



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Программа, методические указания и контрольные задания для студентов-
заочников, обучающихся по специальностям
«Техносферная безопасность»

Владивосток
2014

Одобрено методическим советом университета

УДК 517

Методические указания и контрольные задания составлены в соответствии с программой дисциплины «Математический анализ» и государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования. Для студентов-заочников 1 курса, обучающихся по специальностям «Техносферная безопасность»

Составитель: доцент кафедры прикладной математики и механики к. ф.-м. н. А.А. Бочарова.

Отпечатано с оригинал-макета, подготовленного автором.

© Изд-во ДВФУ, 2014

© Бочарова А.А.

Общие указания

Требования, предъявляемые к математическому образованию студентов инженерно-технических специальностей, ставят следующие задачи в процессе преподавания курса математический анализ: повышение уровня фундаментальной математической подготовки, ориентация студентов на использование аналитических методов при решении задач, развитие у студентов навыков логического мышления.

В результате изучения курса студент должен в достаточной степени овладеть основными понятиями и алгоритмами дисциплины с целью самостоятельного решения инженерных задач специальности.

Программа курса высшей математики на 1 – 2 семестры.

1. Дифференциальное исчисление функций одного переменного – предел последовательности и предел функции; символы порядка, эквивалентность бесконечно малых; непрерывность функций; свойства функций непрерывных на отрезке, правила дифференцирования, теоремы о среднем, исследование функций с помощью производной 1-го и 2-го порядка, формула Тейлора.

2. Интегральное исчисление функций одного переменного – неопределенный интеграл; основные методы интегрирования; определенный интеграл; геометрические и физические приложения определенного интеграла; несобственные интегралы; численное интегрирование.

3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных – предел, непрерывность, производная ФНП; полный дифференциал ФНП; формула Тейлора; интерполяционный многочлен Лагранжа.

Литература:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 2006. – 464 с.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2. – М.: Высшая школа, 2007. – 415 с.

3. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. – М.: Высшая школа, 2006. – 126 с.

В 1-2 семестре по курсу Математический анализ должен выполнить одну контрольную работу. Вариант задания выбирается по последней цифре номера зачетной книжки.

№ Вариант	Контрольная работа					
1	1	11	21	31	41	51

2	2	12	22	32	42	52
3	3	13	23	33	43	53
4	4	14	24	34	44	54
5	5	15	25	35	45	55
6	6	16	26	36	46	56
7	7	17	27	37	47	57
8	8	18	28	38	48	58
9	9	19	29	39	49	59
10	10	20	30	40	50	60

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Дифференциальное исчисление функций.

1-10. Вычислить пределы функций, не используя правило Лопиталя:

1.

$$\begin{aligned} 1). \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} \\ 2). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x} \\ 3). \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}} \\ 4). \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x} \\ 5). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} 1). \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12} \\ 2). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x + 4}{2x^4 + 3x^2 + 1} \\ 3). \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}} \\ 4). \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+8} \right)^{-2x} \\ 5). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{x^3 - 5x^2} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 1). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x} \\ 2). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5} \\ 3). \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8} \\ 4). \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3} \\ 5). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x} \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} 1). \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27} \\ 2). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7x - 4}{x^5 + 2x - 1} \\ 3). \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21} \\ 4). \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x} \\ 5). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 1). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2} \\ 2). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5} \\ 3). \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{x+6}}{x^2 - x + 6} \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} 1). \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} \\ 2). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + x - 1} \\ 3). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1} \end{aligned}$$

$$4). \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2-3x}$$

$$5). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$$

4.

$$4). \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}$$

$$5). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{7x^2}$$

9.

$$1). \lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 - x - x^2}{x^3 - 27}$$

$$2). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$$

$$3). \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$$

$$4). \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{-5x}$$

$$5). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2 \cos 2x}{4x^3}$$

5.

$$1). \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}$$

$$2). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2}$$

$$3). \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$$

$$4). \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{1+x} \right)^{1+2x}$$

$$5). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{4\sqrt{x}}$$

10.

$$1). \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$$

$$2). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 3x + 4}$$

$$3). \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}$$

$$4). \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}$$

$$5). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$$

$$1). \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}$$

$$2). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$$

$$3). \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x + 11}$$

$$4). \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}$$

$$5). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$$

11-20. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций:

11.

$$11.1 \ y(x) = (\arcsin x^3) \cdot 4x^2$$

$$11.2 \ y(x) = \frac{\sqrt[6]{4-x^2}}{\ln(5x+3)}$$

$$11.3 \ y(x) = \left(\sqrt{1-x^2} \right)^{\arcsin 7x}$$

$$11.4 \ \begin{cases} y = (\arctgt)^2 \\ x = \frac{1}{1+t^2} \end{cases}$$

13.

$$13.1 \ y(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^3}$$

$$13.2 \ y(x) = \arctg^2 x \cdot \cos(e^{2x}-1)$$

$$13.3 \ y(x) = [\ln(\cos x)]x^2$$

$$13.4 \ \begin{cases} y(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin t}} \\ x(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin t}} \end{cases}$$

15.

$$15.1 \ y(x) = \sin^3 x \cdot \tg 3x$$

$$15.2 \ y(x) = \frac{-5e^{3x}}{\cos(x^2-8)}$$

$$15.3 \ y(x) = [\sin(\ln x)]x^2$$

$$15.4 \ \begin{cases} y(t) = \frac{t}{1+t^2} \\ x(t) = \frac{t}{1-t^2} \end{cases}$$

12.

$$12.1 \ y(x) = \ln(x+3) \cdot \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{2-x}$$

$$12.2 \ y(x) = \frac{1+x^3}{\sin(2x+1)}$$

$$12.3 \ y(x) = \left(\frac{1}{x^2+8} \right)^{\sin 2x}$$

$$12.4 \ \begin{cases} y(t) = 5(\sin 2t - \cos t) \\ x(t) = 7(\cos 2t + \sin t) \end{cases}$$

14.

$$14.1 \ y(x) = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$$

$$14.2 \ y(x) = \tg^3 9x \cdot e^{6x}$$

$$14.3 \ y(x) = (\arcsin 2x)^{\ln x^2}$$

$$14.4 \ \begin{cases} y = \cos^3 t \\ x = t + \frac{1}{2} \sin 2t \end{cases}$$

16.

$$16.1 \ y(x) = \cos^2 4x \cdot 5^x$$

$$16.2 \ y(x) = \frac{2x^2-7}{\sin 4x}$$

$$16.3 \ y(x) = \ln \left[\arctg(x^2-7) + 3 \right]$$

$$16.4 \ \begin{cases} y(t) = e^t \cdot \tg t \\ x(t) = 2 \sin^2 t \end{cases}$$

17.

$$17.1 \quad y(x) = 2x^3 \sin^2(x+8)$$

$$17.2 \quad y(x) = \frac{4e^{2x}}{\ln(x^2+2)}$$

$$17.3 \quad y(x) = \left(\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) \right)^{e^{2x}}$$

$$17.4 \quad \begin{cases} y(t) = e^t \sin t \\ x(t) = e^t \cos t \end{cases}$$

19.

$$19.1 \quad y(x) = \frac{\cos 4x}{x^2+5}$$

$$19.2 \quad y(x) = \arcsin^2 x \cdot \sqrt[7]{4x^3-1}$$

$$19.3 \quad y(x) = \sqrt{(1-x)^{2\sin^2 x}}$$

$$19.4 \quad \begin{cases} y(t) = \sin(t+4) \cos t \\ x(t) = \cos(t+4) \cos t \end{cases}$$

18.

$$18.1 \quad y(x) = \ln(4x^3+2) \cdot e^{5x}$$

$$18.2 \quad y(x) = \operatorname{arctg}(2x) \cdot 5^{\ln x^2}$$

$$18.3 \quad y(x) = \left(\operatorname{arctg} \frac{e^x}{5} \right)^{\frac{1}{6x}}$$

$$18.4 \quad \begin{cases} y(t) = \sin^2 t \\ x(t) = 2t - \sin 2t \end{cases}$$

20.

$$20.1 \quad y(x) = \frac{4x^2-1}{\operatorname{tg} 7x}$$

$$20.2 \quad y(x) = 4x^2 \cdot \sqrt{x^3+x}$$

$$20.3 \quad y(x) = (\cos 3x)^{x^2-2}$$

$$20.4 \quad \begin{cases} y(t) = t^2(1+t) \\ x(t) = (1+t)^2 t \end{cases}$$

21-30. Найти частные производные функции $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ и градиент функции $\text{grad}U$ в точке M_0

$$21. \quad U(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad M_0(0, -1).$$

$$22. \quad U(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad M_0(1, -1)$$

$$23. \quad U(x, y) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right) \quad M_0(1, 1)$$

$$24. \quad U(x, y) = \ln\left(y + \frac{y}{2x}\right) \quad M_0(1, 2)$$

$$25. \quad U(x, y) = \ln(x^3 + 2y^3 - xy) \quad M_0(1, 2)$$

$$26. \quad U(x, y) = \text{arctg}(xy^2) \quad M_0(1, -1)$$

$$27. \quad U(x, y) = \ln \cos(x^2 y^2 + x) \quad M_0(2, 2)$$

$$28. \quad U(x, y) = \text{arctg}\left(\frac{x}{y^2}\right) \quad M_0(2, 2)$$

$$29. \quad U(x, y) = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x} \quad M_0(1, 1)$$

$$30. \quad U(x, y) = \ln(x + y^2) - \sqrt{x^2 -} \quad M_0(2, 1)$$

31-40. Найти неопределенные интегралы:

31.

1. $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx$

2. $\int \frac{3x - 1}{x^2 - 6x + 10} dx$

3. $\int (x + 1)e^x dx$

4. $\int \frac{x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x} dx$

32.

1. $\int \frac{\sin x \cdot dx}{\sqrt[3]{7 + 2 \cos x}}$

2. $\int \frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 12} dx$

3. $\int \frac{\ln x \cdot dx}{x^3}$

4. $\int \frac{dx}{x^3 + 4x - x^2 - 4}$

33.

1. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$

2. $\int \frac{x + 1}{5x^2 + 2x + 1} dx$

3. $\int \arcsin x \cdot dx$

4. $\int \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - 6x} dx$

36.

1. $\int \frac{x \cdot dx}{2x^4 + 5}$

2. $\int \frac{5x - 3}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}} dx$

3. $\int x \cdot \ln(x^2 + 1) dx$

4. $\int \frac{x + 3}{(x + 2) \cdot (x^2 + x + 1)} dx$

37.

1. $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \cdot (\arctg x - 3)}$

2. $\int \frac{5x + 3}{3x^2 + 2x + 1} dx$

3. $\int \frac{x \cdot dx}{\cos^2 x}$

4. $\int \frac{x^2 - 3}{x^4 - 5x^2 + 6} \cdot dx$

38.

1. $\int \frac{x - \arctg x}{1 + x^2} dx$

2. $\int \frac{x - 8}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} \cdot dx$

3. $\int x^2 \cdot \cos 3x dx$

4. $\int \frac{2x^2 + 1}{x^3 + x^2 + 2x + 2} dx$

34.

1. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \cdot dx$

2. $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+7} \cdot dx$

3. $\int \frac{\ln x}{x^2} \cdot dx$

4. $\int \frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)} dx$

35.

1. $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5} dx$

2. $\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

3. $\int (x+2) \ln x \cdot dx$

4. $\int \frac{x^2 \cdot dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$

39.

1. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}} dx$

2. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$

3. $\int \ln(x^2+1) dx$

4. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

40.

1. $\int \frac{\sin x \cdot dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$

2. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx$

3. $\int (1-x) \sin x \cdot dx$

4. $\int \frac{x^3+2}{x^4+3x^2} dx$

41-50. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

41. $\int_0^{\infty} \frac{\arctg 2x}{\pi(1+4x^2)} dx$

42. $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$

43. $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

44. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

46. $\int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$

47. $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x^2}$

48. $\int_1^{\infty} \frac{\arctg x dx}{x^2}$

49. $\int_1^{\infty} \frac{\cos^2 x dx}{x^4}$

$$45. \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$$

$$50. \int_1^{\infty} \frac{\arctg x \, dx}{x^4}$$

51-60. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными кривыми. Сделать чертеж.

$$51. \quad x = y^2 + 4y; x = y + 4$$

$$56. \quad x = 4y - y^2; x + y = 6$$

$$52. \quad x = -y^2 + 4; x = y^2$$

$$57. \quad x^2 = 3y; y^2 = 3x$$

$$53. \quad y = x^2; y = \frac{3}{4}x^2 + 1$$

$$58. \quad y = -2x^2; y = 1 - 3x^2; y \leq 0; x \leq 0$$

$$54. \quad x = y^2; x = |y|$$

$$59. \quad y = 0; y = 2; x = 2^y; x = 2y - y^2$$

$$55. \quad x = 4y^2; x = \frac{y^2}{9}; x = 2$$

$$60. \quad x = 6y^2; x + y = 2; x = 0; y \geq 0$$