Министерство образования
Российской Федерации

Воронежский государственный университет

Математический факультет

Кафедра теории функций и геометрии

Методические указания и контрольные задания по высшей математике

Для студентов 1 курса заочного отделения факультета географии и геоэкологии

Составитель
Уксусов С.Н.

Воронеж
2002

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены для студентов первого курса заочного отделения факультета географии и геоэкологии. Методические указания состоят из двух частей. В первой части приведены программа курса высшей математики, рассчитанная на два семестра и решения типичных задач. Кроме того, в первой части имеются таблицы производных и интегралов, а также основные правила дифференцирования и интегрирования. Во второй части приведены десять вариантов контрольной работы.

В первом семестре студенты сдают зачет по высшей математике. Для успешной сдачи зачета необходимо изучить соответствующие вопросы программы курса высшей математики и научиться решать простейшие задачи по данным темам. В качестве наиболее типичных задач, предлагаемых на зачете, могут выступать примеры №№ 1 – 11 методических указаний.

Во втором семестре студенты-заочники защищают контрольную работу и сдают экзамен. Номер варианта контрольной работы студента определяется по последней цифре номера его зачетной книжки. Из каждого задания студент решает задачу, номер которой совпадает с номером его варианта (всего 10 заданий). Решенную контрольную работу студенты обязаны прислать (передать) на проверку методисту заочного отделения не позднее 30 апреля текущего года.

Защита контрольных работ и сдача экзамена проходят во время летней экзаменационной сессии. Экзаменационные вопросы приводятся во второй части программы курса высшей математики. Экзаменационный билет состоит из двух вопросов программы и задачи. В качестве наиболее типичных задач, предлагаемых на экзамене, могут выступать примеры №№ 12– 17 методических указаний.

ЧАСТЬ I

ПРОГРАМА КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ:

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

1. Определители 2-го, 3-го и n-го порядка. Способы их вычислений.
2. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
3. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
4. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
5. Декартова и полярная системы координат на плоскости. Декартова система координат в пространстве.
6. Векторы на плоскости и в пространстве. Координаты векторов.
7. Простейшие операции над векторами: умножение вектора на число, сложение и вычитание векторов.
8. Скалярное произведение векторов и его приложения. Проекция вектора на вектор.
9. Векторное произведение векторов и его приложения.
10. Смешанное произведение векторов и его приложения.

11. Уравнение линии на плоскости. Алгебраические линии.
12. Прямая линия на плоскости. Различные виды уравнения прямой линии.
13. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой.
14. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола.
15. Предел числовой последовательности и функции.
16. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$, $(0\cdot\infty)$ и $(\infty-\infty)$.
17. Первый и второй замечательные пределы и следствия из них.
18. Производная функции. Таблица производных и правила дифференцирования.
19. Производная обратной, неявной функции и функции, заданной параметрически.
20. Логарифмическое дифференцирование.
21. Дифференциал функции и его применение к приближенным вычислениям.
22. Правило Лопиталя вычисления пределов. Раскрытие неопределенностей вида $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$ и $\left(1^\infty\right)$.
23. Формулы Тейлора и Маклорена.

ВТОРОЙ СЕМЕСТР

1. Понятие монотонности функции. Достаточные условия возрастания и убывания функции.
2. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума.
3. Достаточные условия экстремума.
4. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба.
5. Достаточные условия выпуклости, вогнутости. Необходимое и достаточное условия перегиба.
6. Асимптоты плоской кривой. Нахождение вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот.
7. Полное исследование функции и построение ее графика.
8. Первообразная функции. Теорема об общем виде всех первообразных. Понятие неопределенного интеграла.
9. Свойства неопределенного интеграла. “Неберущиеся” интегралы.
10. Таблица интегралов.
11. Простейшие приемы интегрирования. Подведение множителя под знак дифференциала.
12. Замена переменной в неопределенном интеграле.
13. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
14. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе.
15. Интегрирование тригонометрических функций.
16. Задача о площади криволинейной трапеции.
17. Определение определенного интеграла.
18. Основные свойства определенного интеграла.
19. Формула Ньютона-Лейбница.
20. Замена переменной в определенном интеграле.

21. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
22. Вычисление площадей с помощью определенного интеграла.
23. Вычисление длины дуги плоской кривой.
24. Вычисление объема тела с известным поперечным сечением.
25. Объем тела вращения.
26. Несобственные интегралы первого рода.
27. Несобственные интегралы второго рода.
28. Определение функции нескольких переменных, ее геометрический смысл.
29. Область определения функции нескольких переменных.
30. Линии уровня функции двух переменных, их геометрический смысл.
31. Частные производные первого порядка.
32. Производная по направлению и градиент функции нескольких переменных, их геометрический смысл.
33. Дифференциал функции нескольких переменных и его применение к приближенным вычислениям.
34. Частные производные высших порядков.
35. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума.
36. Достаточное условие экстремума функции двух переменных.
37. Дифференциальные уравнения. Определение порядка дифференциального уравнения, решения, общего решения и частного решения.
38. Задача Коши.
39. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными.
40. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
41. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
42. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решение типичных задач, предлагающихся в первом семестре

Пример 1. Решить систему линейных уравнений: 1) методом Крамера; 2) методом Гаусса; 3) с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} 5x - y + 2z = -2, \\ 2x + 3y - 4z = 19, \\ x + 2y + 3z = 1. \end{cases}$$

Решение.

1) Метод Крамера. Вычислим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot 3 + (-1)\cdot(-4)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 2 - 2\cdot(-1)\cdot 3 - 2\cdot(-4)\cdot 5 =$$

$$= 45 + 4 + 8 - 6 + 6 + 40 = 97.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta},$$

где Δx, Δy, Δz получаются из определителя Δ путем замены 1-го, 2-го или 3-го столбца, соответственно, на столбец свободных членов.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 19 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 97, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & 19 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 291, \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 19 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -194.$$

Таким образом, $x = \frac{97}{97} = 1$, $\quad y = \frac{293}{97} = 3$, $\quad z = \frac{-194}{97} = -2$.

2) <u>Метод Гаусса</u>. Запишем систему в матричной форме, переставив местами 1-е и 3-е уравнения: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 19 \\ 5 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$.

Вычтем из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 2. Из третьего уравнения вычтем первое уравнение, умноженное на 5.

Получим: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & -13 & -7 \end{array}\right)$. Вычтем из третьего уравнения второе, умноженное на 11: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 97 & -194 \end{array}\right)$.

Мы получили систему: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ \quad y + 10z = -17, \\ \qquad 97z = -194. \end{cases}$

Из последнего уравнения находим z = -194 / 97= -2.
Подставим z во второе уравнение и найдем y = -17 + 20 = 3.
Подставив y и z в первое уравнение, найдем x = 1 – 6 + 6 = 1.
3) Решим систему с помощью обратной матрицы.

Для этого запишем ее в матричном виде: $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$,

где $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ - главная матрица системы, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных и $\bar{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов.

Так как главный определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 97 \neq 0$, то основная матрица системы A имеет обратную матрицу A^{-1}. Для нахождения обратной матрицы A^{-1}, вычислим алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A, причем алгебраические дополнения к строкам матрицы A запишем в соответствующие столбцы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 13, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 24,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 17.$$

Из полученных чисел составим матрицу и разделим ее на определитель Δ. Таким образом, мы нашли обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{97} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 7 & -2 \\ -10 & 13 & 24 \\ 1 & -11 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{97} & \frac{7}{97} & -\frac{2}{97} \\ -\frac{10}{97} & \frac{13}{97} & \frac{24}{97} \\ \frac{1}{97} & -\frac{11}{97} & \frac{17}{97} \end{pmatrix}.$$

Решение системы находим по формуле: $\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{97} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 7 & -2 \\ -10 & 13 & 24 \\ 1 & -11 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{97} \cdot \begin{pmatrix} -34+133-2 \\ 20+247+24 \\ -2-209+17 \end{pmatrix} = \frac{1}{97} \cdot \begin{pmatrix} 97 \\ 291 \\ 194 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Ответ</u>: $\begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \\ z = -2. \end{cases}$

<u>Пример 2</u>. Дана пирамида $ABCD$: A(2; 4;-1), B(3; 2; 0), C(1;-3; 2), D(5;-1; 3). Найти: 1) угол BCD; 2) площадь грани ABC; 3) объем пирамиды.

<u>Решение</u>.

1) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$, образующих угол BCD:

$\bar{a} = \overrightarrow{CB} = (3-1;\ 2-(-3);\ 0-2) = (2;\ 5-2),$

$\bar{b} = \overrightarrow{CD} = (5-1;\ -1-(-3);\ 3-2) = (4;\ 2;\ 1).$

Угол BCD найдем по формуле: $\cos j = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$, где $\bar{a} \cdot \bar{b}$ -скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Таким образом,

$$\cos\angle BCD=\frac{2\cdot 4+5\cdot 2+(-2)\cdot 1}{\sqrt{2^2+5^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{4^2+2^2+1^2}}=\frac{8+10-2}{\sqrt{4+25+4}\cdot\sqrt{16+4+1}}\approx 0{,}65.$$

Следовательно, $\angle BCD=\arccos 0{,}65.$

Площадь грани ABC находим по формуле $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|,$

где $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ - векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB}=(3-2;\ 2-4;\ 0-(-1))=(1;-2;\ 1).$

$\overrightarrow{BC}=(1-3;-3-2;\ 2-0)=(-2;-5;\ 2).$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & -5 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -5 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & -5\end{vmatrix}=\bar{i}-4\bar{j}-9\bar{k}.$$

Следовательно, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+(-9)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+16+81}\approx 4{,}95\left(\text{ед}^2\right).$

Объем пирамиды находим по формуле: $V=\frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|,$ где

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ -смешанное произведение векторов

$\overrightarrow{AB}=(1;-2;\ 1),\quad \overrightarrow{AC}=(-1;-7;\ 3),$ и $\overrightarrow{AD}=(3;-5;\ 4).$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & -7 & 3\\ 3 & -5 & 4\end{vmatrix}=-28-18+5+21-8+15=-13.\Rightarrow$$

$V=\left|-13\right|=13\left(\text{ед}^3\right).$

<u>Ответ</u>: $\begin{cases}\angle BCD=\arccos 0{,}65,\\ S_{\Delta ABC}=4{,}95\left(ед^2\right),\\ V_{пир.}=13\left(ед^3\right).\end{cases}$

<u>Пример 3.</u> Дан треугольник $A(2;\ 7)$, $B(-5;\ 7)$, $C(5;\ 3)$. Найти: 1) уравнения сторон; 2) уравнение и длину медианы AM; 3) уравнение и длину высоты BD; 4) уравнение биссектрисы AK; 5) точку пересечения медианы AM с высотой BD и угол между ними.

<u>Решение</u>.

1) Уравнения сторон AC и BC находим используя уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$

Уравнение AC: $\dfrac{x-2}{5-2}=\dfrac{y-7}{3-7}$; $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-7}{-4}$; $-4x+8=3y-21.$

Итак, AC: $4x+3y-29=0.$

Уравнение BC: $\dfrac{x+5}{5+5}=\dfrac{y-7}{3-7}$; $\dfrac{x+5}{10}=\dfrac{y-7}{-4}$; $-2x-10=5y-35.$

Итак, BC: $2x+5y-25=0.$

Уравнение AB находится еще проще. Нужно только заметить, что вторая координата точек A и B одинакова и равна 7.

Следовательно, уравнение AB: $y=7$ или $y-7=0.$

2) Найдем точку M – середину стороны BC:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-5+5}{2}=0,\qquad y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{7+3}{2}=5.$$

Составим уравнение медианы AM: $\dfrac{x-2}{0-2}=\dfrac{y-7}{5-7}$; $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-7}{-2}.$

Итак, AM: $x-y+5=0.$

Длину медианы найдем как расстояние между двумя точками:

$$|AM|=\sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\text{(ед.)}.$$

3) Определим угловой коэффициент стороны AC. Для этого уравнение AC запишем в виде $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{29}{3}$. Следовательно, $k_{AC}=-\dfrac{4}{3}$. k_{BD} найдем из условия перпендикулярности прямых линий: $k_{BD}=-\dfrac{1}{k_{AC}}=\dfrac{3}{4}.$

Составим уравнение высоты BD, используя уравнение прямой, проходящей через заданную точку B и с угловым коэффициентом k:

$y-y_0=k\cdot(x-x_0)$.

То есть, $y-7=\dfrac{3}{4}\cdot(x+5)$, или $4y-28=3x+15.$ BD: $3x-4y+43=0.$

Длину высоты BD найдем как расстояние точки B до прямой AC по формуле:

$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, где $ax+by+c=0$ - общее уравнение прямой AC, а $(x_0;y_0)$ - координаты B.

Итак, $$|BD|=\frac{|4\cdot(-5)+3\cdot7-29|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-20+21-29|}{\sqrt{25}}=\frac{28}{5}\text{(ед.)}.$$

4) Найдем основание биссектрисы (точку K), используя то, что точка K делит отрезок BC на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника:

$$\frac{BK}{KC}=\frac{AB}{AC}, \text{ где } AB=\sqrt{(-5-2)^2+(7-7)^2}=7, \quad AC=\sqrt{(5-2)^2+(3-7)^2}=5.$$

Следовательно, $\dfrac{BK}{KC}=l=\dfrac{7}{5}.$

Для нахождения координат точки K используем формулы деления отрезка в данном отношении:

$$x_K=\frac{x_B+l\cdot x_C}{1+l}=\frac{-5+\frac{7}{5}\cdot 5}{1+\frac{7}{5}}=\frac{-25+35}{5+7}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}.$$

$$y_K=\frac{y_B+l\cdot y_C}{1+l}=\frac{7+\frac{7}{5}\cdot 3}{1+\frac{7}{5}}=\frac{35+21}{5+7}=\frac{56}{12}=\frac{28}{6}.$$

Составим уравнение AK, используя координаты точек A и K:

$$\frac{x-2}{\frac{5}{6}-2}=\frac{y-7}{\frac{28}{6}-7}; \quad \frac{x-2}{5-12}=\frac{y-7}{28-42}; \quad \frac{x-2}{-7}=\frac{y-7}{-14}.$$

$2\cdot(x-2)=y-7;\quad 2x-4=y-7.$ Итак, $\underline{AK:\ \ 2x-y+3=0}.$

5) Найдем точку O пересечения медианы AM с высотой BD, решив систему:

$$\begin{cases} x-y+5=0, \\ 3x-4y+43=0, \end{cases} \quad \begin{cases} -3x+3y-15=0, \\ 3x-4y+43=0, \end{cases} -y+28=0,\ \underline{y_0=28},\ x-28+5=0,\ \underline{x_0=23}.$$

Итак, точка O имеет координаты: $O(23;28)$.

Для нахождения угла между прямыми линиями BD и AM воспользуемся формулой:

$tgj=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$, где $k_1=k_{BD}=\dfrac{3}{4}$,

$k_2=k_{AM}=1$(т. к. AM имеет уравнение $y=x+5$).

Итак, $tgj=\dfrac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}\cdot 1}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}=\dfrac{1}{7},\qquad \underline{j=arctg\dfrac{1}{7}}.$

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x-8}{2x^2+\sqrt{x^4+3x}}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x (т.е. на x^2). Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-8}{2x^2+\sqrt{x^4+3x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{8}{x^2}}{2+\sqrt{\dfrac{x^4+3x}{x^4}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{8}{x^2}}{2+\sqrt{1+\dfrac{3}{x^3}}}=\frac{4}{3},$$

так как при $x\to\infty$, выражения $\dfrac{3}{x}$, $\dfrac{8}{x^2}$ и $\dfrac{3}{x^3}$ стремятся к нулю.

Ответ: 4/3.

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x^2+6x}-4}$.

Решение. При подстановке вместо x числа 2 мы получаем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределенности сначала избавимся от иррациональности в знаменателе дроби, а затем разложим выражения, стремящиеся к нулю, на множители:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\sqrt{x^2+6x}-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3-8\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+6x}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+6x}-4\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+6x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3-8\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+6x}+4\right)}{x^2+6x-16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot\left(x^2+2x+4\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+6x}+4\right)}{(x-2)\cdot(x+8)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2+2x+4\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+6x}+4\right)}{(x+8)}=\frac{12\cdot 8}{10}=\frac{48}{5}=9{,}6.$$

Ответ: 9,6.

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{\left(\dfrac{p}{2}-x\right)^2}$.

Решение. Мы имеем дело с неопределенностью вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Произведем замену $x-\frac{p}{2}=t$, тогда $x=t+\frac{p}{2}$ и $t\to 0$.

$$\lim_{x\to\frac{p}{2}}\frac{\cos^2 x}{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2\left(t+\frac{p}{2}\right)}{(-t)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=1,$$

так как $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ (первый замечательный предел).

Ответ: 1.

Производная функции

Производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Таблица производных:

1. $\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}$.

1′. $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. $\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$.

2′. $\left(e^x\right)'=e^x$.

3. $\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$.

3′. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

4. $(\sin x)'=\cos x$.

5. $(\cos x)'=-\sin x$.

6. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

7. $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

8. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$.

11. $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

Основные правила дифференцирования:

1. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.
2. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.
3. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.
4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$.
5. $(f(j(x)))' = f'(u) \cdot j'(x)$, где $u = j(x)$.

<u>Пример 7.</u> Найти производную функции $y = \dfrac{\cos x^2}{arctg 4x + e^x}$.

<u>Решение</u>.

$$y' = \frac{\left(\cos x^2\right)' \cdot \left(arctg 4x + e^x\right) - \left(arctg 4x + e^x\right)' \cdot \cos x^2}{\left(arctg 4x + e^x\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(-\sin x^2\right) \cdot \left(x^2\right)' \cdot \left(arctg 4x + e^x\right) - \left(\left(arctg 4x\right)' + \left(e^x\right)'\right) \cdot \cos x^2}{\left(arctg 4x + e^x\right)^2}.$$

<u>Ответ</u>: $y'(x) = \dfrac{-\sin x^2 \cdot 2x \cdot \left(arctg 4x + e^x\right) - \left(\dfrac{1}{1 + (4x)^2} \cdot 4 + e^x\right) \cdot \cos x^2}{\left(arctg 4x + e^x\right)^2}$.

<u>Пример 8.</u> Найти производную $y'(x)$ неявной функции:

$$xy^2 + \sin(x + y) - 3^x = 0.$$

<u>Решение</u>. Продифференцируем данное равенство по x:

$$1 \cdot y^2 + x \cdot 2y \cdot y' + \cos(x + y) \cdot (1 + y') - 3^x \cdot \ln 3 = 0.$$

Раскроем скобки:

$$y^2 + 2xy \cdot y' + \cos(x + y) + y' \cdot \cos(x + y) - 3^x \cdot \ln 3 = 0.$$

$$y'\cdot(2xy+\cos(x+y))=3^x\cdot\ln 3-y^2-\cos(x+y).$$

<u>Ответ</u>: $y'=\dfrac{3^x\cdot\ln 3-y^2-\cos(x+y)}{(2xy+\cos(x+y))}.$

<u>Пример 9</u>. Найти производную функции $y=(\arcsin x)^{(ctg 2x)}$.

<u>Решение</u>. Логарифмируя данное равенство, получим неявную функцию:

$$\ln y = ctg 2x\cdot\ln(\arcsin x).$$

Дифференцируем данное равенство по x и находим $y'(x)$:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=-\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2\cdot\ln\arcsin x+\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot ctg 2x.$$

$$\Rightarrow y'=y\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2\cdot\ln\arcsin x+\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot ctg 2x\right).$$

<u>Ответ</u>: $y'=(\arcsin x)^{ctg 2x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2\cdot\ln\arcsin x+\dfrac{1}{\arcsin x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot ctg 2x\right).$

<u>Пример 10</u>. Найти производную $y'(x)$ функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} y=8\cdot\sin^3 t,\\ x=4\cdot\cos^3 t.\end{cases}$$

<u>Решение.</u> $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\left(8\cdot\sin^3 t\right)'_t}{\left(4\cdot\cos^3 t\right)'_t}=\dfrac{8\cdot 3\cdot\sin^2 t\cdot\cos t}{4\cdot 3\cdot\cos^2 t\cdot(-\sin t)}=-\dfrac{2\cdot\sin t}{\cos t}=-2\cdot tgt.$

<u>Ответ</u>: $\begin{cases} y'(x)=-2\cdot tgt,\\ x=4\cdot\cos^3 t.\end{cases}$

<u>Пример 11</u>. Вычислить $\sqrt[4]{16{,}6}$ приближенно, с помощью дифференциала.

<u>Решение.</u> Рассмотрим функцию $y=\sqrt[4]{x}$.

Пусть $x_0=16$, $x_1=16{,}6$. Тогда $\Delta x=x_1-x_0=16{,}6-16=0{,}6$.

$y_0=y(x_0)=\sqrt[4]{16}=2.$ $\quad y'(x_0)=\dfrac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{4}}\Big|_{x=16}=\dfrac{1}{4\cdot\left(\sqrt[4]{16}\right)^3}=\dfrac{1}{4\cdot 8}=\dfrac{1}{32}.$

Для нахождения $y_1 = \sqrt[4]{x_1} = \sqrt[4]{16{,}6}$ воспользуемся формулой: $y_1 \approx y_0 + dy(x_0)$, где $dy(x_0) = y'(x_0) \cdot \Delta x$ - дифференциал функции.

Таким образом, $\sqrt[4]{16{,}6} \approx 2 + \dfrac{1}{32} \cdot 0{,}6 \approx 2 + 0{,}019 = 2{,}019.$

Ответ: 2,019.

Неопределенный интеграл

Таблица интегралов;

1. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1),$ 2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

3. $\int a^x \cdot dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$ 4. $\int e^x \cdot dx = e^x + C,$

5. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C,$ 6. $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C,$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,$ 8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C,$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,$ 10. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \cdot arctg \dfrac{x}{a} + C,$

11. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \cdot \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C,$ 12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx,$
2. $\int (f(x) \pm j\,(x)) \cdot dx = \int f(x)dx \pm \int j\,(x)dx.$

Формула интегрирования по частям:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Пример 12. Найти неопределенный интеграл $\int \dfrac{x^3}{\cos^2 x^4} \cdot dx.$

Решение. Умножим и разделим подынтегральную функцию на 4 и внесем множитель $4x^3$ под знак дифференциала:

$$\int \frac{x^3}{\cos^2 x^4} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{4x^3}{\cos^2 x^4} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx^4}{\cos^2 x^4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4} \cdot tgt + C = \frac{1}{4} \cdot tgx^4 + C.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\cdot tgx^4 + C.$

Пример 13. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}+4}\cdot dx.$

Решение. Произведем замену переменной $\sqrt{x}+4=t$. Тогда

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}+4}\cdot dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}+4=t \\ x=(t-4)^2 \\ dx=2\cdot(t-4)\cdot dt \end{array} \right| = \int \frac{(t-4)^2+1}{t}\cdot 2\cdot(t-4)\cdot dt =$$

$$= 2\cdot\int \frac{(t^2-4t+17)\cdot(t-4)\cdot dt}{t} = 2\cdot\int \frac{t^3-4t^2+17t-4t^2+16t-20}{t}\cdot dt =$$

$$= 2\cdot\int \frac{t^3-8t^2+33t-20}{t}\cdot dt = 2\int\left(t^2-8t+33-\frac{20}{t}\right)\cdot dt = 2\cdot\int t^2\cdot dt -$$

$$-16\cdot\int t\cdot dt + 66\cdot\int dt - 40\cdot\int\frac{dt}{t} = \frac{2t^3}{3}-\frac{16t^2}{2}+66t-40\cdot\ln|t|+C=$$

$$= \frac{2\cdot(\sqrt{x}+4)^3}{3}-\frac{16\cdot(\sqrt{x}+4)^2}{2}+66\cdot(\sqrt{x}+4)-40\ln(\sqrt{x}+4)+C=$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}+3x\cdot 4+3\sqrt{x}\cdot 16+64\right)+8\cdot(x+8\sqrt{x}+16)+66\sqrt{x}+264-$$

$$-40\ln(\sqrt{x}+4)+C=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+16x+138\sqrt{x}-40\ln(\sqrt{x}+4)+C_1,$$

где $C_1 = C+64\cdot\frac{2}{3}+16\cdot 8+264.$

Ответ: $\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+16x+138\sqrt{x}-40\ln(\sqrt{x}+4)+C$.

Пример 14. Найти неопределенный интеграл $\int x\cdot e^{3x}dx$.

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Для этого обозначим x через u, а $e^{2x}dx$ через dv:

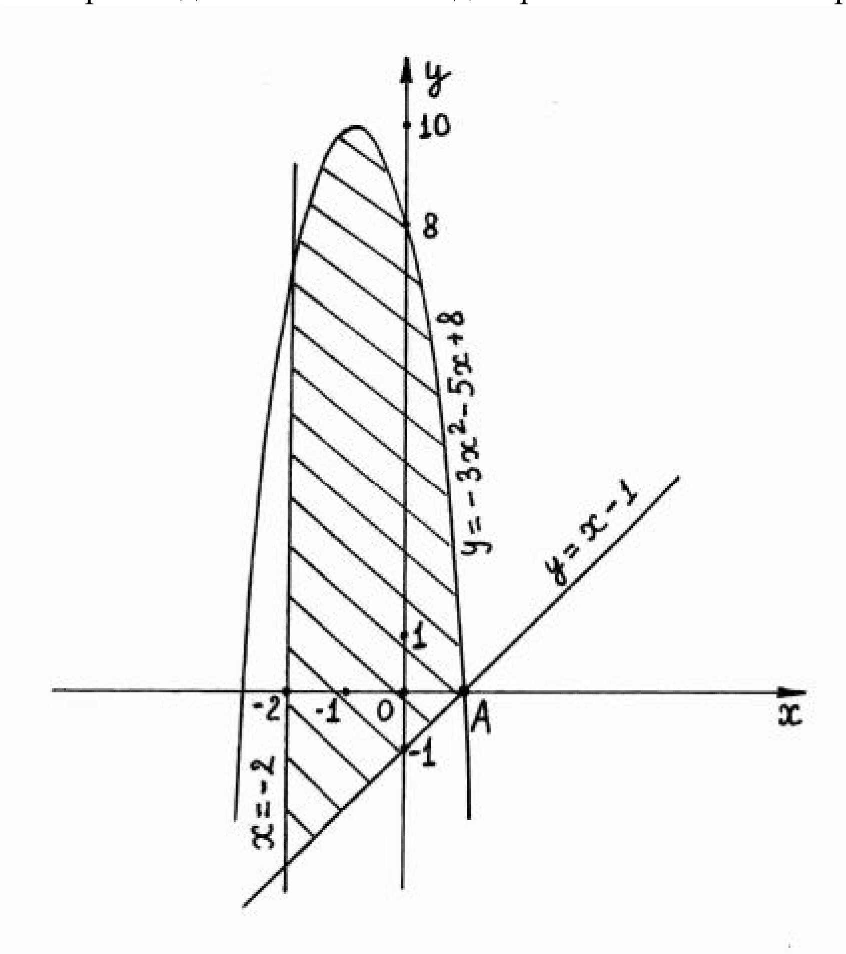
$$\int x\cdot e^{3x}dx = \left| \begin{array}{ll} u=x & dv=e^{3x}dx \\ du=dx & v=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}\cdot\int e^{3x}d(3x)=\frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right| = \frac{x\cdot e^{3x}}{3}-\frac{1}{3}\cdot\int e^{3x}dx=$$

$$=\frac{x\cdot e^{3x}}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{3x}}{3}+C.$$

Ответ: $\frac{x\cdot e^{3x}}{3}-\frac{e^{3x}}{9}+C.$

Пример 15. Вычислить площадь земельного участка, ограниченного линиями: $y=-3x^2-5x+8, \quad y=x-1, \quad x=-2.$

Решение. Построим данные линии в декартовой системе координат:



Земельный участок изображен заштрихованным. Найдем точку A пересечения параболы с прямой $y = x - 1$. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y=-3x^2-5x+8, \\ y=x-1. \end{cases}$$

$$x-1=-3x^2-5x+8. \quad \Rightarrow 3x^2+6x-9=0. \quad \Rightarrow x^2+2x-3=0. \quad \Rightarrow x_1=-3, \quad x_2=1.$$

Таким образом, $x_B=-3, \quad x_A=1.$

Искомую площадь найдем по формуле: $S=\int\limits_a^b (f_2(x)-f_1(x))\cdot dx.$

$$S=\int\limits_{-2}^{1}\left(-3x^2-5x+8-(x-1)\right)\cdot dx=\int\limits_{-2}^{1}\left(-3x^2-6x+9\right)\cdot dx=$$

$$=\left(-\frac{3x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+9x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\left(-x^3-3x^2+9x\right)\Big|_{-2}^{1}=-1-3+9-(8-12-18)=27\left(ед^2\right).$$

Ответ: 27(ед^2).

Пример 16. Найти градиент функции $z = 3\ln\frac{\sqrt{x}}{y} + y \cdot \sin\frac{px}{4} + \sqrt[3]{4y}$ в точке $M(4;\,2)$ и производную по направлению вектора $\bar{l} = (8; -6)$.

Решение. Найдем частные производные

$$z_x{}' = \frac{3y}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + y \cdot \cos\frac{px}{4} \cdot \frac{p}{4} + 0 = \frac{3}{2x} + \frac{py}{4} \cdot \cos\frac{px}{4},$$

и

$$z_y{}' = \frac{3y}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) + \sin\frac{px}{4} + \sqrt[3]{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot y^{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{y} + \sin\frac{px}{4} + \frac{\sqrt[3]{4}}{3 \cdot \sqrt[3]{y^2}}.$$

Вычислим значения частных производных в точке M:

$$z_x{}'\Big|_M = \frac{3}{8} + \frac{p}{2} \cdot \cos p = \frac{3}{8} - \frac{p}{2} \approx -1{,}2.$$

$$z_y{}'\Big|_M = -\frac{3}{2} + \sin p + \frac{\sqrt[3]{4}}{3 \cdot \sqrt[3]{4}} = -\frac{3}{2} + 0 + \frac{1}{3} = -\frac{7}{6} \approx -1{,}17.$$

Таким образом, градиентом функции будет вектор:

$$\overline{grad\, z} = \left(z_x{}'\Big|_M;\, z_x{}'\Big|_M\right) = (-1{,}2;\, -1{,}17).$$

Производную по направлению вектора $\bar{l}$ найдем по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = \frac{\overline{grad\, z} \cdot \bar{l}}{|\bar{l}|}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = \frac{-1{,}2 \cdot 8 + (-1{,}17) \cdot (-6)}{\sqrt{64 + 36}} = \frac{-2{,}58}{10} = -0{,}258.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \overline{grad\, z} = (-1{,}2;\, -1{,}17), \\ \dfrac{\partial z}{\partial \bar{l}} = -0{,}258. \end{array}\right.$

Пример 17. Решить задачу Коши:

$$y' + 2xy - x \cdot e^{-x^2} = 0; \qquad y(0) = 0.$$

Решение. 1) Найдем общее решение дифференциального уравнения. Данное дифференциальное уравнение первого порядка является линейным. Следовательно, произведем следующую замену переменной:

$$y(x)=u(x)\cdot v(x), \qquad y'=u'\cdot v+u\cdot v'.$$

Тогда

$$u'\cdot v+u\cdot v'+2x\cdot u\cdot v-x\cdot e^{-x^2}=0, \quad \text{или} \quad u'\cdot v+u\cdot(v'+2x\cdot v)-x\cdot e^{-x^2}=0.$$

Подберем теперь такую функцию $v(x)$, чтобы $v'+2xv=0$. То есть $v(x)$ будем искать как решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx}=-2xv, \qquad \frac{dv}{v}=-2x\cdot dx, \qquad \int\frac{dv}{v}=-2\int xdx, \qquad \ln|v|=-2\cdot\frac{x^2}{2}+C.$$

При $C=0$ получим: $\ln|v|=-x^2$. Следовательно, $v=e^{-x^2}$.
При таком выборе функции $v(x)$ исходное дифференциальное уравнение примет вид: $u'\cdot e^{-x^2}=x\cdot e^{-x^2}$, или $u'(x)=x.$

Следовательно, $u(x)=\int x\cdot dx=\dfrac{x^2}{2}+C.$ Таким образом,

$$y(x)=u(x)\cdot v(x)=\left(\frac{x^2}{2}+C\right)\cdot e^{-x^2}.$$

2) Для решения задачи Коши воспользуемся начальным условием $y(0)=0$.

Тогда $C\cdot e^0=0.\Rightarrow C=0.\Rightarrow y(x)=\dfrac{x^2}{2}\cdot e^{-x^2}.$

Ответ: $y(x)=\dfrac{x^2}{2}\cdot e^{-x^2}.$

ЧАСТЬ II

Задание №1. Решить систему линейных уравнений:
1) методом Гаусса; 2) методом Крамара; 3) с помощью обратной матрицы.

1. $\begin{cases} 2x+4y+5z=3, \\ -4x+3y-7z=8, \\ 3x+8y-z=-2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 5x+4y-3z=-3, \\ -2x+3y+8z=1, \\ x-4y-7z=1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x + y - 3z = -3, \\ 5x + 4y + z = 5, \\ 3x + 8y - z = -2. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 5x + 2y + 6z = -1, \\ -3x + 2y + z = 1, \\ 8x - 3y + 3z = -7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + 4y - 5z = 5, \\ 3x + 2y - 4z = -1, \\ x - 3y + 4z = -6. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x + 5y + 4z = 6, \\ -2x + 3y + 5z = -9, \\ 2x + y - 3z = 3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 5, \\ -6x - y + 2z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = -7. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} -4x + 5y + 3z = 6, \\ 3x + 8y + 2z = 5, \\ x - 9y - 3z = -5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} -3x + 4y - 4z = 7, \\ 2x + y + 3z = 2, \\ 3x - 5y - 4z = 7. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 4x + y - 3z = -4, \\ 5x + 3y + 2z = 7, \\ -2x + 6y + 5z = -7. \end{cases}$

Задание №2. Дана пирамида ABCD. Найти: 1) угол CBD; 2) площадь грани ABC; 3) объем пирамиды.

1. A(2; 4;-3), B(-1; 3; 5), C(6;-2; 1), D(-2;-3; 4).
2. A(4; 2; 3), B(1;-4; 5), C(2;-4;-1), D(-3; 2; 3).
3. A(-1; 3; 3), B(7; 2; 0), C(-2;-1; 4), D(4; 3; -1).
4. A(-2; 5; 6), B(0; 5;-8), C(-3; 2; 4), D(5; -2; 6).
5. A(1; 5; 3), B(7; 0; -1), C(-6; 2; 3), D(-2; 3; 3).
6. A(2; 4;-3), B(-1; 3; 5), C(3; -2; 1), D(2; 3;-7).
7. A(3; 0; 5), B(-4; 3; -1), C(-5; 2; 3), D(1; 1; 4).
8. A(5;-2; 1), B(-2;-3; 0), C(7;-1;-1), D(-1; 0; 5).
9. A(-3; 1; 0), B(4; 1; -5), C(-6; 1; 1), D(3;-1;-1).
10. A(-7; 1;-5), B(3; -6; 1), C(4;-1; 4), D(2; 5; 0).

Задание №3. Дан треугольник ABC . Найти: 1) уравнения сторон; 2) уравнение и длину медианы AM; 3) уравнение и длину высот BD и CK;

4) уравнение биссектрисы угла B; 5) точку пересечения медианы AM с высотой BD и угол между ними.

1. A(2; 3), B(-4; 3), C(-1; -1).
2. A(-2; 4), B(-2; 1), C(1; 5).
3. A(4; 1), B(3; 1), C(0; -3).
4. A(3; -2), B(3; 0), C(-1; -3).
5. A(6; 4), B(-3; 4), C(1; 1).
6. A(-2; 2), B(-2; 6), C(1; 10).
7. A(5; 1), B(3; 1), C(-1; -2).
8. A(3; 0), B(3; -6), C(0; -2).
9. A(-2; 3), B(4; 3), C(1; -1).
10. A(6; 1), B(6; -3), C(3; -1).

Задание №4. Найти предел следующих функций:

1. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-\sqrt{x^3}+2x}{3x^2+2x-5}$, *б*) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3+1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{2x^2-3x-5}$,

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\frac{p}{2}x}{x-1}$, *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+4}\right)^{3x}$.

2. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+\sqrt{4x^4+1}}{5x^2+3x-1}$, *б*) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2-12}-2}{\sqrt{3x+4}-x}$,

в) $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$, *г*) $\lim\limits_{x\to2}(x-1)^{\frac{1}{x-2}}$.

3. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+\sqrt{x^5+2}}{2x^2-6x+8}$, *б*) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-x}$,

в) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\dfrac{\cos x}{x^2-\frac{p^2}{4}}$, *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4+2x}{3+2x}\right)^{x-1}$.

4. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+3\sqrt{x}+1}{2x^2-4x+2}$, *б*) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{x^2+x-6}$,

в) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\dfrac{tg\left(x-\frac{p}{2}\right)}{\frac{p}{2}-x}$, *г*) $\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{\frac{2}{x-3}}$.

5. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x-3}{\sqrt{x^4+3x}+8x^3}$, $\quad б)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3x}{3x^2+5x-8}$,

$в)\ \lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\dfrac{x-1}{tgp\ x}$, $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)^{4x-2}$.

6. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-8x^2+3}{\sqrt{x^6+3}+2x^3}$, $\quad б)\ \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+1}\cdot\left(x^2-1\right)}{x^2+3x+2}$,

$в)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{arctg\,2x}$, $\quad г)\ \lim\limits_{x\to-1}(2+x)^{\frac{3}{x+1}}$.

7. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{6\sqrt{x^4+2}-3x}$, $\quad б)\ \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}+x}{x^3+8}$,

$в)\ \lim\limits_{x\to\frac{p}{2}} tgx\cdot\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$, $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4+3x}{2+3x}\right)^{x-1}$.

8. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-3x^2+2}{\sqrt{9x^4+x^2}+3}$, $\quad б)\ \lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+27}{\sqrt{6-x}+x}$,

$в)\ \lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin\left(\dfrac{p}{2}\cdot x\right)}{x-2}$, $\quad г)\ \lim\limits_{x\to4}(x-3)^{\frac{5}{x-4}}$.

9. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{8x^6+3x}+2x^3}{6x^3+3x-1}$, $\quad б)\ \lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-5}\cdot\left(x^2-25\right)}{2x^2-6x-20}$,

$в)\ \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{p\ x}{2}}$, $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6+x^2}{3+x^2}\right)^{x^2-1}$.

10. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+8}{2x^2+\sqrt{x^2+4}}$, $\quad б)\ \lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{-x}}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{13+x}}$,

$в)\ \lim\limits_{x\to p}\dfrac{\sin x}{x^2-p^2}$, $\quad г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6-2x}{5-2x}\right)^{3-2x}$.

Задание №5. Найти производную $y'(x)$ следующих функций:

1. а) $y=\dfrac{ctg3x-\sqrt[3]{x}}{\sin^2 4x}$, б) $y=\left(arctg\sqrt{x}\right)^{\cos x}$,

в) $\lg\left(xy^2+2^{x+y}\right)=0$, г) $\begin{cases} y=\arcsin\sqrt{t}, \\ x=\sqrt{1-t}. \end{cases}$

2. а) $y=\sqrt[4]{x}\arccos 7x - 3^{-\mathrm{ctg}x}$, б) $y=(\sin 5x)^{e^x}$,

в) $tg\left(x+y^2\right)-\dfrac{x^3}{y}=1$, г) $\begin{cases} y=\lg\left(1+t^2\right), \\ x=\sqrt{1+t^2}. \end{cases}$

3. а) $y=e^{-\sin 2x}(arctgx+tg3x)$, б) $y=\left(\arccos\sqrt[4]{x}\right)^{\sqrt{x}}$,

в) $\mathrm{xy}=\lg\left(x-\sqrt{y}\right)+3$, г) $\begin{cases} y=\arcsin(1-t), \\ x=\sqrt{2t-t^2}. \end{cases}$

4. а) $y=\dfrac{4^{-\sin x}-\arcsin 2x}{\lg(x-\cos x)}$, б) $y=\left(tg\sqrt{x}\right)^{-\arccos x}$,

в) $\mathrm{x}-\mathrm{y}^2+\mathrm{e}^{\sqrt{\mathrm{x}}\mathrm{y}^3}=0$, г) $\begin{cases} y=arctg(1+t), \\ x=\lg\left(t^2+2t+2\right). \end{cases}$

5. а) $y=\left(\arccos 4x-tg^2 2x\right)\mathrm{e}^{-x}$, б) $y=(ctg3x)^{\sqrt[3]{\mathrm{x}}}$,

в) $\sqrt{\mathrm{x}-\mathrm{y}}+\lg\dfrac{x}{y}=0$, г) $\begin{cases} y=arcctg\sqrt{t}, \\ x=\lg(1+t). \end{cases}$

6. а) $y=\dfrac{16^x-\cos 3x}{\arcsin^2 5x}$, б) $y=(arctg8x)^{\sqrt[5]{x}}$,

в) $\mathrm{y}^2+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\cdot\cos\mathrm{y}=x$, г) $\begin{cases} y=\lg\left(t+\sqrt{t}\right), \\ x=\left(2\sqrt{t}+1\right)^2. \end{cases}$

7. а) $y=\left(3^{-tgx}+\cos 2x\right)\arcsin\sqrt{x}$, б) $y=(ctg\,2x)^{-3x}$,

в) $y\sqrt{x}-e^{x-2y}=4$, г) $\begin{cases} y=\sqrt{8t-t^2-15}, \\ x=arcctg(4-t). \end{cases}$

8. а) $y=\dfrac{3^{-x^2}}{\arccos\sqrt{x}+\lg(1-x)}$, б) $y=x^{arcctg\left(x^2-1\right)}$,

в) $\cos x-5y^2+e^{xy}=0$, г) $\begin{cases} y=ctg^2 t, \\ x=\sin^3 t. \end{cases}$

9. а) $y=\left(2^{-x^2}+3e^{\sqrt{x}}\right)arcctg\sqrt[4]{x}$, б) $y=x^{\arcsin\sqrt{1-x^2}}$,

в) $\sin(x-5y)+\dfrac{x^3}{y}=1$, г) $\begin{cases} y=\cos^2 t, \\ x=\log_5(ctg\,t). \end{cases}$

10. а) $y=\dfrac{3\cos 7x-2e\sqrt{x}}{arctg\sqrt{x^2+1}}$, б) $y=(\lg x)^{\arccos 2x}$,

в) $3^{xy}-\sqrt[3]{x+y}=4$, г) $\begin{cases} y=tg^3 t, \\ x=\sin^4 t. \end{cases}$

Задание №6. Вычислить приближенно, с помощью дифференциала:

1. а) $\sqrt{16{,}13}$, б) $\sin 32^{o}15'$.
2. а) $\sqrt[3]{7{,}91}$, б) $\cos 31^{o}45'$.
3. а) $\sqrt{24{,}76}$, б) $tg\,43^{o}30'$.
4. а) $\sqrt[3]{27{,}34}$, б) $arctg\,0{,}93$.
5. а) $\sqrt[4]{15{,}23}$, б) $arcctg\,1{,}12$.
6. а) $\sqrt{35{,}46}$, б) $ctg\,46^{o}18'$.
7. а) $\sqrt[4]{81{,}21}$, б) $\sin 47^{o}12'$.
8. а) $\sqrt[3]{7{,}73}$, б) $\cos 43^{o}48'$.
9. а) $\sqrt{64{,}93}$, б) $arctg\,1{,}15$.
10. а) $\sqrt[4]{63{,}18}$, б) $arcctg\,0{,}89$.

Задание №7. Найти неопределенный интеграл:

1. а) $\int \frac{dx}{x\lg^2 x}$, б) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+3}$, в) $\int x\sin 3x dx$.

2. а) $\int x^2 \sin x^3 dx$, б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$, в) $\int xe^{-2x}dx$.

3. а) $\int e^{3-2x}dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$, в) $\int x^2 \ln x dx$.

4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$, б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x}-2}$, в) $\int x\cos 2x dx$.

5. а) $\int \frac{dx}{\cos^2(7x+4)}$, б) $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$, в) $\int arctgx dx$.

6. а) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+4}$, б) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-4}$, в) $\int \arccos x dx$.

7. а) $\int \frac{\arccos^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$, б) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x-1}}$, в) $\int x\sin 2x dx$.

8. а) $\int \frac{tgx dx}{\cos^2 x}$, б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x}+5}$, в) $\int x\ln x dx$.

9. а) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)arctgx}$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}$, в) $\int x\cos 4x dx$.

10. а) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$, б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-7}}$, в) $\int xe^{1-x}dx$.

Задание №8. С помощью определенного интеграла вычислить площадь земельного участка, ограниченного линиями:

1. $\begin{cases} y = 2x^2 + 3x - 4, \\ y = 2x - 1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y = -3x^2 + 4x + 1, \\ y = -2x + 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = 3x^2 + 2x - 7, \\ y = 2x + 5. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} y = -x^2 + 5x - 6, \\ y = x - 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 4, \\ y = 3x - 2. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} y = x^2 + 8x - 7, \\ y = x + 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = -2x^2 + 3x + 6, \\ y = -x. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} y = 3x^2 + 4x - 8, \\ y = -2x + 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y = -3x^2 + 6x + 4, \\ y = 3x - 5. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} y = -2x^2 + 5x + 1, \\ y = x - 5. \end{cases}$

Задание №9. Найти градиент функции $z = z(x; y)$ в точке M и производную по направлению вектора $\bar{l}$.

1. $z = 3\sqrt{x} \cdot y^2 + 2\cos py - y \cdot e^{\frac{x}{4}};$ $M(4;1);$ $\bar{l} = (-1;5).$

2. $z = 2x \cdot \sqrt[3]{y} + y \cdot \sin\frac{px}{3} + 3e^{\frac{xy}{8}};$ $M(1;8);$ $\bar{l} = (3;2).$

3. $z = 3x \cdot tg\frac{py}{3} - 6e^{\frac{x}{3}} \cdot \sqrt{y} + x^3;$ $M(3;1);$ $\bar{l} = (-1;5).$

4. $z = x^2 \cdot \sqrt[3]{y} + e^y \cdot \sin\frac{px}{4} + \frac{x}{y^2};$ $M(2;1);$ $\bar{l} = (-3;4).$

5. $z = 2\sqrt{x} \cdot y^3 + 3\sin\frac{px}{9} e^{\frac{y}{2}} + \sqrt{2y};$ $M(9;2);$ $\bar{l} = (4;-8).$

6. $z = 4\ln\left(e \cdot yx^2\right) + \sqrt{y}\sin px + \frac{2y}{x};$ $M(-1;1);$ $\bar{l} = (3;-6).$

7. $z=\sqrt[3]{y}\ln^2\frac{x}{4}+5\cos\frac{py}{x}+\frac{y^2}{4};$ $\qquad M(4;8);\quad \bar{l}=(4;5).$

8. $z=3ctg\frac{px}{y}+\ln\frac{xy}{2}-\frac{\sqrt{y}}{3x};$ $\qquad M(2;4);\quad \bar{l}=(7;5).$

9. $z=\frac{x^2}{\sin\frac{py}{2}}+\ln\frac{4y}{x}-3\sqrt{x};$ $\qquad M(4;1);\quad \bar{l}=(-5;4).$

10. $z=3y\cdot tg\left(\frac{p}{2}\cdot x^2\right)+\sqrt{y^2+5x}+\frac{x}{2y};$ $\quad M(-2;1);\quad \bar{l}=(4;2).$

<u>Задание №10.</u> Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию (задача Коши):

1. $\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0;$ $\qquad y(0)=0.$

2. $(1+x^2)dx+(1+y^2)dy=0;$ $\qquad y(0)=1.$

3. $y'-ytgx=\frac{1}{\cos x};$ $\qquad y(0)=0.$

4. $(y^2+x^2)dx-2xydy=0;$ $\qquad y(4)=0.$

5. $(x+xy^2)dx+(yx^2-y)dy=0;$ $\qquad y(0)=1.$

6. $xy'+y-e^x=0;$ $\qquad y(1)=1.$

7. $(1+e^x)yy'=e^x;$ $\qquad y(0)=1.$

8. $\sqrt{x^2+y^2}dx=xdy-ydx;$ $\qquad y(1)=1.$

9. $\sin y\cos xdy=\sin x\cos ydx;$ $\qquad y(0)=\frac{p}{4}.$

10. $y'-\frac{y}{1-x^2}=1+x;$ $\qquad y(0)=0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Физматгиз, 1978.
2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для втузов. – 13-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат лит., 1987. – 352 с.
3. Шипачев В.С. Основы высшей математики: Учеб. пособие для втузов / Под ред. акад. А.Н. Тихонова.– 2-е изд. стереотипное– М.: Высш. шк., 1994.– 352 с.
4. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие./ – М.: Высш. шк., 1994.– 192 с.

Составитель ст. преп. Уксусов Сергей Николаевич
Редактор Тихомирова О.А.