frac{1}{x}\right)}$; $y=(x+1)\arcsin e^{-2x}$
5	$y=\frac{\ln x-\arcsin 4x}{arctgx^2}$; $y=\ln x^3+\cos\ln x$	10	$y=\frac{\log_5 x+\arcsin x}{x^4}$; $y=e^{2arctgx}$

Пример решения

Задание 2. (3 балла)

Вычислить предел числовой последовательности:

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^3+(3+n)^3}{(3-n)^2-(3+n)^2}$	6	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$	7	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$	8	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$	9	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-4n)^2}{(n-3)^2-(n+3)^2}$
5	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$	10	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}$

Пример решения

Задание 3. (по 5 баллов за каждый предел)

Вычислить предел функций:

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$	6	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$
2	$\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$; $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{20+x}-5}{x-5}$	7	$\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^4+6x-5}}{2x^3-8x}$
3	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-11x+24}{x^2+2x-15}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$	8	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)(4-x^2)(x^2+7)}{5x^6-2x^4+7x^2}$
4	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{x^3+1}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$	9	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12x^3+x^2+6x-7}{x^5-2x^3-2x+1}$;

			$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+6}{x^2-36};\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x}$	10	$\lim\limits_{x\to 0,5}\frac{8x^3-1}{x^2-0,25}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+6)(x+7)(x-1)}{27-x^3}$

[Пример решения]

Задание 4. (по 5 баллов за каждый интеграл)

Вычислить неопределенный интегралы:

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\int\frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}};\int(5x-2)\ln xdx.$	6	$\int x\sqrt{3-x^2}dx,\ \int x\cdot\cos^2(2x)dx.$
2	$\int\frac{\operatorname{arctg}x\,dx}{1+x^2},\ \int\ln(3+x^2)dx.$	7	$\int\sin 2x\sqrt{2-\cos^2 x}dx,\ \int x\cdot\arcsin xdx.$
3	$\int\frac{\sin xdx}{1-\cos x},\ \int(2-x)\sin xdx.$	8	$\int\frac{\sqrt[3]{\ln x}dx}{x},\ \int(1-\ln x)dx.$
4	$\int\frac{1-\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}dx,\ \int(3x+4)\cos xdx.$	9	$\int\frac{x^2dx}{8+x^3},\ \int\operatorname{arcctg}(4x)dx.$
5	$\int\frac{\sin 2xdx}{\cos^2 x+3},\ \int x\ln^2 xdx.$	10	$\int\frac{x^2dx}{\cos^2(x^3)},\ \int x^2\sin 3xdx.$

[Пример решения]

Задание 4. (5 баллов)

Вычислить определенный интеграл:

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\int_0^4\frac{\sqrt{x}dx}{4+x}.$	6	$\int_3^6\frac{\sqrt{x-3}}{x}dx.$
2	$\int_0^3\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}dx.$	7	$\int_2^4\frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}dx.$
3	$\int_{25}^{49}\frac{\sqrt{x}dx}{x-6}.$	8	$\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}$
4	$\int_{-8}^0\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+2}dx.$	9	$\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}.$
5	$\int_1^2\frac{dx}{2+\sqrt[4]{x-1}}.$	10	$\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}+5}.$

[Пример решения]

Задание 5. (5 баллов)

Вычислить несобственный интеграл:

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+8}$	6	$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-6x+13}$
2	$\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$	7	$\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt{2-x}}$
3	$\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$	8	$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{3x^2+1}$
4	$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$	9	$\int_{-3}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+3}}$
5	$\int_5^{+\infty}\frac{dx}{x^2-8x+20}$	10	$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+13};$

Пример решения

Задание 6. (5 баллов)

Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям ($x_0=0$):

1. $y''+6y'+13y=8e^{-x};$ $y_0=2/3;\ y_0'=2,$
2. $y''-4y'+8y=8x^2+4;$ $y_0=2;\ y_0'=3,$
3. $y''+y'-6y=50\cos x;$ $y_0=3;\ y'=5,$
4. $y''+2y'+5y=13e^{2x};$ $y_0=1;\ y_0'=4,$
5. $y''-4y'+5y=10x;$ $y_0=10;\ y_0'=6,$
6. $y''-4y'+4y=3x-x^2;$ $y_0=3;\ y_0'=4/3,$
7. $y''-6y'+9y=4e^{x};$ $y_0=3;\ y_0'=8,$
8. $y''-4y'+4y=-169\sin 3x;$ $y_0=-12;\ y_0'=16,$
9. $y''+2y'-8y=16x+4;$ $y_0=2;\ y_0'=6,$
10. $y''-4y'+5y=5x^2-4;$ $y_0=2/25;\ y_0'=3/5,$

Пример решения

Задание 7. (4 балла)

Исследовать ряд на сходимость:

Вариант	Задание	Вариант	Задание

1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1{,}1^n}{n}$	6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-3n}{n^3}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\cdot 0{,}8^n$	7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$	8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{10n-1}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{2^n}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+7}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{n^2+1}$

Пример решения

Задание 8. (4 балла)

Определить область сходимости степенного ряда:

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{4^n}$	6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}.$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1{,}5)^n}{3^n}$	7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n}.$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n}$	8	$\sum_{n=1}^{\infty}3^n(x-2)^n$
4	$\frac{(x-2)^n}{3^n}.$	9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n}$
5	$\frac{(x+1{,}5)^n}{2^n}.$	10	$\sum_{n=1}^{\infty}5^n\frac{(x+3)^n}{4^n}.$

Пример решения

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Математический анализ

Задание 1.

Вычислить производную сложной функции $y=\frac{\ln(tgx)}{e^{1-2x}}$.

Решение:

Используем формулу производной частного двух функций, учтем, что и числитель и знаменатель являются сложными функциями:

$$y' = \left(\frac{\ln(tgx)}{e^{1-2x}}\right)' = \frac{(\ln(tgx))' \cdot e^{1-2x} - \ln(tgx)\cdot\left(e^{1-2x}\right)'}{\left(e^{1-2x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{tgx}\cdot(tgx)' e^{1-2x} - \ln(tgx)\cdot e^{1-2x}\cdot(1-2x)'}{\left(e^{1-2x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot e^{1-2x} + 2\cdot\ln(tgx)\cdot e^{1-2x}}{\left(e^{1-2x}\right)^2} = \frac{\cdot\frac{1}{\cos x\cdot\sin x} + 2\cdot\ln(tgx)}{e^{1-2x}}$$

Задание 2.

Вычислить предел числовой последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-2)^2+(3n+1)^3}{(n-5)^3}$

Решение:

Для решения определим максимальную степень числителя и знаменателя – в нашем случае она равна 3. Таким образом, значение предела будет равно отношению коэффициентов при максимальных степенях x: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-2)^2+(3n+1)^3}{(n-5)^3} = \frac{3^3}{1^3} = 27$.

Задание 3.

1) Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

Решение:

При $x\to-2$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, следовательно имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Поэтому непосредственно теорему о пределах применить нельзя. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на множитель $(x+2)$:

$x^3+3x^2+2x = x(x^2+3x+2) = x(x+2)(x+1)$;

$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$

Тогда

$$\lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)(x+1)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to-2}\frac{x\cdot(x+1)}{(x-3)}$$

Теперь числитель не обращается в ноль, а стремится к 2. Знаменатель стремится к -5. Поэтому

$$\lim_{x\to -2}\frac{x(x+1)}{(x-3)}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}x(x+1)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-3)}=-\frac{2}{5}.$$

2) Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$

Решение:

Чтобы избавиться от неопределенности вида $\frac{0}{0}$, умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю. Тогда в числителе можно применить формулу квадрата разности и после преобразований произвести сокращение на множитель $(x-2)$, который обращает в нуль числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{1-x})^2}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1+x}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}2}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{2}{2}=1$$

Задание 4.

Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int\sin^4 x\cos^3 xdx$

Решение:

Так как степень синуса равна 4 (четная), а косинуса равна трем - нечетная, то представим косинус в кубе как произведение косинуса и косинуса в четной степени: $\cos^3 x=\cos x\cdot\cos^2 x$. Введем новую переменную: $\sin x=t,\quad тогда\qquad \cos xdx=dt,$ подставим в исходный интеграл, получим:

$$\int\sin^4 x\cos^3 xdx=\int\sin^4 x\cos^2 x\cos xdx=\int\sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos xdx=$$

$$=\int t^4\left(1-t^2\right)dt=\int t^4dt-\int t^6dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+C=$$

$$=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$$

2) $\int x^2 \cdot \cos x dx$

Решение:

$$\int x^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & dv = \cos x dx \\ du = 2x dx & v = \sin x \end{matrix} \right| = x^2 \cdot \cos x - \int 2x \cdot \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| = x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x - 2\int \cos x dx =$$

$$= x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x - 2\sin x + C$$

Задание 4.

Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 x \cdot \left(2 - x^2\right)^5 dx$

Решение:

$$-\int\limits_0^1 x \cdot \left(2 - x^2\right)^5 dx = \left| \begin{matrix} 2 - x^2 = t \\ dt = -2x dx \\ x = 0, \quad t = 2 \\ x = 1, \quad t = 1 \end{matrix} \right| == -\frac{1}{2}\int\limits_2^1 t^5 dt = -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6}\Bigg|_2^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{21}{4}$$

Задание 5.

Вычислить несобственный интеграл:

1) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Решение: $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{t \to +\infty} \int\limits_1^{t} \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\Bigg|_1^t \right) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right) = 1$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$

Решение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\left(arctgx\right)\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\left(arctgx\right)\Big|_0^b=arctg\,0-$$

$$-arctg(-\infty)+arctg(+\infty)-arctg\,0=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}-0=\pi$$

Задание 6.

Найти общее решение уравнения $y''+4y'+13y=5\sin 2x$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_0=2/29$; $y_0'=1/29$.

Решение:

Рассмотрим однородное уравнение $y''+4y'+13y=0$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $k^2+4k+13=0$, откуда $k_1=-2-3i$, $k_2=-2+3i$. Следовательно, $Y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\cdot\sin 3x)$ общее решение однородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$. Имеем

$$y^{*\prime}=-2A\cdot\sin 2x+2B\cos 2x,\quad y^{*\prime\prime}=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Подставим эти выражения в неоднородное уравнение

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-8A\sin 2x+8B\cos 2x+13A\cos 2x+$$

$$+13B\sin 2x=5\sin 2x;$$

$$(9A+8B)\cos 2x+(-8A+9B)\sin 2x=5\sin 2x$$

и получим систему для вычисления коэффициентов А и В:

$$\begin{cases}9A+8B=0\\-8A+9B=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-8/29\\B=9/29\end{cases}$$

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y^*=-\frac{8}{29}\cos 2x+\frac{9}{29}\sin 2x,$$

а общее решение неоднородного уравнения – вид

$$y=e^{-2x}(C_1\cdot\cos 3x+C_2\sin 3x)-\frac{8}{29}\cos 2x+\frac{9}{29}\sin 2x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y_0=\frac{2}{29}\Rightarrow C_1-\frac{8}{29}=\frac{2}{29}\Rightarrow C_1=\frac{10}{29};$$

$$y'=-2e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+e^{-2x}(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x)+\frac{16}{29}\sin 2x+\frac{18}{29}\cos 2x;$$

$$y_0'=\frac{1}{29}\Rightarrow -2C_1+3C_2+\frac{18}{29}=\frac{1}{29}\Rightarrow C_2=\frac{1}{29}.$$

Искомое частное решение таково:

$$y=e^{-2x}\left(\frac{10}{29}\cos 3x+\frac{1}{29}\sin 3x\right)-\frac{8}{29}\cos 2x+\frac{9}{29}\sin 2x$$

Задание 7.

Исследовать ряд на сходимость

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$$

Решение:

Воспользуемся признаком Даламбера. $u_n=\dfrac{n}{2^n}$ $\quad u_{n+1}=\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{n}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{2}<1$ – ряд сходится.

Задание 8.

Определить область сходимости степенного ряда

$$\frac{(x+0{,}2)}{1}+\frac{(x+0{,}2)^2}{2}+\ldots+\frac{(x+0{,}2)^n}{n}+\ldots$$

Решение:

Здесь $a_n=\dfrac{1}{n}$, $\quad a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$

Найдем радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{1}{n}\right|=1.$$

Следовательно, ряд обязательно сходится, если $-1<x+0{,}2<1$, т.е. $-1{,}2<x<0{,}8$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка $[-1{,}2;0{,}8]$.

Если $x = 0{,}8$, то получаем ряд $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Это гармонический ряд. Он расходится. Если $x = -1{,}2$, то получаем ряд: $-1 + \frac{1}{2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n}$, получился знакочередующийся ряд.

Применим признак Лейбница:

1. $|-1| > \left|\frac{1}{2}\right| > \left|-\frac{1}{3}\right| \ldots$, т. е. модуль общего члена ряда убывает.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, т. е. модуль общего члена ряда стремится к нулю.

Ряд сходится условно.

Область сходимости есть промежуток $[-1{,}2;0{,}8)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Н.Ш. Кремера и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.:ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2003. – Ч. I.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1999. – Ч. II.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2006. – Ч. 1 и 2.
5. Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики / под ред. А.И. Карасёва и Н.Ш. Кремера. – М.: Экономическое образование, 1989.
6. Шипачев В.С. Основы высшей математики / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 1998.
7. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2006.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1976.
9. Практикум по высшей математике для экономистов. / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.

10. Сборник задач по математике / под редакцией А.В.Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1990.
11. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике / А.С. Солодовников [и др.]. – М.: Финансы и статистика, 1998. – Ч. 1.
12. Трикоми Н.М. Дифференциальные уравнения / Н.М. Трикоми. – Н: ИЛ, 1962.
13. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970.
14. Шелобаев С.И. Математические методы и модели / С.И. Шелобаев. – М.: ЮНИТИ, 2000.
15. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики / В.Е. Шнейдер [и др.]. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч. 1 и 2.