

Министерство образования и науки Российской Федерации
Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Кафедра высшей математики

**Функции многих переменных.
Неопределённый и определённый интегралы.
Кратные и криволинейные интегралы.**

Варианты контрольных работ № 3 и 4
для студентов бакалавриата I курса заочного отделения
направлений подготовки: 080200 – Менеджмент, 270800 – Строительство.

Казань
2013

УДК 512

Функции многих переменных. Неопределённый и определённый интегралы. Кратные и криволинейные интегралы. Варианты контрольных работ № 3 и 4 для студентов бакалавриата I курса заочного отделения направлений подготовки: 080200 – Менеджмент, 270800 – Строительство. / Сост.: В.П. Деревенский, А.Г. Лабуткин, Р.Р. Шарипов. – Казань: КГАСУ, 2013. – **20** с.

©Казанский государственный
архитектурно-строительный
университет, 2013

Контрольная работа № 3.

Функции многих переменных.

Состав контрольной работы

В контрольную работу входит три задания. 1-е задание относится к теме “Частные производные”. 2-е задание посвящено нахождению градиента функции в заданной точке. В 3-м задании необходимо найти производную по направлению. Определение варианта: *ваш вариант N совпадает с двумя последними цифрами номера зачётной книжки.*

Таблица вариантов

<i>N</i>	Номера			<i>N</i>	Номера			<i>N</i>	Номера			<i>N</i>	Номера		
00	1	43	73	25	16	30	62	50	10	43	76	75	12	39	68
01	9	30	82	26	10	48	84	51	5	50	80	76	2	32	75
02	18	52	59	27	4	41	72	52	7	44	67	77	8	46	80
03	2	48	67	28	23	36	61	53	15	50	67	78	9	28	58
04	14	43	57	29	12	39	79	54	9	28	58	79	16	53	59
05	19	31	65	30	20	37	55	55	12	53	82	80	15	49	64
06	21	50	69	31	22	32	54	56	6	46	66	81	21	43	57
07	11	34	60	32	14	42	67	57	25	47	61	82	15	26	72
08	12	29	63	33	15	42	78	58	19	40	78	83	19	28	67
09	21	27	62	34	21	33	71	59	23	34	84	84	4	46	72
10	16	27	84	35	16	29	71	60	3	47	83	85	13	53	60
11	5	35	85	36	17	39	55	61	23	28	76	86	20	36	84
12	8	32	60	37	4	42	69	62	7	53	70	87	5	28	83
13	14	46	75	38	11	36	74	63	12	53	69	88	2	39	84
14	25	28	79	39	22	30	63	64	13	51	66	89	17	49	71
15	19	29	81	40	16	51	65	65	4	46	61	90	21	39	81
16	14	45	68	41	5	45	56	66	14	41	68	91	23	37	76
17	15	42	84	42	18	48	57	67	11	31	66	92	6	53	68
18	3	32	59	43	3	35	55	68	4	50	75	93	6	51	63
19	18	33	84	44	5	48	83	69	1	33	65	94	1	28	59
20	15	34	65	45	19	37	56	70	16	49	58	95	13	49	69
21	11	48	60	46	3	49	78	71	7	28	78	96	7	44	72
22	7	27	59	47	7	36	57	72	5	53	79	97	22	35	65
23	14	45	76	48	21	31	75	73	17	27	59	98	12	52	81
24	11	27	67	49	10	51	61	74	14	46	69	99	7	41	79

Задание 3.1

Дана функция $z = f(x, y)$. Показать, что

$$F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) = 0.$$

Номера к заданию 3.1

1. $z = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}; F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
2. $z = y e^{\frac{x^2}{2y^2}}; F = (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} - xyz.$
3. $z = 2 \cos^2(x - \frac{y}{2}); F = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$
4. $z = e^{\frac{x}{y}}; F = y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}.$
5. $z = \frac{x^2 y^2}{x + y}; F = x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial x}.$
6. $z = \sin(x - 2y) + \cos(x + 2y); F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$
7. $z = e^{xy}; F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz.$
8. $z = \ln(x^2 + y^2); F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
9. $z = \sin(x - 3y) + \ln(x + 3y); F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$
10. $z = x(x + y) + y \cos(x + y); F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
11. $z = \ln(x + e^{-y}); F = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$
12. $z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}; F = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - zy^2.$
13. $z = \sin(x + ay); F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

Номера к заданию 3.1 (продолжение)

14. $z = \frac{y^2}{3x} + xy; F = x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2.$

15. $z = \frac{x}{y}; F = y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}.$

16. $z = \frac{xy}{x-y}; F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{2}{x-y}.$

17. $z = x - 3y + \operatorname{tg}(x + 3y); F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

18. $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy); F = x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2.$

19. $z = \frac{x}{y}; F = x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}.$

20. $z = x \ln(x+y) + xy + y^2; F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

21. $z = x e^{\frac{y}{x}}; F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

22. $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1); F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

23. $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}; F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

24. $z = \cos y + (y-x) \sin y; F = (x-y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}.$

25. $z = x^y; F = y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x}.$

Задание 3.2

Дана функция $z = f(x, y)$ и точка $A(x_0; y_0)$. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке A .

Номера к заданию 3.2

26. $z = 4x^2 + 3xy; A(2; 3).$

27. $z = 2x^4 + x^2y^3; A(2; -1).$

28. $z = \ln(3x^2 + 4y^2); A(1; 3).$

29. $z = \ln(5x^2 + 3y^2); A(1; 1).$

Номера к заданию 3.2 (продолжение)

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 30. $z = x^3 + xy^2; A(1; 2).$ | 31. $z = 3x^2y^2 + 5xy^2; A(1; 1).$ |
| 32. $z = 2x^2 + 4xy; A(3; 2).$ | 33. $z = \ln(5x^2 + 4y^2); A(1; 1).$ |
| 34. $z = e^{x^2+y^2} + 2x; A(1; 2).$ | 35. $z = 3x^4 + 2x^2y^3; A(-1; 2).$ |
| 36. $z = \arcsin(x^2/y); A(-1; 2).$ | 37. $z = \ln(3x^2 + 2y^2); A(1; 2).$ |
| 38. $z = \ln(2x^2 + 3y^2); A(2; 1).$ | 39. $z = 2x^2y^2 + 4xy^2; A(2; 2).$ |
| 40. $z = 3x^2 + 5xy; A(2; 1).$ | 41. $z = \arcsin(x^2/y); A(1; 2).$ |
| 42. $z = 2x^2 + 3xy + y^2; A(2; 1).$ | 43. $z = \ln(x^2 + 2y^2); A(-2; 1).$ |
| 44. $z = \ln(3x^2 + y^2); A(1; 2).$ | 45. $z = 3xy^2 + 2x^2y; A(2; 1).$ |
| 46. $z = \operatorname{arctg}(xy^2); A(2; 3).$ | 47. $z = 2x^2 + xy + y^2; A(2; 2).$ |
| 48. $z = x^2 + 2xy + 2y^2; A(3; 2).$ | 49. $z = 3x^3 + x^2y^3; A(2; 3).$ |
| 50. $z = \operatorname{arctg}(x^2y); A(1; 2).$ | 51. $z = e^{x+5y^2} + 2x; A(1; 0).$ |
| 52. $z = x^2 + xy + y^2; A(1; 1).$ | 53. $z = 5x^2 + 6xy; A(2; 1).$ |

Задание 3.3

Дана функция $z = f(x, y)$ и вектор $\bar{a} = (a_1; a_2)$. Найти производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$.

Номера к заданию 3.3

54. $z = \ln(x^2 + 2y^2) + e^x; A(0; 1); \bar{a} = (0; 2).$
55. $z = x^4 + x^2y^3 - \ln x; A(1; -1); \bar{a} = (3; -2).$
56. $z = x^4 + 2x^2y^3 - \ln y; A(1; 2); \bar{a} = (4; -3).$
57. $z = x^2y^2 + 4xy^2 + \ln x; A(3; 1); \bar{a} = (3; 2).$
58. $z = x^2 + xy + y^2 - 21; A(4; 1); \bar{a} = (2; 1).$
59. $z = x^2y^2 + 5xy^2 - \ln x; A(2; 2); \bar{a} = (2; 1).$
60. $z = x^2 + 4xy + 2x - \ln x; A(4; -1); \bar{a} = (1; 3).$
61. $z = x^3 + x^2y^3 + 5 \ln x; A(3; -1); \bar{a} = (1; 2).$
62. $z = \arcsin(x^2) + 2y; A(0; 1); \bar{a} = (3; -8).$
63. $z = \ln(x^2 + 4y^2) - 2x; A(-1; 2); \bar{a} = (2; -1).$
64. $z = \frac{x^2}{y} + 6y; A(1; -3); \bar{a} = (5; 2).$

Номера к заданию 3.3 (продолжение)

65. $z = \ln(x^2 + 3y^2) + x$; $A(1; 1)$; $\bar{a} = (-1; 2)$.
66. $z = \ln(x^2 + 3y^2) - 4x$; $A(1; 2)$; $\bar{a} = (3; 2)$.
67. $z = x^2 + 3xy - \ln x$; $A(1; 3)$; $\bar{a} = (4; 2)$.
68. $z = \ln(x^2 + y^2) + 5x$; $A(1; 0)$; $\bar{a} = (3; 1)$.
69. $z = \arcsin(y) + x^2 + y^2$; $A(2; 0)$; $\bar{a} = (5; -1)$.
70. $z = x^2 + 3xy + y^2 + \ln y$; $A(3; 1)$; $\bar{a} = (3; -4)$.
71. $z = \ln(x^2 + 4y^2) + 8y - 1$; $A(-1; 2)$; $\bar{a} = (2; -1)$.
72. $z = x^2 + 2xy + \ln y + 1$; $A(1; 1)$; $\bar{a} = (3; -2)$.
73. $z = \operatorname{arctg}(x) - 8x + 3y$; $A(1; 0)$; $\bar{a} = (4; -3)$.
74. $z = 1 + 2x^2y - 3\ln(y)$; $A(1; 2)$; $\bar{a} = (3; 2)$.
75. $z = \frac{x^2}{y} + 2^x - 1$; $A(1; 1)$; $\bar{a} = (0; 3)$.
76. $z = x^2 + xy + 3y - 1$; $A(-3; -1)$; $\bar{a} = (1; -2)$.
77. $z = x^3 + xy - \ln y - 4$; $A(-1; 1)$; $\bar{a} = (1; 2)$.
78. $z = e^y + \frac{5y}{x^2} + 1$; $A(1; 2)$; $\bar{a} = (-3; 0)$.
79. $z = \ln(x^2 + y^2) + y - 2$; $A(0; 1)$; $\bar{a} = (3; -1)$.
80. $z = x + 3xy + y \cdot \ln x + 3$; $A(2; 1)$; $\bar{a} = (1; -4)$.
81. $z = x \cdot \arcsin(y) + x^2 - 1$; $A(4; 0)$; $\bar{a} = (3; 0)$.
82. $z = \ln(x) - xy - 4y^2 + 2$; $A(1; -1)$; $\bar{a} = (1; 0)$.
83. $z = x \cdot \operatorname{arctg}(y^2) - 8^x$; $A(5; 1)$; $\bar{a} = (0; -3)$.
84. $z = \arcsin(x^2) + 2x + y^2 + 1$; $A(0; 0)$; $\bar{a} = (0; -2)$.
85. $z = \operatorname{arcctg}(x^2) + 3yx$; $A(1; 1)$; $\bar{a} = (4; -3)$.

Контрольная работа № 4.

Неопределённые, определённые, кратные и криволинейные интегралы.

Определение варианта: *ваш вариант N совпадает с двумя последними цифрами номера зачётной книжки.*

Таблица вариантов

<i>N</i>	Номера							<i>N</i>	Номера						
<i>00</i>	8	27	93	115	119	147	179	<i>25</i>	5	39	76	108	129	144	192
<i>01</i>	15	53	71	101	120	156	170	<i>26</i>	19	56	77	104	137	140	196
<i>02</i>	12	46	63	108	136	161	170	<i>27</i>	15	35	63	107	119	167	194
<i>03</i>	19	54	85	113	133	151	176	<i>28</i>	3	43	72	108	129	164	196
<i>04</i>	15	37	82	112	123	162	196	<i>29</i>	11	23	59	101	129	156	169
<i>05</i>	7	31	61	101	132	143	191	<i>30</i>	4	46	88	113	121	143	192
<i>06</i>	14	36	65	114	132	148	193	<i>31</i>	16	33	61	102	130	159	171
<i>07</i>	19	48	88	106	135	143	196	<i>32</i>	20	39	98	112	124	147	179
<i>08</i>	9	49	72	115	128	152	194	<i>33</i>	12	53	98	117	125	150	180
<i>09</i>	17	44	92	114	134	147	172	<i>34</i>	2	25	75	114	127	149	184
<i>10</i>	17	42	67	106	125	158	193	<i>35</i>	5	40	80	117	128	161	185
<i>11</i>	17	47	80	106	136	155	195	<i>36</i>	8	56	69	118	128	160	189
<i>12</i>	5	23	97	118	134	165	181	<i>37</i>	2	57	90	113	127	141	169
<i>13</i>	17	36	81	118	125	139	174	<i>38</i>	1	23	84	110	122	153	171
<i>14</i>	6	49	72	111	136	160	170	<i>39</i>	8	37	91	116	129	148	195
<i>15</i>	1	26	96	100	119	166	188	<i>40</i>	12	56	94	105	122	148	183
<i>16</i>	9	32	64	99	129	160	174	<i>41</i>	4	26	66	105	130	143	171
<i>17</i>	20	24	72	104	128	159	185	<i>42</i>	6	47	66	109	124	160	180
<i>18</i>	20	27	80	101	128	153	191	<i>43</i>	1	41	93	107	133	167	196
<i>19</i>	13	27	76	106	120	159	183	<i>44</i>	3	44	80	104	119	166	189
<i>20</i>	19	43	61	117	133	161	176	<i>45</i>	5	49	63	118	132	167	184
<i>21</i>	7	37	60	111	134	152	173	<i>46</i>	11	35	87	110	133	160	186
<i>22</i>	11	45	79	106	127	151	194	<i>47</i>	18	23	59	106	133	162	198
<i>23</i>	1	53	67	110	124	142	190	<i>48</i>	20	27	82	104	126	164	176
<i>24</i>	19	27	82	100	122	147	191	<i>49</i>	14	55	73	116	131	140	175

Таблица вариантов к контрольной работе № 4 (продолжение)

<i>N</i>	Номера							<i>N</i>	Номера						
<i>50</i>	10	43	76	115	119	155	189	<i>75</i>	3	29	70	107	130	141	180
<i>51</i>	3	45	59	115	119	141	171	<i>76</i>	18	55	97	109	135	148	197
<i>52</i>	5	26	73	106	124	150	194	<i>77</i>	15	35	67	116	125	145	194
<i>53</i>	2	44	81	103	133	148	196	<i>78</i>	3	26	93	107	121	157	193
<i>54</i>	4	35	83	106	122	143	170	<i>79</i>	10	46	89	112	122	139	181
<i>55</i>	18	36	60	118	122	166	193	<i>80</i>	17	54	83	107	129	146	186
<i>56</i>	19	46	77	111	129	160	195	<i>81</i>	15	21	77	102	137	146	179
<i>57</i>	8	44	77	117	135	142	185	<i>82</i>	16	32	67	110	129	156	196
<i>58</i>	5	47	82	103	131	167	193	<i>83</i>	5	33	75	108	136	151	183
<i>59</i>	9	44	67	104	124	159	170	<i>84</i>	9	46	90	114	128	166	196
<i>60</i>	10	36	92	104	134	152	197	<i>85</i>	8	56	86	99	133	157	188
<i>61</i>	17	32	91	99	119	147	171	<i>86</i>	12	53	87	102	123	158	184
<i>62</i>	4	52	92	111	134	163	192	<i>87</i>	4	47	83	99	125	139	192
<i>63</i>	11	31	85	117	127	156	188	<i>88</i>	15	37	76	102	130	166	183
<i>64</i>	12	58	89	104	119	153	172	<i>89</i>	8	49	83	111	135	167	192
<i>65</i>	2	27	63	100	132	158	190	<i>90</i>	6	25	81	117	122	144	186
<i>66</i>	13	25	63	110	136	148	170	<i>91</i>	12	25	91	110	132	154	193
<i>67</i>	2	38	76	103	130	147	170	<i>92</i>	19	52	97	103	129	156	195
<i>68</i>	11	41	77	103	132	144	175	<i>93</i>	2	30	60	118	133	146	169
<i>69</i>	6	54	71	111	119	139	169	<i>94</i>	12	27	98	103	136	140	190
<i>70</i>	5	50	97	114	122	140	196	<i>95</i>	17	53	82	117	132	166	177
<i>71</i>	19	30	81	108	126	154	181	<i>96</i>	4	49	80	109	128	151	173
<i>72</i>	10	54	83	111	125	161	169	<i>97</i>	15	55	61	113	132	140	191
<i>73</i>	14	26	74	104	126	162	187	<i>98</i>	5	51	74	118	133	142	186
<i>74</i>	6	53	63	118	125	166	183	<i>99</i>	3	53	85	104	135	168	179

Задание 4.1

Вычислить неопределённые интегралы.

Номера к заданию 4.1

Непосредственное интегрирование.

1. а) $\int (2 - 3^x)^2 dx$

б) $\int \cos(5x - 2) dx$

в) $\int \frac{x^3 dx}{1 - 2x^4}$

3. а) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

б) $\int e^{x^2} x dx$

в) $\int \sqrt{1 - 4x} dx$

5. а) $\int \frac{\sin x dx}{\cos x + 1}$

б) $\int \frac{(2\sqrt{x} + 1)^2}{x^2} dx$

в) $\int (2 \operatorname{tg} x - 3^{x+1}) dx$

7. а) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx$

б) $\int \sin(4x - 1) dx$

в) $\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$

9. а) $\int (x + 3)(x - 5)^2 dx$

б) $\int e^x \cos(e^x) dx$

в) $\int \sqrt[3]{5 + 7x} dx$

11. а) $\int (5 - 2x^3)^2 dx$

б) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$

в) $\int \sqrt{x^3 + 2} x^2 dx$

2. а) $\int \frac{x^2 - 3\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}} dx$

б) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$

в) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

4. а) $\int 2^{5x-1} dx$

б) $\int x^2 \sin(x^3 + 1) dx$

в) $\int \frac{(x + 4\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$

6. а) $\int \left(\frac{1}{x} + \sqrt[4]{x} + 2 \right) dx$

б) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$

8. а) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$

б) $\int x \cos(x^2 + 1) dx$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x}}$

10. а) $\int \frac{dx}{4x^2 + 3}$

б) $\int \frac{dx}{(2 - 3x)^5}$

в) $\int e^x \left(3 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$

12. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 8x^2}}$

б) $\int \operatorname{ctg}(7x + 11) dx$

в) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Номера к заданию 4.1 (продолжение)

Непосредственное интегрирование.

13. а) $\int \left(5^{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$

б) $\int \frac{x dx}{3x^2 + 2}$

в) $\int \sqrt{4x - 5} dx$

15. а) $\int (e^x + 2)^3 dx$

б) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$

в) $\int (2x - 7)^{12} dx$

17. а) $\int \sin\left(\frac{\pi}{12} + 2x\right) dx$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x}}$

в) $\int \frac{4 + x}{x^2 + 2} dx$

19. а) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1 - 3^{2x}}}$

б) $\int \frac{dx}{2x^2 + 7}$

в) $\int \frac{(2x - 3) dx}{x^2 - 3x + 1}$

14. а) $\int 3^{2x+5} dx$

б) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$

в) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

16. а) $\int x e^{-x^2} dx$

б) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$

в) $\int \frac{(1 + \operatorname{tg} x) dx}{\cos^2 x}$

18. а) $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2x - 1} \right) dx$

б) $\int x \sqrt{3x^2 + 1} dx$

в) $\int (1 + \ln x)^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x}$

20. а) $\int 5^{-2x+3} dx$

б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^8}}$

в) $\int \sqrt[3]{5x + 1} dx$

Интегрирование по частям.

21. $\int (x - 1)e^x dx$

23. $\int \ln(x^2 + 1) dx$

25. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

27. $\int x \ln(x + 1) dx$

29. $\int x^5 \ln x dx$

31. $\int \ln(x + 2) dx$

33. $\int (x - 2)2^x dx$

35. $\int (2x + 1) \ln x dx$

37. $\int (x + 5)e^{-x} dx$

22. $\int x \cos 2x dx$

24. $\int (x - 4) \sin 3x dx$

26. $\int x e^{-5x} dx$

28. $\int \operatorname{arctg} x dx$

30. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

32. $\int x \operatorname{arctg} x dx$

34. $\int (x + 4)e^{2x-1} dx$

36. $\int (1 - x) \cos \frac{x}{2} dx$

38. $\int \arcsin x dx$

Номера к заданию 4.1 (продолжение)

Интегрирование функций, содержащих квадратный трёхчлен в знаменателе.

$$39. \int \frac{x dx}{x^2 + 6x - 1}$$

$$41. \int \frac{(x+2)dx}{5+2x+x^2}$$

$$43. \int \frac{(2x-1)dx}{x^2+4x-1}$$

$$45. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-1}}$$

$$47. \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+8x+3}}$$

$$49. \int \frac{(x-1)dx}{7+6x-x^2}$$

$$51. \int \frac{x dx}{4x^2+4x+3}$$

$$53. \int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$$

$$55. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x-1}}$$

$$57. \int \frac{(5x-1)dx}{x^2-6x+3}$$

$$40. \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

$$42. \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2+3}}$$

$$44. \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$$

$$46. \int \frac{(3x+2)dx}{x^2+8x-3}$$

$$48. \int \frac{(x+4)dx}{x^2-2x+7}$$

$$50. \int \frac{dx}{\sqrt{1+6x-x^2}}$$

$$52. \int \frac{(x+2)dx}{5-4x+x^2}$$

$$54. \int \frac{3x dx}{x^2+4x+29}$$

$$56. \int \frac{(x+2)dx}{1+4x-4x^2}$$

$$58. \int \frac{dx}{\sqrt{4-10x-x^2}}$$

Интегрирование дробно-рациональных функций.

$$59. \int \frac{dx}{x(x-5)^2}$$

$$61. \int \frac{(2x+1)dx}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$63. \int \frac{dx}{x(x^2+2)}$$

$$65. \int \frac{(8x+1)dx}{(x+1)(x^2+2)}$$

$$67. \int \frac{(x^2+1)dx}{x^2(x-3)}$$

$$69. \int \frac{2x dx}{1+x^3}$$

$$71. \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(3x+5)}$$

$$73. \int \frac{x dx}{(x+2)(x-2)^2}$$

$$75. \int \frac{(2x+1)dx}{x(x^2+4)}$$

$$77. \int \frac{(x-2)dx}{(x+2)^2(2x-1)}$$

$$60. \int \frac{(3x-1)dx}{x^2(x-1)}$$

$$62. \int \frac{(x+3)dx}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$64. \int \frac{(6-x)dx}{x^2(x+2)}$$

$$66. \int \frac{x dx}{(x-1)(x+2)^2}$$

$$68. \int \frac{5 dx}{x^2(2x-1)}$$

$$70. \int \frac{(3x+3)dx}{(x-4)(x+2)(2x+1)}$$

$$72. \int \frac{(6+x)dx}{x^3-1}$$

$$74. \int \frac{(x-5)dx}{(2x+1)(3x+1)^2}$$

$$76. \int \frac{x dx}{(x-2)(x^2+2x+2)}$$

$$78. \int \frac{(x^2+4x-5)dx}{(x+2)(x-3)(2x+1)}$$

Номера к заданию 4.1 (продолжение)

Интегрирование тригонометрических функций.

$$79. \int \cos^2 x \sin^3 x dx$$

$$81. \int \operatorname{tg}^3 x dx$$

$$83. \int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$85. \int \cos^4 x dx$$

$$87. \int \frac{dx}{1 + \sin x}$$

$$89. \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

$$91. \int \frac{dx}{3 \cos x + 2}$$

$$93. \int \sin^4 x dx$$

$$95. \int \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$97. \int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$$

$$80. \int \cos^3 x dx$$

$$82. \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$84. \int (1 + \sin x)^2 dx$$

$$86. \int \frac{dx}{1 + \cos x}$$

$$88. \int \sin^5 x dx$$

$$90. \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

$$92. \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x}$$

$$94. \int \operatorname{ctg}^3 x dx$$

$$96. \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$$

$$98. \int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$$

Интегрирование иррациональных функций. Вычисление определённого интеграла.

$$99. \int_2^5 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$101. \int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} dx$$

$$103. \int_0^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$105. \int_{-8}^{-3} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$107. \int_{-1}^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{2x+3}}$$

$$109. \int_1^4 \frac{dx}{x(\sqrt{x}+1)}$$

$$100. \int_1^4 \frac{\sqrt{x} dx}{x+2}$$

$$102. \int_1^8 \frac{2x dx}{\sqrt[3]{x}+1}$$

$$104. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}+1}$$

$$106. \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt[3]{x})}$$

$$108. \int_0^8 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-2} dx$$

$$110. \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$$

Номера к заданию 4.1 (продолжение)

$$111. \int_6^9 \frac{x-1}{\sqrt{x-5}} dx$$

$$113. \int_{-3}^0 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{1-x}}$$

$$115. \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x} + 1}$$

$$117. \int_1^9 \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x+2} dx$$

$$112. \int_{-11}^{-3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{3-2x}}$$

$$114. \int_0^{3/2} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$$

$$116. \int_1^{16} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1} dx$$

$$118. \int_4^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$$

Задание 4.2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

Номера к заданию 4.2

$$119. y = 3x^2 + 1, y = 3x + 7$$

$$121. y = 4 - x^2, y = 2x + 1$$

$$123. y = x^2 - 2x, y = \frac{x}{2}$$

$$125. y = x^2 - 3x, y = 9 - 3x$$

$$127. y = x^2, x + y = 6, y = 0$$

$$120. x + y = 2, y = x^3, y = 0$$

$$122. y^2 = 2x, x + y = 4, y = 0$$

$$124. y^2 = 8x, y = 2x$$

$$126. y^2 = 1 - x, x + 3 = 0$$

$$128. y = 4x - x^2, y = x$$

Найти длину указанной кривой.

$$129. y = \ln x, \sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{15}$$

$$130. x = t^2/2, y = t^3/3, 1 \leq t \leq 3$$

$$131. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$132. y = \ln(1 - x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$133. y = \ln(\cos x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями.

$$134. y = x^2, y = \sqrt{x}$$

$$136. y^2 = 1 - x, y - x = 1, y = 0$$

$$138. y = x^2, y = 2 - x$$

$$135. xy = 1, y = x, x = 2$$

$$137. y^2 = 2(x - 1), y = x - 1$$

Задание 4.3

Изменить порядок интегрирования, сделать чертеж.

Номера к заданию 4.3

$$139. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy.$$

$$141. \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$143. \int_0^1 dx \int_{2\sqrt{x}}^{3-x} f(x, y) dy.$$

$$145. \int_0^{\frac{3}{2}} dy \int_{2y^2}^{3+y} f(x, y) dx.$$

$$147. \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy.$$

$$149. \int_{-2}^0 dx \int_0^{2+x} f(x, y) dy + \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4-x}} f(x, y) dy.$$

$$151. \int_{-2}^0 dx \int_0^{\sqrt{2+x}} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{2+x}} f(x, y) dy.$$

$$153. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$155. \int_0^1 dy \int_{2y+1}^{4-y^2} f(x, y) dx.$$

$$157. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy.$$

$$140. \int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} f(x, y) dy.$$

$$142. \int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx.$$

$$144. \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x+6} f(x, y) dy.$$

$$146. \int_0^3 dy \int_{\sqrt{3y}}^{\sqrt{18-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$148. \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy.$$

$$150. \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{8-x^2} f(x, y) dy.$$

$$152. \int_{-\frac{3}{2}}^0 dx \int_{x^2}^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy.$$

$$154. \int_{-2}^0 dy \int_{y^2-4}^0 f(x, y) dx.$$

$$156. \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy.$$

$$158. \int_0^2 dy \int_{y^2}^{y^2+2} f(x, y) dx.$$

Номера к заданию 4.3 (продолжение)

$$159. \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$160. \int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{y^2} f(x, y) dx.$$

$$161. \int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+6} f(x, y) dy.$$

$$162. \int_0^2 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{8-y}} f(x, y) dx.$$

$$163. \int_0^1 dx \int_0^{3x} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_0^{4-x} f(x, y) dy.$$

$$164. \int_0^1 dx \int_{3x}^{4-x} f(x, y) dy.$$

$$165. \int_{-\sqrt{2}}^0 dx \int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$166. \int_0^2 dy \int_y^{\sqrt{y+2}} f(x, y) dx.$$

$$167. \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} dx \int_{-x}^0 f(x, y) dy + \int_{\frac{3}{\sqrt{2}}}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 f(x, y) dy.$$

$$168. \int_0^3 dx \int_{\frac{x-1}{2}}^{\sqrt{4-x}} f(x, y) dy.$$

Задание 4.4

Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L (в случае замкнутой кривой обход в положительном направлении).

Номера к заданию 4.4

$$169. \oint_L (x^2 - y^2)dx - (x - y^2)dy,$$

где L - окружность $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$170. \oint_L (x + y)dx - (x - y)dy,$$

где L - контур треугольника OAB , где $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(4, 5)$.

$$171. \oint_L y dx - x dy, \text{ где } L - \text{контур треугольника } ABC, \text{ причём } A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1).$$

$$172. \int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy,$$

где L - дуга параболы $y = x^2$, от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$.

$$173. \int_L (x^2 y - 3x) dx + (y^2 x + 2y) dy,$$

где L - часть эллипса $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

$$174. \int_L (x^2 y + y^2) dx - (y^2 + x) dy,$$

где L - ломаная ABC , причём $A(1, 2)$, $B(1, 5)$, $C(3, 5)$.

$$175. \int_L y dx + \frac{x}{y} dy,$$

где L - дуга параболы $x = y^2$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(25, 5)$.

$$176. \int_L (y^2 + 1) dx - x dy,$$

где L - отрезок прямой от точки $A(1, 2)$ до точки $B(2, 4)$.

$$177. \int_L (xy - x^2) dx + x dy,$$

где L - дуга гиперболы $xy = 4$ от точки $A(1, 4)$ до точки $B(4, 1)$.

$$178. \oint_L y^2 dx + 2xy dy,$$

где L - окружность $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$179. \oint_L (x^2 - y) dx + y dy,$$

где L - контур треугольника ABC , причем $A(0, 2)$, $B(1, 2)$, $C(3, 0)$.

$$180. \oint_L y^2 dx + x^2 dy,$$

где L - эллипс $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$181. \int_L (6 - y) dx + x dy,$$

где L - кривая $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$

182. $\int_L (x^2 - 2xy)dx - (xy + 2y^2)dy,$
 где L - кривая $y = \sqrt[3]{x}, 1 \leq x \leq 8.$

183. $\int_L 2xy dx - x^2 dy,$
 где L - кривая $x = \sqrt[3]{y}, 1 \leq x \leq 2.$

184. $\int_L (x + y)dx - x dy,$
 где L - кривая $y = \frac{x^2}{2}, 0 \leq x \leq 2.$

185. $\int_L y dx - (y + x^2)dy,$
 где L - кривая $y = 2x - x^2, 0 \leq x \leq 2.$

186. $\int_L 2xy dx - x^2 dy,$
 где L - кривая $y = \frac{x^2}{4}, 0 \leq x \leq 2$

187. $\oint_L x^2 y dx + x dy,$
 где L - контур треугольника ABC , причём $A(1, 2), B(1, 0), C(2, 3).$

188. $\int_L (x + y)dx - x^2 dy,$
 где L - кривая $y^2 = x + 1, 3 \leq x \leq 8.$

189. $\oint_L yx^2 dx - (x + y)dy,$
 где L - контур прямоугольника $ABCD$, причём $A(1, 2), B(3, 2), C(3, 5), D(1, 5).$

190. $\int_L xy dx + (y - x)dy,$
 где L - четверть окружности $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 5 \sin t, \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}.$

191. $\int_L (2x - y)dx + 3y dy,$
где L - дуга кривой $xy = 4$ от точки $A(2, 2)$ до точки $B(4, 1)$.
192. $\int_L (x - 3y)dx + (x + y)dy,$
где L - дуга кривой $y^2 = x^3$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.
193. $\oint_L (3y - 2)dx + (x + 2y)dy,$
где L - контур треугольника ABC , причём $A(-2, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 0)$.
194. $\oint_L (x^2 - 2xy)dx + x dy,$
где L - контур четырёхугольника $ABCD$, причём $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 3)$, $D(2, 3)$.
195. $\int_L (xy - 1)dx + y dy,$
где L - дуга кривой $y = x^2 + 3x$, $-1 \leq x \leq 2$.
196. $\oint_L (x + y)dx - (2y - x)dy,$
где L - эллипс $x = 5 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
197. $\oint_L (3x + y + 1)dx - x dy,$
где L - контур треугольника ABC , причём $A(1, 3)$, $B(2, 5)$, $C(-1, 1)$.
198. $\int_L (x^2y + 3)dx + (\frac{y}{x} - 1)dy,$
где L - дуга кривой $y - 3 = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

**Функции многих переменных.
Неопределённый и определённый интегралы.
Кратные и криволинейные интегралы.**

Варианты контрольных работ № 3, 4
для студентов бакалавриата I курса заочного отделения.
направлений подготовки: 080200 – Менеджмент, 270800 – Строительство.

Составители:
Деревенский Владислав Павлович,
Лабуткин Александр Георгиевич,
Шарипов Руслан Рашатович

Редактор: Н.Х.Михайлова

Редакционно-издательский отдел Казанского государственного
архитектурно-строительного университета
Лицензия ЛР № 020379 от 22.01.92 г.
Печатно-множительный отдел КГАСУ
Лицензия № 03/380 от 16.10.95 г.
420043, Казань, Зелёная, 1.