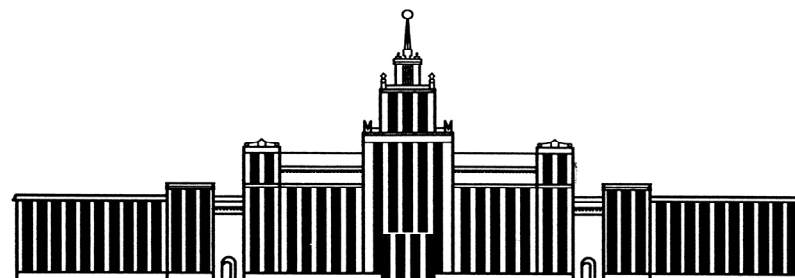

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.И. Назарова, А.В. Келлер

МАТЕМАТИКА

Сборник контрольных заданий
Часть 2

Челябинск
2014

Раздел I. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В данном разделе предложены задачи, которые рассматриваются в теме «Введение в математический анализ»: элементарные преобразования графиков функций, предел последовательности, предел функции, непрерывность функции.

Необходимый теоретический материал представлен в учебных пособиях Н.Ш. Кремера, Д.Т. Письменного, В.И. Малыхина. Отметим, что при работе с учебной литературой следует учитывать различный подход авторов к решению некоторых задач по данной теме. Сборники задач Н.Ш. Кремера и В.И. Ермакова, кроме текстов заданий и примеров решения задач, содержат краткие теоретические сведения, что способствует повышению эффективности самостоятельной работы студентов с учебными пособиями при подготовке к занятиям.

Задача 1.1. Построить график функции с помощью преобразований графиков.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $y = 2 \left \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right + 1;$ | 11) $y = \left \frac{1}{4} \operatorname{tg} x - 4 \right ;$ | 21) $y = 4 \left \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right + 3;$ |
| 2) $y = \log_2 3 x - 5;$ | 12) $y = \operatorname{ctg} 2x + 2;$ | 22) $y = 2 + e^{2 x-3 } ;$ |
| 3) $y = \frac{1}{2} \left \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right - 2;$ | 13) $y = \frac{1}{2} \left \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right - 2;$ | 23) $y = \left \frac{1}{3} \operatorname{tg} x + 3 \right ;$ |
| 4) $y = 2 - e^{ x+1 } ;$ | 14) $y = \frac{1}{2} \log_2 (3 x+1) - 2;$ | 24) $y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x - 3;$ |
| 5) $y = \operatorname{tg} 3x - 2 ;$ | 15) $y = \frac{1}{3} \left \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right + 1;$ | 25) $y = 2 \left \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right + 1;$ |
| 6) $y = 3 \operatorname{ctg} x - 2 ;$ | 16) $y = -5 + e^{ x-2 } ;$ | 26) $y = \log_2 (3 x-2) + 3;$ |
| 7) $y = 3 \left \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right - 2;$ | 17) $y = 2 \operatorname{tg} x + 3 ;$ | 27) $y = 2 \left \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right - 4;$ |
| 8) $y = \log_3 (2 x-1) + 5;$ | 18) $y = 3 \operatorname{ctg} x + 2 ;$ | 27) $y = -3 - e^{ x-5 } ;$ |
| 9) $y = 2 \left \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right + 2;$ | 19) $y = 4 \left \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right + 3;$ | 29) $y = 2 \operatorname{tg} x + 2 ;$ |
| 10) $y = \left 3 - \frac{1}{2} e^{ x+2 } \right ;$ | 20) $y = 3 \log_4 (x + 2) + 1;$ | 30) $y = \operatorname{ctg} 2x - 4 .$ |

Пример 1.1

Построить график функции с помощью преобразований графиков

$$y = \left| \frac{3}{2} - e^{\frac{1}{2}|x+2|} \right|.$$

Решение

Запишем последовательность преобразований графиков функций и их описание

I. $y = e^x$ – график показательной функции;

II. $y = e^{|x|}$ – часть графика функции $y = e^x$ при $x < 0$ убирается, часть графика при $x \geq 0$ остается неизменной и симметрично ее отображается относительно оси Oy ;

III. $y = e^{\frac{1}{2}|x|}$ – растяжение графика функции $y = e^{|x|}$ вдоль оси Ox в два раза;

IV. $y = e^{\frac{1}{2}|x+2|}$ – сдвиг графика функции $y = e^{\frac{1}{2}|x|}$ вдоль оси Ox на две единицы влево;

V. $y = -e^{\frac{1}{2}|x+2|}$ – симметричное отображение всех частей графика функции $y = e^{\frac{1}{2}|x+2|}$ относительно оси Ox ;

VI. $y = \frac{3}{2} - e^{\frac{1}{2}|x+2|}$ – сдвиг графика функции $y = -e^{\frac{1}{2}|x+2|}$ вдоль оси Oy на три единицы вверх;

VII. $y = \left| \frac{3}{2} - e^{\frac{1}{2}|x+2|} \right|$ – симметричное отображение графика функции

$y = \frac{3}{2} - e^{\frac{1}{2}|x+2|}$ при $y < 0$ относительно оси Ox , при $y > 0$ график остается неизменным.

Все графики изображены на рис. 1, причем номер преобразования соответствует номеру графика.

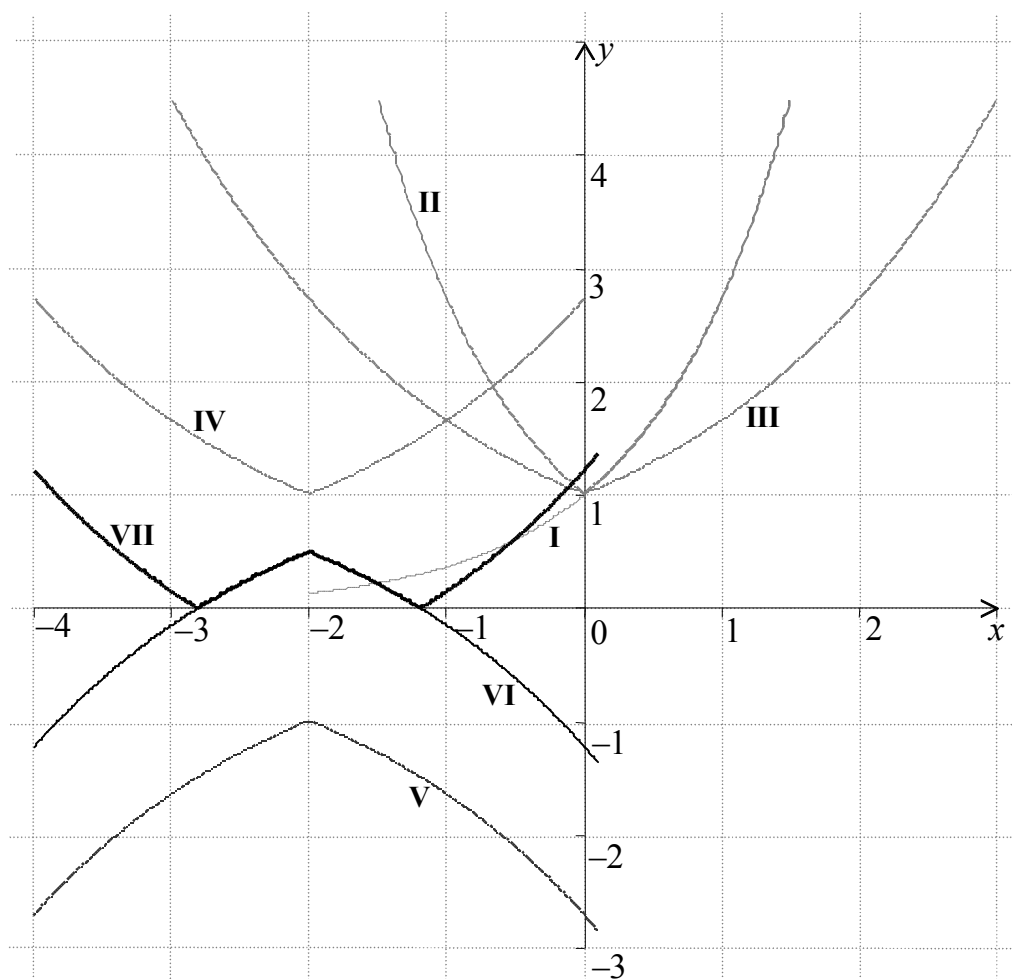


Рис. 1

Задача 1.2. Вычислить предел.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right);$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!};$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right);$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n};$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}};$
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n};$
- 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n};$
- 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{1+2+3+\dots+n} - \frac{2}{3} \right);$
- 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} \right);$
- 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5+4-7+\dots+2n-(2n+3)}{n+3};$
- 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)! - (2n+2)!};$
- 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n-n^2+3};$

- 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+3} - n \right);$ 22) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{2+7+12+\dots+(5n-3)};$
- 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}};$ 23) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{9}{64} + \dots + \frac{1+2^n}{4^n} \right);$
- 15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!};$ 24) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n-1)};$
- 16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)};$ 25) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+5+\dots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right);$
- 17) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}};$ 26) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}};$
- 18) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}};$ 27) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{2^n - 7^{n-1}};$
- 19) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3+\dots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}};$ 28) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!};$
- 20) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{\sqrt{9n^4+1}};$ 29) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9+\dots+3n}{n^2+4};$
- 21) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\dots+(2n-1)};$ 30) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \dots + \frac{2^n+5^n}{10^n} \right).$

Пример 1.2

Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+2)!+(n+3)!}.$

Решение

При непосредственном вычислении данного предела получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty - \infty}{\infty} \right]$. Для раскрытия этой неопределенности преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, вынеся общий множитель за скобки, и сократим дробь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+2)!+(n+1)!} = \left[\frac{\infty - \infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) - (n+1)!}{1 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) + (n+1)!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot (n+2) - (n+1)!}{(n+1)! \cdot (n+2) + (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot (n+2-1)}{(n+1)! \cdot (n+2+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Для раскрытия получившейся неопределенности разделим числитель и знаменатель дроби на n , тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \left[\frac{1+0}{1+0} \right] = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 1.3. Вычислить пределы функций.

а) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- 1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x + x^5};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1};$
- 9) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2};$
- 10) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2};$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1};$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1};$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4};$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4};$
- 15) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12};$
- 16) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2};$
- 17) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18};$
- 18) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1};$
- 19) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1};$
- 20) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$
- 21) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$
- 22) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$
- 23) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x};$
- 24) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1};$

$$25) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2};$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$$

$$27) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4};$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^5};$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}.$$

б) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^3 - 4x^2 + 2}{x^3 + 3x^2 + 2};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 9}{3x^3 + 2};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x - 5};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1}{4x^3 + 2x - 11};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^3 - x^2 - 2}{-2x^3 + 2x};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{3x^3 - x^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 2x + 1}{x^4 + x^3 + 3x - 5};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 3x^2 - 2}{x^3 + 2x};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + 2x + 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 + x + 1}{4x^4 + x^3 + x + 1};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{3x^3 - 1};$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 7}{3x^3 - 21};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 1}{2x^3 + 2x + 1};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + 7}{2x^4 + 3x - 1};$$

$$25) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 7}{3x^3 - 21};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 - x^2 - 3}{x^3 - x - 1};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 4x + 2}{5x^3 + x^2 - 3};$$

$$26) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2x + 1}{x^4 + 2x^2 - 2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^3 - x^2 + x + 1}{3x^3 + x - 6};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x^2 + 6}{2x^3 + x^2 - 1};$$

$$27) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 4x^2 + 9}{2x^3 + 3x^2 + 2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + x + 2}{3x^4 + x^3 + 5x - 3};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2 + 1}{7x^3 + 9x - 1};$$

$$28) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 21};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^3 - 4x^2}{x^3 + 3x - 9};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x^2 + 11}{7x^3 + 13x - 1};$$

$$29) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{4x^3 + x^2 - 21};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^3 - 2x^2 + 3x}{x^4 + 3x^3 + 2x - 6};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x + 1}{x^3 + x + 1};$$

$$30) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 3x + 1}{x^4 + x^3 - 7}.$$

в) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x + 2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x} - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}};$$

- 5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2-9};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3+8};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}};$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2};$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x^2-16}};$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2} - 2}{x+x^2};$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2};$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}};$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}};$
- 15) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}};$
- 16) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2-1};$
- 17) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}};$
- 18) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2-4}};$
- 19) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt[3]{x/4} - 1/2}{\sqrt{1/2+x} - \sqrt{2x}};$
- 20) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{\sqrt[3]{x^3+8}};$
- 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}};$
- 22) $\lim_{x \rightarrow 1/4} \frac{\sqrt[3]{x/16} - 1/4}{\sqrt{1/4+x} - \sqrt{2x}};$
- 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x}};$
- 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}};$
- 25) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4};$
- 26) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}};$
- 27) $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\sqrt[3]{x/9} - 1/3}{\sqrt{1/3+x} - \sqrt{2x}};$
- 28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x};$
- 29) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}};$
- 30) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}.$

г) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2};$

$$\begin{array}{lll}
7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}; & 15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}; & 23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 3x}{4x}; \\
8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + \pi x}; & 16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))}; & 24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}; \\
9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}; & 17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}; & 25) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{7x^2}; \\
10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg}(2\pi(x+1/2))}; & 18) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right); & 26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{2 \sin 2x}; \\
11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}; & 19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x}; & 27) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}; \\
12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)}; & 20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}; & 28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 2x}{x \sin 3x}; \\
13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}; & 21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}; & 29) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}; \\
14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}; & 22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}; & 30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}.
\end{array}$$

д) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

$$\begin{array}{lll}
1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}; & 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x} \right)^x; & 15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4}; \\
2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x}; & 9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x}; & 16) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{3-2x}; \\
3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}; & 10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}; & 17) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x}{5-x} \right)^{1-2x}; \\
4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}; & 11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2-3x}; & 18) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1}; \\
5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}; & 12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{-5x}; & 19) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4}; \\
6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2}; & 13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}; & 20) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{2-3x}; \\
7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-4}{x+1} \right)^{2x-3}; & 24) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{2x+1}; & 21) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x}{-x+2} \right)^{3x};
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
22) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x}; & 25) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2}; & 28) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+4}{3x} \right)^{-2x}; \\
23) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-4}{2x} \right)^{-3x}; & 26) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^{x-5}; & 29) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{3x+2} \right)^{x-2}; \\
24) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2}; & 27) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1}; & 30) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1}.
\end{array}$$

Пример 1.3

Вычислить пределы функций.

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}.$

Решение

При подстановке вместо переменной значения -1 , получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Для раскрытия этой неопределенности разложим числитель и знаменатель

на множители и сократим на общий множитель $(x-1)$, который обращает в нуль и числитель, и знаменатель дроби. Получаем

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x^2(x-1) + (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+1} = \left[\frac{1+2}{1+1} \right] = \frac{3}{2} = 1,5.
\end{aligned}$$

Ответ: 1,5.

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 - x^2 + 2x}{2x^3 + x - 1}.$

Решение

При непосредственном вычислении предела данной функции получим неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Для раскрытия этой неопределенности необходимо разделить

числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 - x^2 + 2x}{2x^3 + x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{9x^3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} =$$

$$= \left[\frac{9-0+0}{2+0-0} \right] = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{3x} - 3}{\sqrt{2x} - \sqrt{x+9}}.$$

Решение

Поскольку имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, а числитель и знаменатель

нельзя разложить на множители, то для раскрытия неопределенности умножим и числитель, и знаменатель дроби на выражения, сопряженные данным. Далее, используя формулы сокращенного умножения, преобразуем получившиеся выражения.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{3x} - 3}{\sqrt{2x} - \sqrt{x+9}} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt[3]{3x} - 3)(\sqrt[3]{3x^2} + 3\sqrt[3]{3x} + 9)(\sqrt{2x} + \sqrt{x+9})}{(\sqrt{2x} - \sqrt{x+9})(\sqrt{2x} + \sqrt{x+9})(\sqrt[3]{3x^2} + 3\sqrt[3]{3x} + 9)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt[3]{3x^3} - 3^3)(\sqrt{2x} + \sqrt{x+9})}{(\sqrt{2x^2} - \sqrt{x+9}^2)(\sqrt[3]{3x^2} + 3\sqrt[3]{3x} + 9)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3(x-9)(\sqrt{2x} + \sqrt{x+9})}{(x-9)(\sqrt[3]{3x^2} + 3\sqrt[3]{3x} + 9)}. \end{aligned}$$

Сократив выражение под знаком предела на общий множитель $(x-9)$, который обращает числитель и знаменатель дроби в нуль, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3(x-9)(\sqrt{2x} + \sqrt{x+9})}{(x-9)(\sqrt[3]{3x^2} + 3\sqrt[3]{3x} + 9)} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3(\sqrt{2x} + \sqrt{x+9})}{(\sqrt[3]{3x^2} + 3\sqrt[3]{3x} + 9)} = \\ &= \left[\frac{3 \cdot 2\sqrt{18}}{9+9+9} \right] = \frac{18\sqrt{2}}{27} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{3x^2}.$$

Решение

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Для раскрытия этой неопределенности преобразуем выражение, находящееся под знаком предела, а затем воспользуемся

формулой первого замечательного предела

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{3x^2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x(1 - \cos^2 2x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cdot \sin^2 2x}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cdot \sin 2x \cdot \sin 2x}{3 \cdot x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 2x}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right) = \\ &= \left[\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \right] = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+1}$.

Решение

При непосредственном вычислении предела получаем неопределенность вида $[1^\infty]$, для раскрытия которой используем формулу второго замечательного предела,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e \quad (1.2)$$

Сначала выделим целую часть, затем приведем выражение под знаком предела к виду (1.2) и вычислим предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1-1-3}{2x+1} \right)^{4x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+1} + \frac{-4}{2x+1} \right)^{4x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-4}{2x+1} \right)^{4x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{-4}{2x+1} \right)^{\frac{2x+1}{-4}} \right]^{\frac{-4}{2x+1} \cdot \frac{4x+1}{1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16x-4}{2x+1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16-\frac{4}{x}}{2+\frac{1}{x}}} = e^{-8}. \end{aligned}$$

Ответ: e^{-8} .

Задача 1.4. Исследовать функцию на непрерывность, определить характер точек разрыва (если они есть) и построить график заданной функции.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ -x+4, & x > 2; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2 + 1, & -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & x > 1; \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x < 2, \\ x^2, & x \geq 2; \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & x \leq -1, \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0, \\ x, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \\ -\frac{x}{\pi}, & x > \pi; \end{cases}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x+2, & x > 3; \end{cases}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1+x, & x > 2; \end{cases}$$

$$9) f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2; \end{cases}$$

$$10) f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x < 1, \\ \log_2 x, & 1 \leq x \leq 2, \\ -x+3, & x > 2; \end{cases}$$

$$11) f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ x+1, & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ x^3 + 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$12) f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ x^2 - 1, & -1 \leq x < 0, \\ e^x, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$13) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x \leq 1, \\ \sqrt{x-1}, & 1 < x \leq 5, \\ 2, & x > 5; \end{cases}$$

$$14) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2; \end{cases}$$

$$15) f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ \ln x, & 1 < x \leq e, \\ x^2 - 2, & x > e; \end{cases}$$

$$16) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2; \end{cases}$$

$$17) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x \leq 2, \\ \frac{1}{x-1}, & 2 < x \leq 3, \\ -x, & x > 3; \end{cases}$$

$$18) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & x > 1; \end{cases}$$

$$19) f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 2+x, & x > 1; \end{cases}$$

$$20) f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0, \\ \ln x, & 0 < x < 1, \\ (x-1)^3, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$21) f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0, \\ e^x, & 0 \leq x < 1, \\ x^2+2, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$22) f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ x+1, & 0 < x \leq 1, \\ -x^3, & x > 1; \end{cases}$$

$$23) f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0, \\ x^2 - x, & 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{x}, & x > 2; \end{cases}$$

$$24) f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x+1, & x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$25) f(x) = \begin{cases} -x+2, & x < 1, \\ 2^x, & 1 \leq x < 2, \\ x^2, & x \geq 2; \end{cases}$$

$$26) f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0, \\ \log_2 x, & 0 < x \leq 1, \\ x-1, & x > 1; \end{cases}$$

$$27) f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ \cos 2x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ x - \frac{\pi}{4}, & x \geq \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$28) f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x \leq -1, \\ -x, & -1 < x < 1, \\ \sqrt{x+3}, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$29) f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+1}, & x \leq 1, \\ (x-1)^2, & 1 < x \leq 2, \\ -2x+1, & x > 2; \end{cases}$$

$$30) f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq -1, \\ x^2-1, & -1 < x < e, \\ \ln x, & x \geq e. \end{cases}$$

Пример 1.4

Исследовать функцию на непрерывность, определить характер точек разрыва (если они есть) и построить ее график:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{x^2}{\pi^2} + 1, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и

$\left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$, где она задана непрерывными элементарными функциями. Следова-

тельно, разрыв возможен только в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

По определению, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, если она определена в этой точке и значение функции в заданной точке совпадает со значением левостороннего и правостороннего пределов функции при x , стремящимся к x_0 , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0). \quad (1.3)$$

Исследуем $f(x)$ на непрерывность по определению в каждой из точек x_1 и x_2 . Исходя из задания функции, следует, что $f(x)$ определена в этих точках.

При $x_1 = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1, \\ f(0) &= 0 + 1 = 1, \end{aligned}$$

таким образом, равенство (1.3) выполняется

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1,$$

следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_1 = 0$.

При $x_2 = \frac{\pi}{2}$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{x^2}{\pi^2} + 1 \right) = \frac{5}{4}, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{4\pi^2} + 1 = \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

таким образом, равенство (1.3) не выполняется, а именно

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0),$$

следовательно, функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x_2 = \frac{\pi}{2}$, а поскольку функцию нельзя переопределить таким образом, чтобы устранить разрыв, и все значе-

ния пределов конечны, то $x_2 = \frac{\pi}{2}$ – неустранимый разрыв первого рода.

График функции $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{x^2}{\pi^2} + 1, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ изображен на рис. 2.

Ответ: функция $f(x)$ непрерывна при

$$x \in \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right),$$

при $x = \frac{\pi}{2}$ функция $f(x)$ имеет неустранимый разрыв первого рода.

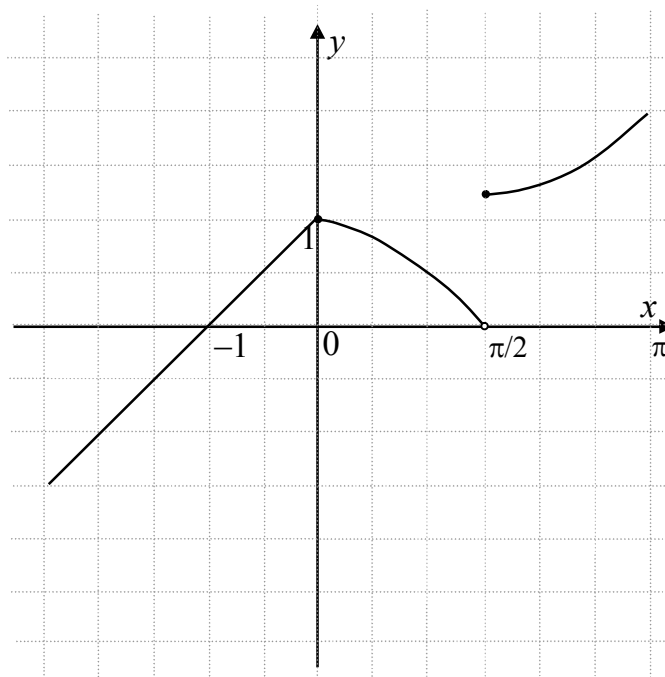


Рис. 2

Раздел II. РЯДЫ

В разделе представлены задачи, которые рассматриваются в теме «Ряды»: нахождение суммы ряда; исследование сходимости знакоположительных и знакопеременных рядов; нахождение области сходимости функциональных рядов, разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена; применение рядов в приближенных вычислениях. Кроме того, раздел содержит задачу с экономическим содержанием, решение которой приводит к понятию ряда и его суммы.

Для решения задач данного раздела необходимо знать и уметь применять признаки сходимости рядов, формулы для вычисления радиуса сходимости функционального ряда, ряды Тейлора и Маклорена. Перед решением задач рекомендуется повторить теоретический материал, рассмотренный на лекциях по данной теме.

Все необходимые при решении задач формулы, материал по применению рядов в экономике и в приближенных вычислениях можно найти в учебной литературе следующих авторов: Н.Ш. Кремер, В.А. Малугин, А.И. Колесников, Д.Т. Письменный, М.С. Красс и Б.П. Чупрынов. Практикумы и задачки В.И. Ермакова, А.П. Рябушко, П.Е. Данко и Н. Ш. Кремера помогут при самостоятельной работе по теме, а также при повторении и обобщении материала для подготовки к экзамену.

Задача 2.1. Записать формулу n -го члена ряда a_n , найти n -ю частичную сумму S_n и сумму S заданного ряда.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\frac{1+2}{6} + \frac{1^2+2^2}{6^2} + \frac{1^3+2^3}{6^3} + \dots;$

8) $\frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{3}{8 \cdot 11} + \dots;$

2) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots;$

9) $\frac{3-1}{6} + \frac{3^2-1^2}{6^2} + \frac{3^3-1^3}{6^3} + \dots;$

3) $\frac{8}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{12}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{16}{3^2 \cdot 5^2} + \dots;$

10) $\frac{2+5}{10} + \frac{2^2+5^2}{10^2} + \frac{2^3+5^3}{10^3} + \dots;$

4) $\frac{6}{5 \cdot 11} + \frac{6}{11 \cdot 17} + \frac{6}{17 \cdot 23} + \dots;$

11) $\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots;$

5) $\frac{3+5}{15} + \frac{3^2+5^2}{15^2} + \frac{3^3+5^3}{15^3} + \dots;$

12) $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots;$

6) $\frac{4^2-2^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{4^3-2^3}{2^3 \cdot 4^3} + \frac{4^4-2^4}{2^4 \cdot 4^4} + \dots;$

13) $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots;$

7) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots;$

14) $\frac{2-1}{4} + \frac{2^2-1^2}{4^2} + \frac{2^3-1^3}{4^3} + \dots;$

- 15) $\frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{4 \cdot 6} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots$;
- 16) $\frac{1+2}{4} + \frac{1^2+2^2}{4^2} + \frac{1^3+2^3}{4^3} + \dots$;
- 17) $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots$;
- 18) $\frac{2+4}{8} + \frac{2^2+4^2}{8^2} + \frac{2^3+4^3}{8^3} + \dots$;
- 19) $\frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{3^2-2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{3^4-2^4}{2^4 \cdot 4^4} + \dots$;
- 20) $\frac{4}{3 \cdot 7} + \frac{4}{7 \cdot 11} + \frac{4}{11 \cdot 15} + \dots$;
- 21) $\frac{15}{1^2 \cdot 4^2} + \frac{21}{2^2 \cdot 5^2} + \frac{27}{3^2 \cdot 6^2} + \dots$;
- 22) $\frac{2+3}{12} + \frac{2^2+3^2}{12^2} + \frac{2^3+3^3}{12^3} + \dots$;
- 23) $\frac{1+3}{9} + \frac{1^2+3^2}{9^2} + \frac{1^3+3^3}{9^3} + \dots$;
- 24) $\frac{12}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{16}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{20}{4^2 \cdot 6^2} + \dots$;
- 25) $\frac{4-2}{2 \cdot 4} + \frac{4^2-2^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{4^4-2^4}{2^4 \cdot 4^4} + \dots$;
- 26) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots$;
- 27) $\frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{5}{9 \cdot 14} + \frac{5}{14 \cdot 19} + \dots$;
- 28) $\frac{3+4}{12} + \frac{3^2+4^2}{12^2} + \frac{3^3+4^3}{12^3} + \dots$;
- 29) $\frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 8} + \dots$;
- 30) $\frac{7}{5 \cdot 12} + \frac{7}{12 \cdot 19} + \frac{7}{19 \cdot 26} + \dots$.

Пример 2.1

Записать формулу n -го члена ряда a_n , найти n -ю частичную сумму S_n и сумму S ряда $\frac{7}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{19}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{37}{3^3 \cdot 4^3} + \dots$.

Решение

Для записи формулы n -го члена заданного ряда необходимо найти зависимость в записи первых трех членов ряда. Для этого представим числитель каждой дроби в виде разности чисел, составляющих множители знаменателя

$$\frac{7}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{19}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{37}{3^3 \cdot 4^3} + \dots = \frac{8-1}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{27-8}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{64-27}{3^3 \cdot 4^3} + \dots$$

Числа в числителях дробей запишем в виде степеней

$$\frac{8-1}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{27-8}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{64-27}{3^3 \cdot 4^3} + \dots = \frac{2^3-1^3}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{3^3-2^3}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{4^3-3^3}{3^3 \cdot 4^3} + \dots,$$

таким образом, общий член ряда имеет вид

$$a_n = \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3 \cdot (n+1)^3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда n -я частичная сумма ряда равна

$$S_n = \frac{2^3 - 1^3}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{3^3 - 2^3}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{4^3 - 3^3}{3^3 \cdot 4^3} + \dots + \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3 \cdot (n+1)^3}.$$

Представим каждое слагаемое в S_n в виде разности двух дробей

$$S_n = \left(\frac{2^3}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{-1^3}{1^3 \cdot 2^3} \right) + \left(\frac{3^3}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{-2^3}{2^3 \cdot 3^3} \right) + \left(\frac{4^3}{3^3 \cdot 4^3} + \frac{-3^3}{3^3 \cdot 4^3} \right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{(n+1)^3}{n^3 \cdot (n+1)^3} + \frac{-n^3}{n^3 \cdot (n+1)^3} \right),$$

упростим получившееся выражение

$$S_n = \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} \right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} \right) + \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \right),$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}.$$

Найдем сумму ряда по определению: $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^3} \right) = 1.$$

Ответ: $a_n = \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3 \cdot (n+1)^3}$, $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$, $S = 1$.

Задача 2.2. Исследовать сходимость знакоположительных рядов.

а) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n}{(2n-1)!};$ | 5) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{(n^2-1)^n};$ | 9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}};$ |
| 2) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{n^2-1};$ | 6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3+1};$ | 10) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7^{-(n+3)}}{n^3+3};$ |
| 3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n^3+4)^n};$ | 7) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5^{-(n+1)}}{n^3-1};$ | 11) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n^2}}{(n^4-1)^n};$ |
| 4) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n^3-1};$ | 8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8^{-n}}{(n^2+4)^n};$ | 12) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-n-1}}{n^3+2};$ |

$$\begin{array}{lll}
13) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^{n+1}}{n^4 + 1}; & 19) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6^{-n}}{n^3 + 4}; & 25) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(3n-1)!}; \\
14) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)^n}{(5n^2 + 3)^n}; & 20) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{(2n-1)!}; & 26) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3 - 1}{n^2 - 1}; \\
15) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{(n^2 + 1)^3}}; & 21) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n^2}{n^4 - 1}; & 27) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n^2}{(n-1)!}; \\
16) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n^3 + 1)^{-1} \cdot n!}; & 22) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\sqrt{n} + 1}{(n^3 + 2n)}; & 28) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 + 12}{12^{n+3}}; \\
17) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5^{-n}}{n^3 - 5}; & 23) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{2^{n+1}}; & 29) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n^3 + 1}; \\
18) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5n^3}{(n-1)!}; & 24) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n!}{(3n-1)!}; & 30) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^n}{(n-1)^n}.
\end{array}$$

б) Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

$$\begin{array}{lll}
1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2 + 3}; & 9) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 3}}; & 17) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-5n-1}{n^2 + 2n^3}; \\
2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n} + 12n^3 + 11}; & 10) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{n^2 + 4\sqrt{n^7}}; & 18) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt[4]{n}-1}{\sqrt[4]{n^3} + 6n}; \\
3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n}{n^3 + 5}; & 11) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6n}{n^2 + 3n + 4}; & 19) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{n^3 + 15n}; \\
4) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2 + 5n + 7}; & 12) \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{5n}{n^4 - 36}; & 20) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6(n-1)}{n^3 + 6n + 15}; \\
5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n^2}{n^5 + 2n^3}; & 13) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n^5 - n^2}{n^2 - 1}; & 21) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\sqrt{n^5} + 2}{n^2 + 3n + 5}; \\
6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+5}{n^2 + 5n}; & 14) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^4}{n^3 + 4}; & 22) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n-3}{n^2 + 3n^4}; \\
7) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n - n^4}{n^2 + 3n + 3}; & 15) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n}{\sqrt[3]{n^2} + 5\sqrt[3]{n} + 4}; & 23) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3n^2 - 2}{n^3 - 8}; \\
8) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 6n + 10}; & 16) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2n}{n^3 + 7n + 6}; & 24) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{n^2 + 3\sqrt{n^5} + 4};
\end{array}$$

$$25) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+12}{n^5+7n};$$

$$27) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-5n^4}{n^2+1};$$

$$29) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^4+3\sqrt{n}}{n^2+6n^3+7};$$

$$26) \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{4n}{n^2-5n+4};$$

$$28) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n-3}{n^2+9};$$

$$30) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n+4}{4n^3+3}.$$

Пример 2.2

Исследовать сходимость знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n}{\sqrt{n^5+5}}.$

Решение

Применим признак сравнения сходимости ряда в предельной форме. Запишем ряд, с которым будем сравнивать и поведение которого известно:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^{5/2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Данный ряд сходится, т.к. обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha > 1$ сходится.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n}{\sqrt{n^5+5}} : \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^5+5}} = 5 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^5}{n^5+5}} = 5.$$

Предел отношения n -го члена исходного ряда к n -му члену найденного ряда равен числу, отличному от нуля, следовательно, ряды ведут себя одинаково. По-

скольку $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то и $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n}{\sqrt{n^5+5}}$ сходится.

Ответ: ряд сходится.

Задача 2.3. Исследовать сходимость ряда.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1};$$

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+1) \cdot (n+2)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{4n^2+1};$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(4n+2)^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^n}{n^2+5n+6};$$

$$8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-4}}{(4n^2+1) \cdot n!};$$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{n^4+2};$$

$$6) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2-1)^n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cdot (-1)^{-n-6}}{n^2+4};$$

- | | | |
|--|---|---|
| 10) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - 1};$ | 17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{n^2 + 4n + 5};$ | 24) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1};$ |
| 11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n}}{(n+1)^3};$ | 18) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n}}{(n+8)n!};$ | 25) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n-3}}{\sqrt[3]{n^2 + 9}};$ |
| 12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 1};$ | 19) $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 - 4n + 3};$ | 26) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n}}{(2n+1)!};$ |
| 13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(n^2 + 4) \cdot 3^n};$ | 20) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{n^2 - 4};$ | 27) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n-2}}{\sqrt{n^3 + 16}};$ |
| 14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n}{n^2 + 1};$ | 21) $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - 5n + 4};$ | 28) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n+1}}{4n^2 + 1};$ |
| 15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1};$ | 22) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{(n+1)!};$ | 29) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n} \cdot n!}{n^2 + 4n + 3};$ |
| 16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 14n + 13};$ | 23) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-n-1}}{n^2 + 4};$ | 30) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-5)^n}{(n^2 + 1)^n}.$ |

Пример 2.3

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+4}{3n-7} \right)^{-n^2}.$

Решение

Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей членов данного ряда

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{3n+4}{3n-7} \right)^{-n^2} \right| = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-7} \right)^{-n^2}.$$

Применим радикальный признак Коши сходимости знакоположительных рядов.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+4}{3n-7} \right)^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-7} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{11}{3n-7} \right)^{\frac{3n-7}{11}} \right]^{\frac{-11n}{3n-7}} = e^{-\frac{11}{3}}.$$

Поскольку $e^{-\frac{11}{3}} < 1$, то ряд $\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-7} \right)^{-n^2}$ сходится, следовательно, исход-

ный ряд сходится абсолютно.

Ответ: ряд сходится абсолютно.

Задача 2.4. Найти область сходимости степенного ряда.**Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:**

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{(2n-1)!};$ | 11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2-1)^n}{(2n-1)};$ | 21) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^{-n}}{(5n-4)};$ |
| 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{(2n+1)};$ | 12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-8)^n}{(3n-1)};$ | 22) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+4)^{-n}}{(3n-7)};$ |
| 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{(n^2-1)};$ | 13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^n}{(2n+1)};$ | 23) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(4n-1)};$ |
| 4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x+1)^n}{(2n+1)};$ | 14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+81)^n}{(3n-1)!};$ | 24) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^{-n}}{(2n-3)};$ |
| 5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{(4n-1)!};$ | 15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-7)^n}{(4n-1)};$ | 25) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)};$ |
| 6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^n}{(3n-4)!};$ | 16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-6)^n}{(2n-5)};$ | 26) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^{-n}}{(2n-1)};$ |
| 7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-8)^n}{(3n+1)};$ | 17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+7)^n}{(3n-1)};$ | 27) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-7)^n}{(2n-3)};$ |
| 8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{(4n+1)};$ | 18) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x+2)^n}{(2n-5)};$ | 28) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{n-2}}{(3n-4)};$ |
| 9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-7)^n}{(2n-1)};$ | 19) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x+1)^n}{(5n-7)};$ | 29) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{n-2}}{(2n-5)};$ |
| 10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{(4n-1)};$ | 20) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n+1)!};$ | 30) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-9)^n}{(2n-3)}.$ |

Пример 2.4**Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n} (x-1)^n$.***Решение*

Для нахождения интервала сходимости данного ряда применим признак Даламбера. Ряд сходится абсолютно, если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$. Поэтому найдем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)} : \frac{(-1)^n (x-1)^n}{3^n \cdot n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-1) \cdot n}{3 \cdot (n+1)} \right|,$$

вынесем за знак предела множитель $|x-1|$, как не зависящий от n , и вычислим предел, используя правило Лопитала

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-1) \cdot n}{3 \cdot (n+1)} \right| = |x-1| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3n+3} = \frac{|x-1|}{3}.$$

Решим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|x-1|}{3} < 1 &\Rightarrow |x-1| < 3, \\ -3 < x-1 < 3, \\ -2 < x < 4. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд сходится при $-2 < x < 4$, т.е. на интервале $(-2; 4)$.

Исследуем сходимость ряда на концах данного интервала.

При $x = -2$ ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n} (-2-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-3)^n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n} 3^n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Полученный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ является гармоническим расходящимся, т.е. при $x = -2$

исходный ряд расходится.

При $x = 4$ ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n} (4-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин членного данного ряда, рас-

ходится, т.е. абсолютной сходимости нет. Для исследования условной сходимости проверим условия признака Лейбница

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots; \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Таким образом, при $x = 4$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n} (x-1)^n$ сходится условно, область сходимости данного ряда $x \in (-2; 4]$.

Ответ: ряд сходится при $x \in (-2; 4]$.

Задача 2.5. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = f(x)$, указав область сходимости полученного ряда.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $y = \cos 2x + \sin 2x$; | 11) $y = x(1 - e^{2x})$; | 21) $y = (1 + e^{-x})^2$; |
| 2) $y = \ln(1 + 5x)$; | 12) $y = \cos(2x)$; | 22) $y = \cos^2 x$; |
| 3) $y = x \cdot \sin x$; | 13) $y = \ln(1 - 3x)$; | 23) $y = x(1 - \cos x)$; |
| 4) $y = (1 + 3x)^{-1}$; | 14) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3}\right)$; | 24) $y = x(1 - x^2)^{-1}$; |
| 5) $y = x \cdot \sin 2x$; | 15) $y = \sin(\pi - 4x)$; | 25) $y = \frac{\sin 3x}{x}$; |
| 6) $y = \frac{e^{-2x}}{x}$; | 16) $y = (1 + 3x)^{-1}$; | 26) $y = \ln(e^2 - ex)$; |
| 7) $y = x^2 \cdot \cos(-x)$; | 17) $y = \ln(e + ex)$; | 27) $y = x^{-1} \cdot \sin(1,5\pi + x)$; |
| 8) $y = \cos x^2$; | 18) $y = (x + 1) \cdot e^{-3x}$; | 28) $y = \sin \frac{x}{3}$; |
| 9) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$; | 19) $y = \sin^2 x$; | 29) $y = 2 \sin x \cos x$; |
| 10) $y = \frac{\cos 3x - 1}{x}$; | 20) $y = \frac{\ln(1-x)}{x}$; | 30) $y = (1 + 3x)^{-1}$. |

Пример 2.5

Разложить в ряд Маклорена функцию $y = \sqrt{1 + x^2}$, указав область сходимости полученного ряда.

Решение

Для решения задачи используем готовое разложение в ряд функции $y = (1 + x)^m$ (биномиальный ряд)

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots,$$

где $x \in (-1; 1)$.

Исходя из условия задачи, в разложение подставляем x^2 вместо x и $m = 0,5$

$$(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(x^2)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(x^2)^3 + \dots,$$

упростим

$$(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^4 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^6 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^6 - \dots + \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^{2n} + \dots,$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^{2n}$$

Поскольку биномиальный ряд сходится при $x \in (-1; 1)$, то для того, чтобы найти область сходимости полученного ряда, нужно решить неравенство

$$-1 < x^2 < 1,$$

откуда

$$-1 < x < 1.$$

Ответ: $\sqrt{1+x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^{2n}$, при $x \in (-1; 1)$.

Задача 2.6. Найти первые шесть членов разложения функции $y = f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- | | |
|--|---|
| 1) $f(x) = x^5 + x^3 + x$, $x_0 = 1$; | 14) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$, $x_0 = 2$; |
| 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$; | 15) $f(x) = (x-1)e^x$, $x_0 = 1$; |
| 3) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$; | 16) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$; |
| 4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; | 17) $f(x) = (2x+3)^4$, $x_0 = 1$; |
| 5) $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$; | 18) $f(x) = -\cos x$, $x_0 = \pi$; |
| 6) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = -1$; | 19) $f(x) = \sin(\pi + 2x)$, $x_0 = -\pi$; |
| 7) $f(x) = 2x^4 + x^2 + 1$, $x_0 = 2$; | 20) $f(x) = \ln(-x)$, $x_0 = -e$; |
| 8) $f(x) = \cos \frac{\pi x}{4}$, $x_0 = 2$; | 21) $f(x) = e^{x-1}$, $x_0 = -1$; |
| 9) $f(x) = \sin(-x)$, $x_0 = \pi$; | 22) $f(x) = \ln(-2x)$, $x_0 = -0,5$; |
| 10) $f(x) = \ln 2x$, $x_0 = 0,5$; | 23) $f(x) = x^5 - (x+1)^3 + x$, $x_0 = -2$; |
| 11) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = -2$; | 24) $f(x) = 1 + \cos x$, $x_0 = -\pi$; |
| 12) $f(x) = e^{3x}$, $x_0 = -2$; | 25) $f(x) = \ln 3x$, $x_0 = \frac{1}{3}$; |
| 13) $f(x) = (x-2)^5 - 2x^3 + 3$, $x_0 = -1$; | 26) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$, $x_0 = -1$; |

$$\begin{array}{ll}
27) f(x) = \cos(\pi - x), & x_0 = \frac{3\pi}{2}; \\
28) f(x) = 2 \ln(-ex), & x_0 = -1; \\
29) f(x) = (x+1)e^{-x}, & x_0 = -1; \\
30) f(x) = \sin 3x, & x_0 = -\frac{\pi}{2}.
\end{array}$$

Пример 2.6

Найти первые шесть членов разложения функции $f(x) = \cos^2 x$ в ряд Тейлора по степеням $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, записать ряд с помощью символа суммы.

Решение

Запишем ряд Тейлора в общем виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Найдем значение функции $f(x) = \cos^2 x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$, ее производные до пятого порядка и их значения в этой же точке

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \cos^2 x, & f(x_0) = 0, \\
f'(x) = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x, & f'(x) = 0, \\
f''(x) = -2 \cos 2x, & f''(x) = 2, \\
f'''(x) = 2^2 \sin 2x, & f'''(x) = 0, \\
f^{(4)}(x) = 2^3 \cos 2x, & f^{(4)}(x) = -2^3, \\
f^{(5)}(x) = -2^4 \sin 2x, \dots & f^{(5)}(x) = 0 \dots
\end{array}$$

Подставим эти данные в формулу ряда Тейлора

$$\cos^2 x = 0 + 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{2!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{0}{3!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{2^3}{4!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5 + \dots$$

Упростим полученное выражение и укажем формулу n -го члена ряда на основе зависимости, определенной в записи первых членов ряда

$$\cos^2 x = \frac{2}{2!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{2^3}{4!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n} + \dots$$

Запишем ряд с помощью символа суммы

$$\cos^2 x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}.$$

$$\text{Ответ: } \cos^2 x = 0 + 0 + \frac{2}{2!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 0 - \frac{2^3}{4!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + 0 + \dots$$

Задача 2.7. Вычислить указанную величину приближенно с заданной степенью точности δ , воспользовавшись разложением в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}}$, $\delta = 0,01$; | 11) $-\ln 3$, $\delta = 0,001$; | 21) $\sin 0,5$, $\delta = 0,001$; |
| 2) $\ln \frac{3}{2}$, $\delta = 0,001$; | 12) $\sin 2$, $\delta = 0,0001$; | 22) $\frac{1}{\sqrt{4e}}$, $\delta = 0,001$; |
| 3) $\sin(-1)$, $\delta = 0,0001$; | 13) $\frac{2}{\sqrt[3]{e^2}}$, $\delta = 0,01$; | 23) $\ln 10$, $\delta = 0,0001$; |
| 4) $\ln 5$, $\delta = 0,01$; | 14) $\sqrt[3]{-30}$, $\delta = 0,0001$; | 24) $\cos 2$, $\delta = 0,0001$; |
| 5) $\sqrt{5}$, $\delta = 0,001$; | 15) $\sin 1$, $\delta = 0,01$; | 25) $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$, $\delta = 0,0001$; |
| 6) $\cos 3$, $\delta = 0,001$; | 16) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $\delta = 0,001$; | 26) $\sqrt[3]{130}$, $\delta = 0,0001$; |
| 7) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$, $\delta = 0,0001$; | 17) $\sin 3$, $\delta = 0,001$; | 27) $\ln \frac{3}{4}$, $\delta = 0,01$; |
| 8) $\sqrt[3]{66}$, $\delta = 0,0001$; | 18) $\ln 7$, $\delta = 0,001$; | 28) $\ln 9$, $\delta = 0,001$; |
| 9) $\ln \frac{1}{4}$, $\delta = 0,001$; | 19) $\ln \frac{1}{3}$, $\delta = 0,001$; | 29) $\sqrt[4]{84}$, $\delta = 0,0001$; |
| 10) $\sqrt[4]{17}$, $\delta = 0,0001$; | 20) $\sqrt{15}$, $\delta = 0,001$; | 30) $\frac{-1}{\sqrt[3]{8e}}$, $\delta = 0,001$. |

Пример 2.7

Вычислить приближенно $\sqrt[5]{-34}$ с заданной степенью точности $\delta = 0,00001$, воспользовавшись разложением в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции.

Решение

Для вычисления значения данного выражения представим $\sqrt[5]{-34}$ в виде

$$\sqrt[5]{-34} = -\sqrt[5]{32+2} = -\sqrt[5]{32 \cdot \left(1 + \frac{2}{32}\right)} = -2 \left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}}$$

и запишем биномиальный ряд при $x = \frac{1}{16}$ и $m = \frac{1}{5}$ (после проведенного преобразования $x = \frac{1}{16}$ входит в область сходимости $(-1;1)$ ряда)

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{-34} &= -2 \cdot \left(1 + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5} - 1\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{5} - 2\right) + \dots \right) = \\ &= -2 - 0,025 + 0,000625 - 0,000023 + 0,000001 - \dots \end{aligned}$$

Для сходящегося знакочередующегося ряда погрешность при приближенном вычислении его суммы по абсолютной величине не превосходит модуля первого отброшенного члена (следствие из признака Лейбница).

Для обеспечения данной в условии точности расчета достаточно взять четыре члена, т.к. при этом погрешность $|r_n| \leq 0,000001 < 0,00001$.

$$\text{Итак, } \sqrt[5]{-34} \approx -2 - 0,025 + 0,000625 - 0,000023 = -2,024398$$

$$\text{Ответ: } \sqrt[5]{-34} \approx -2,024398.$$

Замечание. При вычислении приближенных значений натурального логарифма значение $\ln 2 \approx 0,693147$ принимается как известное.

Задача 2.8. Вкладчик открывает в банке вклад. Ежегодно (в начале каждого года) в течение t лет он будет делать взносы в размере $S = S_0$ ден.ед. Какую сумму получит вкладчик по прошествии этих t лет, если процентная ставка составляет $N\%$ годовых?

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 1 по 15:

- 1) $t = 5, S_0 = 100, N = 7;$
- 2) $t = 6, S_0 = 500, N = 8;$
- 3) $t = 9, S_0 = 650, N = 6;$
- 4) $t = 6, S_0 = 750, N = 9;$
- 5) $t = 7, S_0 = 100, N = 5;$
- 6) $t = 8, S_0 = 250, N = 6;$
- 7) $t = 9, S_0 = 600, N = 9;$
- 8) $t = 7, S_0 = 200, N = 8;$
- 9) $t = 8, S_0 = 700, N = 7;$
- 10) $t = 6, S_0 = 550, N = 5;$
- 11) $t = 5, S_0 = 500, N = 6;$
- 12) $t = 5, S_0 = 700, N = 8;$
- 13) $t = 8, S_0 = 450, N = 5;$
- 14) $t = 5, S_0 = 800, N = 7;$
- 15) $t = 4, S_0 = 1000, N = 8.$

Руководство фирмы считает, что через t лет для замены части оборудования потребуется сумма S ден.ед. Для получения этих средств решено открыть банковский вклад. Каковы должны быть ежемесячные платежи по-

полнения вклада (в начале каждого месяца), если процентная ставка составляет $N\%$ годовых, начисляемых ежемесячно?

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 16 по 30:

- 16) $t = 6$, $S = 52\,000$, $N = 8$;
- 17) $t = 6$, $S = 50\,500$, $N = 5$;
- 18) $t = 5$, $S = 80\,000$, $N = 7$;
- 19) $t = 7$, $S = 20\,000$, $N = 8$;
- 20) $t = 4$, $S = 10\,000$, $N = 8$;
- 21) $t = 5$, $S = 7\,000$, $N = 8$;
- 22) $t = 8$, $S = 32\,000$, $N = 7$;
- 23) $t = 5$, $S = 41\,000$, $N = 7$;
- 24) $t = 8$, $S = 45\,000$, $N = 5$;
- 25) $t = 6$, $S = 17\,500$, $N = 9$;
- 26) $t = 5$, $S = 50\,000$, $N = 6$;
- 27) $t = 9$, $S_0 = 26\,000$, $N = 9$;
- 28) $t = 9$, $S = 16\,500$, $N = 6$;
- 29) $t = 6$, $S_0 = 7\,500$, $N = 9$;
- 30) $t = 7$, $S_0 = 23\,000$, $N = 5$.

Пример 2.8

Руководство фирмы считает, что через 7 лет для замены части оборудования потребуется сумма 15 000 ден.ед. Для получения этих средств решено открыть банковский вклад. Каковы должны быть ежемесячные платежи по пополнению вклада (в начале каждого месяца), если процентная ставка составляет 6% годовых, начисляемых ежемесячно?

Решение

По условию задачи, проценты по вкладу начисляются ежемесячно, т.е. процентная ставка составляет $r = \frac{6}{12}\% = 0,5\%$. В течение семи лет необходимо будет сделать $n = 7 \cdot 12 = 84$ платежа. Конечная сумма S должна составлять 15 000 ден. ед., которая складывается из всех платежей и сложных процентов, начисляемых на эти платежи.

Пусть S_0 – сумма ежемесячного платежа. Тогда, 84-й платеж приносит

$$S_0 \cdot (1 + 0,005) \text{ ден.ед.,}$$

83-й платеж дает

$$S_0 \cdot (1 + 0,005)^2 \text{ ден.ед.,}$$

в результате 82-го платежа имеем

$$S_0 \cdot (1 + 0,005)^3 \text{ ден.ед.}$$

Аналогично получаем проценты, «набегающие» от каждого платежа

$$S_0 \cdot (1 + 0,005)^{84-(n-1)} \text{ ден. ед.,}$$

где $n = \overline{1;84}$.

Очевидно, что чем раньше сделан платеж, тем больший вклад в общую сумму накоплений он дает. Сделав первый платеж, получим

$$S_0 \cdot (1 + 0,005)^{84} \text{ ден.ед.}$$

Тогда окончательную сумму S можно записать в виде ряда

$$S = S_0 \cdot (1 + 0,005) + S_0 \cdot (1 + 0,005)^2 + S_0 \cdot (1 + 0,005)^3 + \dots + S_0 \cdot (1 + 0,005)^{84}$$

или

$$S = S_0 \sum_{n=1}^{84} (1 + 0,005)^n.$$

Найдем S , используя формулу суммы n членов геометрической прогрессии

$$S = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}, \quad (1.1)$$

где a_1 – первый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии.

В нашем примере $a_1 = (1 + 0,005)$, $q = (1 + 0,005)$. Подставляем эти значения в формулу (1.1)

$$S = S_0 \cdot \frac{(1 + 0,005) \left((1 + 0,005)^{84} - 1 \right)}{(1 + 0,005) - 1},$$

$$S = S_0 \cdot \frac{1,005 (1,005^{84} - 1)}{0,005},$$

откуда выражаем S_0

$$S_0 = \frac{0,005 \cdot 15\,000}{1,005 (1,005^{84} - 1)}.$$

С помощью калькулятора находим размер платежей

$$S_0 = 143,42 \text{ ден.ед.}$$

Ответ: ежемесячные платежи пополнения вклада должны быть равны 143,42 ден.ед.

ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ)

Факультет математики, механики и компьютерных наук

Кафедра _____

Семестровая работа № 2 (Часть _____) по курсу

«Математика»

Выполнил(а): студент(ка) гр. _____
группа

ФИО

Вариант № _____

Проверил(а): _____
Должность

ФИО

Регистрационные данные:

Дата _____ Дата _____ Дата _____

Челябинск

20 _____

Приложение 2

Результаты проверки семестровой работы студента(ки) гр. _____

Номер задачи	Проверка 1	Проверка 2	Проверка 3
Итог			
Дата			
Подпись преподавателя			