МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Программа, методические указания и контрольные задания для студентов-заочников, обучающихся по специальностям
«Техносферная безопасность»

Владивосток
2014

Одобрено методическим советом университета

УДК 517

Методические указания и контрольные задания составлены в соответствии с программой дисциплины «Линейная алгебра» и государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования. Для студентов-заочников 1 курса, обучающихся по специальностям «Техносферная безопасность»

Составитель: доцент кафедры прикладной математики и механики к. ф.-м. н. А.А. Бочарова.

Отпечатано с оригинал-макета, подготовленного автором.

Общие указания

Требования, предъявляемые к математическому образованию студентов инженерно-технических специальностей, ставят следующие задачи в процессе преподавания курса математический анализ: повышение уровня фундаментальной математической подготовки, ориентация студентов на использование аналитических методов при решении задач, развитие у студентов навыков логического мышления.

В результате изучения курса студент должен в достаточной степени овладеть основными понятиями и алгоритмами дисциплины с целью самостоятельного решения инженерных задач специальности.

Программа курса линейной алгебры на 1 – 2 семестры.

1. Введение – элементы теории множеств, теория определителей и матриц, системы линейных алгебраических уравнений, метод Крамера, Гаусса, исследование совместности системы, обратная матрица, комплексные числа, многочлены.

2. Векторная алгебра – линейные операции, линейная зависимость векторов, базис, ортогональная проекция, скалярное, векторное, смешанное произведение векторов.

3. Аналитическая геометрия – прямая и плоскость, основные задачи, решаемые методами векторной алгебры, линейные преобразования на плоскости, кривые и поверхности второго порядка

Литература:

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2004. – 374 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М.: Наука, 1988. - 222 с.
3. Винберг Э.Г. Курс алгебры. Факториал, 2002. – 544 с.
4. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2004. – 280 с.
5. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2003. – 240 с.
6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физматлит, 2002. – 249 с.
7. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. С-Петербург.: Профессия, 2006. - 200 с.
8. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. С-Петербург.: Лань, 2002. - 656 с.

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. - М.: Рольф, 2001. – 288 с.

В 1-2 семестре по курсу высшей математики студент должен выполнить одну контрольнуе работу. Вариант задания выбирается по последней цифре номера зачетной книжки.

№ Вариант	Контрольная работа								
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Элементы линейной алгебры

1-10. Даны две матрицы A и B. Найти а) BA; б) A^{-1}; в) AA^{-1}.

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & -5\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -5\\ 2 & 3 & -4\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ -1 & 4 & -2\\ 2 & -5 & 1\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3\\ 6 & 1 & -2\end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ 0 & -1 & 3\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -7\\ 4 & -2 & 3\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 0 & -2 & -3\\ 4 & 1 & -5\end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 5 & 4 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 1\\ 0 & 9 & -2\\ 5 & 5 & -4\end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ 7 & 2 & -3\\ 4 & -7 & 2\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 8 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

11-20. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

11. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-4 \\ 2x_1-x_2+2x_3=3 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-x_2-3x_3=0 \\ x_1+5x_2+x_3=-3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ 8x_1+3x_2-6x_3=-4 \\ -4x_1-x_2+3x_3=5 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=16 \\ 5x_1+x_2+2x_3=8 \\ 3x_1-x_2+x_3=-11 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=6 \\ 5x_1+x_2+2x_3=3 \\ 3x_1-x_2+x_3=12 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-9 \\ 3x_1+x_2+x_3=-4 \\ -3x_1+5x_2+6x_3=-8 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4 \\ 2x_1-x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+x_2+4x_3=6 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-19 \\ 3x_1+x_2+x_3=-4 \\ -3x_1+5x_2+6x_3=36 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-1 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=12 \\ 3x_1-2x_2-5x_3=5 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=14 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-16 \\ 3x_1-2x_2-5x_3=-8 \end{cases}$

21-30.Решить квадратное уравнение:

21. $2x^2+2x+26=0$

22. $3x^2+2x+1=0$

23. $2x^2+2x+1=0$

24. $x^2-4x+20=0$

25. $x^2+2x+2=0$

26. $x^2-8x+17=0$

27. $x^2+2x+5=0$

28. $4x^2+6x+3=0$

29. $6x^2+8x+4=0$

30. $4x^2+2x+1=0$

31-40.Найти все корни уравнения, используя формулу Муавра. Изобразить корни на комплексной плоскости.

31. $z^4+243=0$

32. $z^4-1=0$

33. $z^3-1=0$

34. $z^3-27=0$

35. $z^3+64=0$

36. $z^4+16=0$

37. $z^3+64=0$

38. $z^3+27=0$

39. $z^3+1=0$

40. $z^4+1=0$

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

41-50. Даны векторы a, b, c. Требуется: а) вычислить скалярное произведение $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})$; б) векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$; в) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $2\vec{b}-\vec{c})$; г) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.на комплексной плоскости.

51. $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$	$\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$	$\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$
52. $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$	$\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$	$\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$
53. $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$	$\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$	$\vec{c}=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$
54. $\vec{a}=+2\vec{j}+\vec{k}$	$\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$	$\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$
55. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$	$\vec{b}=-2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$	$\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$
56 $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$	$\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$	$\vec{c}=-3\vec{j}+2\vec{k}$
57. $\vec{a}=-2\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$	$\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$	$\vec{c}=3\vec{i}+4\vec{k}$

58. $\vec{a} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$ $\quad \vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ $\quad \vec{c} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$

59. $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$ $\quad \vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ $\quad \vec{c} = -3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

60. $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ $\quad \vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ $\quad \vec{c} = -4\vec{i} - 2\vec{k}$

61-70. Заданы координаты вершин пирамиды A, B, C, D. Вычислить: а) модуль вектора $\overrightarrow{AB}$; б) косинус угла BAC; в) площадь треугольника ABC; г) высоту треугольника ABC, опущенную из вершины B на сторону AC; д) объем пирамиды $ABCD$, е) высоту пирамиды, опущенную из вершины D на основание ABC .

71. $A(1,2,-3)$, $B(2,4,0)$, $C(2,3,0)$, $D(5,3,1)$

72. $A(2,1,0)$, $B(5,3,1)$, $C(0,1,2)$, $D(4,3,1)$

73. $A(1,1,1)$, $B(3,4,5)$, $Ñ(2,3,1)$, $D(4,5,1)$

74. A(2,-1,0), B(-1,3,4), C(1,1,1), D(0,3,5)

75. $A(2,4,-3)$, $B(3,5,-4)$, $C(2,7,1)$ $D(3,4,0)$,

76. $A(7,7,0)$, $B(3,9,1)$, $C(8,-3,4)$, $D(1,2,-1)$

77. $A(1,3,-1)$, $B(2,0,7)$, $C(-2,4,0)$, $D(5,5,2)$

78. $A(3,7,2)$, $B(4,0,8)$, $C(2,3,7)$, $D(-1,-3,1)$

79. $A(-1,2,3)$, $B(0,2,4)$, $C(3,5,4)$, $D(1,-2,3)$

80. $A(3,4,2)$, $B(4,6,3)$, $C(5,4,4)$, $D(4,3,2)$

81-90. Для точек A, B, C, D из задания 6 составить уравнения : а) стороны AB; б) плоскости ABC; в) уравнение высоты, опущенной на основание ABC из вершины B; г) уравнение плоскости, проходящей через точку B, перпендикулярно прямой AB.

91-100. Даны вершины треугольника A, B, C. Составить уравнения: а) стороны AB; б) медианы BM ; в) высоты CH, опущенной из вершины C на сторону AB; г) прямой, проходящей через точку C параллельно AB; д) расстояний от точки C до прямой AB.

91. $A(-2,3),\ B(3,4), C(-3,5)$
92. $A(-4,-3),\ B(2,-1), C(-2,5)$
93. $A(-3,5),\ B(-2,6), C(3,-4)$
94. $A(6,2),\ B(-3,1), C(-4,6)$
95. $A(-6,-3),\ B(4,-6), C(2,-3)$
96. $A(-4,2),\ B(6,-4), C(4,10)$
97. $A(4,2),\ B(8,-4), C(-5,7)$
98. $A(2,-4),\ B(-8,5), C(-6,3)$
99. $A(1,-6),\ B(5,-1), C(-8,4)$
100. $A(-1,-3),\ B(10,-8), C(-4,1)$

61-70.Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными кривыми. Сделать чертеж.

Пример решения типового варианта контрольной работы № 1.

Пример. 1.

Даны две матрицы A и B. Найти а) BA; б) A^{-1}; в) AA^{-1}.

Матрица $A_{m\times n}$ размерности m×n – это прямоугольная таблица чисел, имеющая m строк, n столбцов. Обозначается $A_{m\times n}=\{a_{ij}\}$, где $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Произведением матриц $A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$ называется матрица, элементы которой получаются по правилу строка-столбец $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

Элемент матрицы c_{ij} равен сумме попарных произведений элементов i строки матрицы A на элементы j строки матрицы B.

Пусть заданы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & -1 & 5\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}.,\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 1\\ 6 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

а) найдем произведение $BA=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 1\\ 6 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & -1 & 5\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 3+(-2)(-2)+3\cdot 4 & 1\cdot 2+(-2)(-1)+3\cdot 3 & 0+5(-2)+2\cdot 3 \\ 0\cdot 3+4(-2)+4 & 0+4(-1)+3 & 0+4\cdot 5+2 \\ 6\cdot 3+(-2)(-2)+2\cdot 4 & 6\cdot 2-(-2)+2\cdot 3 & 0+5(-2)+2\cdot 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 19 & 13 & -4 \\ -4 & -1 & 22 \\ 30 & 20 & -6 \end{pmatrix}$$

б) Матрица A^{-1} называется обратной к матрице А если $AA^{-1}=A^{-1}A=E$. Всякая квадратная матрица определитель которой не равен нулю, имеет единственную обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Пусть задана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, найдем ее определитель:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}=(10+1)-(15-4)-(-3-8)=11-11+11=11,$$

$\det A\neq 0$, следовательно, существует единственная обратная матрица.

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11}=10+1=11,\ A_{12}=-(15-4)=-11,\ A_{13}=-3-8=-11$$
$$A_{21}=-(5-1)=-4,\ A_{22}=5+4=9,\quad A_{23}=-(-1-4)=5$$
$$A_{31}=1+2=3,\quad A_{32}=-(1+3)=-4,\quad A_{33}=2-3=-1$$

Теперь составим обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 11 & -4 & 3 \\ -11 & 9 & -4 \\ -11 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

в) Сделаем проверку, покажем, что $AA^{-1}=E$:

$$AA^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -4 & 3 \\ -11 & 9 & -4 \\ -11 & 5 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11-11+11 & -4+9-5 & 3-4+1 \\ 33-22-11 & -12+18+5 & 9-8-1 \\ 44+11-55 & -16-9+25 & 12+4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Пусть задана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Найдем определитель главной матрицы, разложив по элементам первой строки

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (10+1)-(15-4)-(-3-8) = 11-11+11 = 11$$

$\det A \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение.

а) Решение системы можно получить по формулам Крамера:

$x_j = \dfrac{\Delta_j}{\det A}$, $j = 1,2,3$. Найдем первый вспомогательный определитель Δ_1, заменив в матрице А первый столбец на столбец правых частей уравнений

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$, тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\det A} = \dfrac{0}{11} = 0$.

Найдем второй вспомогательный определитель Δ_2, заменив в матрице А второй столбец на столбец правых частей

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 33$, тогда $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\det A} = \dfrac{33}{11} = 3$. Аналогично:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 22, \text{ тогда } x_3 = \frac{\Delta_3}{\det A} = \frac{22}{11} = 2.$$

б) Матричный способ решения систем. Если ввести в рассмотрение матрицы: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, то всякую систему линейных уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ можно записать в матричном виде $AX = B$. Если определитель матрицы A не равен нулю, тогда решение можно найти в виде $X = A^{-1}B$.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 11 & -4 & 3 \\ -11 & 9 & -4 \\ -11 & 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 0-20+9 \\ 0+45-12 \\ 0+25-3 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -11 \\ 33 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ откуда } x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2.$$

в) Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных путем приведения системы к треугольному виду. В методе Гаусса можно складывать и умножать на число строки расширенной матрицы системы, при этом система остается эквивалентной исходной. Системы называются эквивалентными, если каждое решение одной системы является решением другой и наоборот.

Составим расширенную матрицу

$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right]$, перепишем первую строку без изменения, потом умножим первую строку на (–3) и сложим со второй, затем умножим первую строку на (–4) и сложим с третьей, получим

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -0 & -11 & -22 \end{array}\right]$$

Чтобы получить нули в третьей строке, умножили элементы второй на (–5) и сложили с третьей. Система приняла треугольный вид:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + 4x_3 &= 5 \\ -11x_3 &= -22 \end{aligned}$$

Из последнего уравнения $x_3 = \dfrac{-22}{-11} = 2$, подставляем x_3 во второе уравнение: $-x_2 + 8 = 5,\ x_2 = 3$, затем подставляем x_2, x_3 в первое уравнение: $x_1 + 3 - 2 = 0,\ x_1 = -1.$

Пример 3. Найти корни квадратного уравнения $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x, y - вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица. Это алгебраическая форма записи комплексного числа, здесь x - действительная часть, y - мнимая часть числа Число $\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ называется сопряженным числу $z = x + iy$, изображается на комплексной плоскости точкой симметричной точке z относительно оси Ox.

Найдем дискриминант квадратного уравнения: $D = 4 - 4 \cdot 6 = -20$, следовательно, корнями уравнения являются два комплексно-сопряженных числа

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{5}}{2} = 1 \pm i\sqrt{5}.$$

Пример. . Решить уравнение $z^3 + 8 = 0$. Для этого найдем корни $z = \sqrt[3]{-8}$.

При извлечении корня степени n из комплексного числа используется формула Муавра $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i(\varphi + 2\pi k)}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{(\varphi + 2\pi k)}{n}}$, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Представим действительное число -8 в показательной форме $-8 = 8e^{i\pi}$,

тогда: $z_k = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{3}}$,

$$k = 0 \quad z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 1 \quad z_2 = 2e^{i\pi} = -2$$

$$k = 2 \quad z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - i\sqrt{3}$$

Сумма всех корней должна быть равна нулю. Это свойство можно использовать для проверки.

Пример. Даны векторы a,b,c. Требуется: а) вычислить скалярное произведение $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})$; б) векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$; в) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $2\vec{b}-\vec{c})$; г) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.на комплексной плоскости.

Координаты вектора – это его проекции на оси координат. С системой координат (x, y, z) мы связываем систему попарно перпендикулярных векторов единичной длины $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$, направление которых совпадает с положительным направлением осей. Любой вектор можно представить единственным образом в виде разложения по базису $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, где a_x, a_y, a_z - координаты вектора.

а) Пусть заданы векторы $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

Правила действий над векторами: при сложении векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число, каждая координата умножается на это число. Найдем координаты вектора

$\vec{b}-\vec{c}=\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}-2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}=-\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}$. Скалярное произведение в базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ имеет вид: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$, тогда $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=1\cdot(-1)+1\cdot(-2)+1\cdot(-6)=-9$.

б) Векторное произведение в базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ имеет вид:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},\ \text{тогда}\quad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(8-3)-\vec{j}(-4-1)+\vec{k}(3+2)=5\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}.$$

в) Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов - равенство нулю их скалярного произведения $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Вычислим

$\vec{a}\cdot(2\vec{b}-\vec{c})=1\cdot0+5\cdot(-2)+1\cdot(-6)=-16$, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $(2\vec{b}-\vec{c})$ не ортогональны.

г) Необходимое и достаточное условие компланарности векторов - равенство нулю их смешанного произведения. Смешанное произведение можно вычислить с помощью определителя

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$. Вычислим $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 15$, следова-

тельно, векторы $\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны.

1. ***Пример6.*** Заданы координаты вершин пирамиды $A, B, C,\ D$. Вычислить: а) модуль вектора $\overrightarrow{AB}$; б) косинус угла BAC; в) площадь треугольника ABC; г) высоту треугольника ABC, опущенную из вершины B на сторону AC; д) объем пирамиды $ABCD$, е) высоту пирамиды, опущенную из вершины D на основание ABC.

Заданы точки A(-1,2, 3), B(1, -3, 4), C(5, -1,0), D(4, 0, 6)

1). Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его модуль. Для нахождения координат вектора $\overrightarrow{AB}$ надо из координат конечной точки вычесть координаты начальной точки: $\overrightarrow{AB} = (1+1, -3-2, 4-3) = (2,-5,1)$ или разложение вектора в базисе: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$.

Модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов координат $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, тогда $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{30}$.

2) Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BC} = (4,2,-4)$,

$2\overrightarrow{BC} = (8,4,-8)$, $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = (2+8, -5+4, 1-8) = (10,-1,-7)$.

1) Угол $\angle BAC$ - это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ è $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AC} = (6,-3,-3) = 6\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{2\cdot 6 + (-3)(-5) + (-3)}{\sqrt{30}\sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-3)^2}} = \frac{24}{\sqrt{30}\sqrt{54}} \approx 0{,}596$$

$\varphi = \arccos 0.596 \approx 59^0$.

2) Найти площадь треугольника ABC. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{AC}$. Вначале найдем векторное произведение

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -5 & 1\\ 6 & -3 & -3\end{vmatrix}=18\vec{i}+12\vec{j}+24\vec{k}\text{, тогда}$$

$$S_{ïàð}=\sqrt{18^2+12^2+24^2}=\sqrt{1044}\,,\ S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{1044}=\sqrt{261}\cong 16.1.$$

3) Найти высоту треугольника ABC, опущенную на сторону AB

$$S_\Delta=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|h\text{, откуда}\qquad h=\frac{S_\Delta}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{\sqrt{261}}{\sqrt{30}}\cong 2{,}95.$$

4) Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$

$$V=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1\\ 6 & -3 & -3\\ 5 & -2 & 3\end{vmatrix}=102.$$

5) Найти высоту параллелепипеда, опущенную из D на основание ABC

$$V=S_{ABC}H\quad,\quad H=\frac{V}{S_{ABC}}=\frac{102}{2{,}95}=34{,}58\ .$$

‖ ***Пример 7.*** Для точек $A(-1,2,3)$, $B(2,4,6)$, $C(-3,2,0)$, $D(5,8,3)$ составить уравнения : а) стороны AB; б) плоскости ABC; в) уравнение высоты, опущенной на основание ABC из вершины B; г) уравнение плоскости, проходящей через точку B, перпендикулярно прямой AB.

а) Уравнение прямой, проходящей через две точки

$M_0(x_0,y_0,z_0),\,M_1(x_1,y_1,z_1)$: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$. Тогда уравнение

AB: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$.

б) уравнение плоскости, проходящей через три точки имеет вид

: $\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$, тогда уравнение плоскости ABC

$\begin{vmatrix}x+1 & y-2 & z-3\\ 3 & 2 & 3\\ -2 & 0 & -3\end{vmatrix}=-6(x+1)+3(y-2)+4(z-3)=0$, после преобразований, получим: $-6x+3y+4z-24=0$, то есть нормальный вектор плоскости $\vec{n}=(-6, 3, 4)$.

в) Высота параллельна нормальному вектору плоскости, следовательно, ее уравнение имеет вид: $\frac{x-5}{-6}=\frac{y-8}{3}=\frac{z-3}{4}$.

г) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A, B, C)$ имеет вид: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. В качестве нормального вектора плоскости можно взять вектор $\overrightarrow{AB}=(3, 2, 3)$, тогда уравнение плоскости, проходящей через точку B, перпендикулярно прямой AB будет: $3(x-2)+2(y-4)+3(z-6)=0$ или $3x+2y+3z-32=0$.

4. ***Пример8.*** Даны вершины треугольника A, B, C. Составить уравнения: а) стороны AB; б) медианы BM; в) высоты CH, опущенной из вершины C на сторону AB; г) прямой, проходящей через точку C параллельно AB; д) расстояний от точки C до прямой AB.

Даны точки $A(-1,2)$, $B(2,4)$, $C(-5,6)$

а) уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$,

тогда уравнение AB будет: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}$ или $2(x+1)=3(y-2)$,

$2x-3y+8=0$. Координаты нормального вектора прямой AB: $\vec{n}=(2,-3)$.

б) Координаты середины отрезка AC найдем по формулам:

$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=-3$, $y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=4$, тогда уравнение BM: $\frac{x-2}{-5}=\frac{y-4}{0}$ или $y=4$.

в) Высота CH параллельна вектору $\vec{n}=(2,-3)$, тогда ее уравнение имеет вид: $\frac{x+5}{2}=\frac{y-6}{-3}$.

г) Прямая, параллельная AB имеет тот же нормальный вектор $\vec{n}=(2,-3)$, тогда ее уравнение имеет вид: $2(x+5)-3(y-6)=0$.

д) Расстояние от точки до прямой считаем по формуле:

$d=\frac{|Ax_M+By_M+C)|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, тогда расстояние от точки C до прямой AB будет:

$$d=\frac{|2\cdot(-5)-3\cdot 6+8|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{20}{\sqrt{13}}.$$