Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"Хабаровская государственная академия экономики и права"
Кафедра математики и математических методов в экономике

Математический анализ

Программа, методические указания,
варианты контрольной работы для бакалаврантов 1-го курса заочной формы обучения по направлению 080100. 62 «Экономика»

Хабаровск 2011

ББК З 973
Х 12
Математический анализ: программа, методические указания, варианты контрольной работы для бакалаврантов 1-го курса заочной формы обучения по направлению 080100.62 «Экономика» /сост. Е. Н. Кравченко, С. А. Наумова. – Хабаровск : РИЦ ХГАЭП, 2011. – 44 с.

Рецензент Е. В. Карачанская, кандидат физ.-мат. наук доцент каф. прикладной математики ТОГУ

Утверждено ИБС академии в качестве методических указаний для бакалаврантов заочной формы обучения

Елена Николаевна Кравченко
Светлана Александровна Наумова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Программа, методические указания, варианты контрольной работы для бакалаврантов 1-го курса заочной формы обучения по направлению 080100.62 «Экономика»

Редактор Г.С. Одинцова

Подписано к печати Формат 60х84/16.
Бумага писчая. Цифровая печать. Усл.п.л. 2,6 Уч.-изд.л.1,8
Тираж 75 экз. Заказ №

680042, г.Хабаровск, ул.Тихоокеанская, 134, ХГАЭП, РИЦ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. В то же время математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного экономиста.

Данные методические указания содержат учебную программу по математическому анализу, варианты контрольной работы. Чтобы обеспечить бакалаврантам усвоение материала, рассмотрены некоторые основные сведения из теории, примеры решения типовых задач. Предусматриваются задания по следующим темам: «Предел функции», «Производная и дифференциал», «Исследование функций и построение графиков», «Применение понятия производной в экономике», «Интегралы», «Дифференциальные уравнения» «Ряды»

Изучив теоретический материал согласно прилагаемой программе, необходимо выполнить контрольную работу в сроки, указанные в вашем учебном графике.

Программа дисциплины

Раздел 1. Введение. Функции одной переменной

Роль математики в экономике и практике. Понятие множества. Операции над множествами.

Определение функции одной переменной. Способы задания. Монотонные функции. Ограниченные и неограниченные функции. Чётные и нечётные функции. Сложная функция. Обратная функция. Основные элементарные функции (область определения, график, характеристики поведения). Примеры поведения элементарных функций в экономике (функция спроса, предложения, издержек и т.д.)

Раздел 2. Теория пределов

Числовая последовательность (определение, обозначение, способы задания). Предел числовой последовательности. Геометрическая интерпретация предела. Теоремы об единственности предела, об ограниченности сходящейся последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины (последовательности). Связь между ними.

Свойства бесконечно малых последовательностей. Связь сходящихся последовательностей с бесконечно малым (второе определение предела последовательности). Арифметические операции над последовательностями. Предельный переход в равенствах и неравенствах. Достаточное условие сходимости монотонной последовательности. Предел функции (на языке последовательности).

Раскрытие неопределённостей различных видов. Первый и второй замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые.

Раздел 3. Непрерывные функции

Односторонние пределы. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва функции и их классификация. Свойства функций непрерывных на отрезке. Приращение функции. Второе определение непрерывности функции в точке.

Раздел 4. Производная функции одной переменной

Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной, её геометрический, механический, экономический смысл. Уравнение касательной. Производная, как показатель мгновенного прироста или скорости изменения функции. Простейшие предельные характеристики из экономического анализа (предельная выручка, предельный доход, предельные издержки, предельная прибыль...). Эластичность функции и ее свойства.

Непрерывность дифференцируемой функции. Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Производная обратной функции. Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Дифференциал функций, его геометрический смысл. Инвариантность формы дифференциала. Применение дифференциала в приближённых вычислениях.

Раздел 5. Теоремы дифференциального вычисления. Исследование функций и построение графиков

Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма, Ролля, Лагранжа. Правило Лопиталя. Признак постоянства функции. Необходимое и достаточное условие монотонности. Экстремум функции одной переменной. Достаточные условия монотонности (первое и вторoе). Наибольшее и наименьшее значение функции. Задачи на экстремум с экономическим содержанием.

Выпуклость, вогнутость функции y=f(x). Точки перегиба. Асимптоты функции. Схема исследования функции.

Раздел 6. Функции нескольких переменных

Функции нескольких переменных (основные определения). Функция двух переменных. График функции двух переменных. Линии уровня. Предел и непрерывность функции двух переменных. Частные приращения. Частные производные. Полное приращение. Полный дифференциал.

Частные производные высших порядков. Экстремум функции двух переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Условный экстремум. Метод наименьших квадратов.

Производная по направлению. Градиент функции. Понятие о градиентных методах в задачах оптимизации.

Раздел 7. Неопределенный интеграл

Первообразная и ее свойства. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Замена переменной, интегрирование по частям. Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование рациональных дробей, интегрирование тригонометрических функций. Понятие о неберущихся интегралах.

Раздел 8. Определённый интеграл

Понятие определённого интеграла, его геометрический смысл. Свойства определенного интеграла. Определённый интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменной и формула интегрирования по частям в определённом интеграле. Геометрические приложения определённого интеграла. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Интеграл Пуассона. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Приближённое вычисление определённых интегралов.

Экономический смысл определённого интеграла. Использование определённого интеграла в экономике.

Раздел 9. Ряды

Числовой ряд. Сходимость ряда. Геометрический ряд. Свойства числовых рядов. Необходимый признак сходимости. Сравнение рядов с положительными членами. Признак Даламбера. Интегральный признак. Обобщённо-гармонический ряд. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Степенной ряд. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда.

Ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Примеры разложения функций в ряд Маклорена. Применение рядов в приближённых вычислениях.

Раздел 10. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения (определение; порядок; общее решение; частное решение). Дифференциальные уравнения первого порядка; уравнения с разделяющимися переменными; однородные уравнения; линейные уравнения. Математические модели экономического роста.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (однородные и неоднородные).

Список рекомендуемой основной и дополнительной литературы

1. Вербицкий В. А. Математика в экономике (сборник задач) : учеб. пособие / В. А. Вербицкий [и др.] – Хабаровск : РИЦ ХГАЭП, 1999. – 84 с.

2. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов/ Н. Ш. Кремер [и др.] – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2007. – 471 с.

3. Гусак А. А. Высшая математика: в 2 т. : учебник для вузов. – 2-е изд. испр. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2000. – 544 с.

4. Карасев А. И. Курс высшей математики для экономических вузов. Часть 1: учебник / А. И. Карасев, З. М. Аксютина, Т. К. Савельева ─ М.: Высшая школа, 1982. – 412 с.

5. Лихолетов И. И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика : учебник / И. И. Лихолетов. ─ Минск : Вышейшая школа, 1976. – 724 с.

6. Математика для экономистов: задачник / кол. авторов под ред. С. И. Макарова, М. В. Мищенко. ─ М.: Кнорус, 2008. – 360 с.

7. Красс М.С. Основы математики и её приложения в экономическом образовании : учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов ─ 2-е изд. испр. ─ М : Дело, 2001. ─ 688 с.

8. Ломакина Е. Н., Математический анализ: Числовые последовательности и их приложения : учеб. пособие / Е. Н. Ломакина, М. Ф. Тиунчик ─ Хабаровск : ХГАЭП, 2008. – 104 с.

9. Макаров С.А. Математика для экономистов : учеб. пособие / С. А. Макаров ─ М. : Кнорус, 2007. – 264 с.

10. Кастрица О. А. Высшая математика для экономистов : учебник / О. А. Кастрица. ─ М : Новое знание, 2006. – 491 с.

11. Тиунчик М. Ф. Практикум по дифференциальным уравнениям: учеб. пособие / М. Ф. Тиунчик, Ю. Г. Саяпина. – Хабаровск : РИЦ ХГАЭП, 2010. – 92 с.

12. Тиунчик М. Ф. Математический анализ. Числовые ряды : учеб. пособие / М. Ф. Тиунчик, Е.О. Старкова, С. В. Тонконог – Хабаровск : РИЦ ХГАЭП, 2011. – 72 с.

13. Щипачев В. С. Высшая математика : учебник для вузов / В. С. Щипачев ─ 5-е изд. ─ М. : Высш. школа. 2001. ─ 479 с.

Контрольные задания, правила выполнения и оформления контрольных работ

Вариант для контрольной работы студент выбирает по двум последним цифрам своего номера зачётной книжки. Например: при номере зачётной книжки 952046, номер варианта 46. Номера заданий контрольной работы для каждого выбранного варианта указаны в таблице.

Таблица 1 ─ Варианты заданий

Номер варианта	Номера задач для контрольного задания						
	Задание 1 Задача	Задание 2 Задача	Задание 3 Задача	Задание 4 Задача	Задание 5 Задача	Задание 6 Задача	Задание 7 Задача
01	7	18	13	3	14	20	13
02	17	20	20	13	9	13	20
03	14	6	1	1	1	1	13
04	2	7	12	12	6	6	16
05	10	20	4	18	9	20	14
06	17	8	9	14	3	6	2
07	4	11	17	17	14	10	19
08	10	5	18	15	3	18	8
09	6	5	16	1	16	15	8
10	8	1	5	9	9	20	3
11	12	1	15	5	4	6	13
12	6	13	20	10	19	15	15
13	13	15	4	11	5	18	12
14	7	16	13	15	20	13	16
15	12	5	2	3	4	18	3
16	8	18	7	17	10	10	15
17	7	5	2	7	11	11	15
18	4	9	18	10	11	17	19
19	7	4	10	2	6	14	15
20	3	11	19	6	10	15	9
21	16	6	12	12	17	10	15
22	18	9	19	11	12	1	18
23	17	8	3	3	14	6	1
24	16	4	18	16	6	1	8
25	13	14	7	10	14	13	6
26	16	11	3	1	2	3	19
27	1	2	3	19	2	19	15
28	10	12	14	8	13	4	7
29	8	13	4	7	10	2	18
30	5	9	6	18	9	3	20
31	12	20	7	20	10	18	5
32	9	19	13	5	20	10	13
33	4	8	12	13	2	16	9
34	1	1	17	9	6	5	13
35	15	4	11	13	8	20	5
36	9	12	1	5	17	11	7
37	6	5	6	7	1	15	13
38	7	1	15	3	19	13	2
39	3	19	13	20	1	2	17
40	20	1	2	3	16	17	12
41	3	16	17	12	8	12	12
42	12	8	12	5	17	12	18
43	5	17	12	15	5	18	5
44	15	5	18	1	2	5	1
45	1	2	5	13	6	1	7
46	13	6	1	12	13	7	16
47	12	13	7	2	1	16	10
48	2	1	16	15	13	10	5
49	15	13	10	10	14	5	18
50	10	14	5	12	11	18	4
51	12	11	18	15	6	4	3
52	9	6	4	16	11	3	3
53	1	17	15	19	6	5	16
54	19	6	5	6	11	16	8

Номер варианта	Номера задач для контрольного задания						
	Задание 1 Задача	Задание 2 Задача	Задание 3 Задача	Задание 4 Задача	Задание 5 Задача	Задание 6 Задача	Задание 7 Задача
55	19	2	19	2	2	15	6
56	2	2	15	6	5	6	15
57	6	11	16	6	9	8	13
58	6	9	8	4	8	13	14
59	4	8	13	6	7	14	15
60	6	7	14	19	15	15	17
61	19	15	15	3	18	17	7
62	3	18	17	1	7	7	17
63	1	7	7	17	17	17	15
64	17	17	17	3	8	15	15
65	3	8	15	5	12	15	7
66	5	12	15	18	12	7	12
67	18	12	7	1	9	12	8
68	1	9	12	12	5	8	1
69	12	5	8	10	8	1	18
70	10	8	1	2	13	18	13
71	2	13	18	7	5	13	18
72	7	5	13	20	12	18	11
73	20	12	18	1	18	11	4
74	1	18	11	14	6	4	18
75	14	6	4	7	18	18	17
76	7	18	18	1	18	17	3
77	1	18	17	10	8	3	3

Номер варианта	Номера задач для контрольного задания						
	Задание 1 Задача	Задание 2 Задача	Задание 3 Задача	Задание 4 Задача	Задание 5 Задача	Задание 6 Задача	Задание 7 Задача
78	16	5	16	1	8	13	10
79	1	8	13	2	16	10	14
80	2	16	10	10	9	14	1
81	10	9	14	17	12	1	19
82	17	12	1	18	10	19	7
83	18	10	19	3	2	7	2
84	3	2	7	8	10	2	1
85	8	10	2	13	14	1	16
86	13	14	1	2	9	16	2
87	2	9	16	20	14	2	8
88	20	14	2	2	2	8	15
89	2	2	8	1	17	15	5
90	1	17	15	19	6	5	16
91	19	6	5	16	5	16	13
92	16	5	16	1	8	13	10
93	1	8	13	2	16	10	14
94	2	16	10	10	9	14	1
95	10	9	14	17	12	1	19
96	17	12	1	18	10	19	7
97	18	10	19	3	2	7	16
98	3	2	7	16	5	16	4
99	8	10	2	19	10	4	10
100	19	10	4	14	20	10	12

При выполнении контрольной работы надо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студентам для переработки.

1. Контрольные работы можно выполнять либо в печатном варианте, либо в тетради пастой или чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, номер зачётной книжки, название дисциплины и номер варианта контрольной работы.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по своему варианту. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также содержащие задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решение задач надо располагать в порядке, указанном в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью её условие. Если несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

6. В конце работы следует указать литературу, которую изучал студент, выполняя данную работу.

7. Студент должен подписать работу и поставить дату.

8. После получения отрецензированной работы (как зачтённой, так и незачтённой) студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В связи с этим следует оставлять в конце тетради чистые листы для работы над ошибками. Вносить исправления в сам текст работы после её рецензирования запрещается.

9. Если работа не допущена к защите, необходимо выполнить работу над ошибками и сдать на повторное рецензирование.

10. Зачтённые контрольные работы вместе с рецензиями обязательно предъявляются на зачёте и экзамене.

11. Перед сдачей зачёта и экзамена студент обязан защитить контрольную работу.

Методические указания

Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0.

Определение. *Число A называется пределом функции f(x) в точке* x_0 *если для любого, сколь угодно малого положительного числа* $\varepsilon > 0$ *найдётся такое положительное число* $\delta > 0$*, зависящее от* ε*, что для всех x, удовлетворяющих условию* $0 < |x - x_0| < \delta$*, выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$. Этот предел функции обозначается: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \to A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах: если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a} [cf(x)] = c\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$).

Определение. *Функция α (x) называется бесконечно малой величиной при $x\to x_0$, или при $x\to\infty$, если её предел равен нулю* $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$

Определение. *Функция f(x) называется бесконечно большой в точке x_0 (или при $x\to x_0$), если имеет место одно из равенств:* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Теорема (о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций) : *если f(x) — бесконечно малая функция при $x\to x_0$, то* $\dfrac{1}{f(x)}$ *— бесконечно большая функция при $x\to x_0$, и наоборот.*

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2{,}71828$.

Пример 1 $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2x+4}{x-5}$

Поскольку функция непрерывна в точке x=7, искомый предел равен значению функции в этой точке. Используя теоремы о пределах суммы, разности, частного, получим

$$\lim_{x\to 7} \frac{2x+4}{x-5} = \frac{2\cdot 7+4}{7-5} = 9.$$

Пример 2 $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x+5}{x-5}$

При x→5 числитель (2x + 5) стремится к 2 · 5 + 5 = 15 (т.е. является ограниченной функцией), а знаменатель (x – 5) – к нулю (т.е. является бесконечно малой величиной), очевидно, их отношение есть величина бесконечно большая, т.е. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x+5}{x-5}=\infty$.

В рассмотренных примерах предел находился сразу, чаще при вычислении пределов мы сталкиваемся с неопределённостями: $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(\infty-\infty)$, 1^{∞}.

Пример 3

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-10x+3}{x^3-27}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)(x-\frac{1}{3})}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim_{x\to 3}\frac{3x-1}{x^2+3x+9}=\frac{8}{27}.$$

Пример 4

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{(x^2-25)(2+\sqrt{x-1})}{(2-\sqrt{x-1})(2+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to 5}\frac{(x^2-25)(2+\sqrt{x-1})}{4-(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)(2+\sqrt{x-1})}{-(x-5)}=-\lim_{x\to 5}(x+5)(2+\sqrt{x-1})=-10\cdot 4=-40.$$

Пример 5 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Теорему о пределе частного здесь применить нельзя, так как числитель и знаменатель дроби конечного предела не имеют. В данном случае имеем неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x в высшей степени (в данном случае на x^2), а затем воспользуемся теоремами о пределах функций:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}}}=\frac{2}{1}=2.$$

Здесь мы воспользовались теоремой о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0$ (a – любое число).

Производная и дифференциал

Пусть функция *y = f(x)* определена на промежутке X. Возьмём точку $x \in X$. Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Производной функции y = f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению переменной x, при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Основные правила дифференцирования

Если C — постоянное число, $U = U(x)$, $V = V(x)$ — функции, имеющие производные, тогда:

$C' = 0$; (I)

$(U \pm V)' = U' \pm V'$; (II)

$(CU)' = CU'$; (III)

$(U \cdot V)' = U' \cdot V + V'U$; (IV)

$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - V'U}{V^2}$. (V)

Если *y = f(u), u = φ (x)* — дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции *y=f[(φ(x)]* существует и равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной *x*, т.е. $y' = f'(u) \cdot u'$ (VI).

Таблица производных основных функций

№	Формула		Формула
1	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	15	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \ (a > 0,\ a \neq 1)$	16	$(u^x)' = u' \cdot u^x \cdot \ln u$
3	$(\ell^x)' = \ell^x$	17	$(\ell^u)' = u' \cdot \ell^u$
4	$(loq_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$	18	$(loq_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$
5	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	19	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

6	$(\sin x)' = \cos x$	20	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
7	$(\cos x)' = -\sin x$	21	$(\cos u)' = u' \cdot \sin u$
9	$(tqx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	22	$(tqu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
10	$(ctqx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	23	$(ctqu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
11	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	24	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
12	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	25	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	26	$(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$
14	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	27	$(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

Пример 6 Найти производные функций:

a) $y = \sin(\cos 5x)$; b) $y = \sqrt[3]{x}\left(e^{3x} - 5\right)$; c) $y = arctg\,\frac{2x}{1-x^2}$.

Решение:

a) функцию $y = \sin(\cos 5x)$ можно представить в виде $y = \sin u$, где $u = \cos 5x$, воспользуемся правилом дифференцирования (VI) и формулами таблицы производных $y' = (\sin(u))' = u' \cos u = (\cos 5x)' \cos(\cos 5x) = -5\sin 5x \cdot \cos(\cos 5x)$;

b) функция $y = \sqrt[3]{x}\left(e^{3x} - 5\right)$ представлена произведением двух функций, на основании правила (IV)

$$y' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' \cdot \left(e^{3x} - 5\right) + x^{\frac{1}{3}} \cdot \left(e^{3x} - 5\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(e^{3x} - 5\right) + 3e^{3x} \cdot x^{\frac{1}{3}} = \frac{\left(e^{3x} - 5\right)}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3e^{3x} \cdot \sqrt[3]{x} =$$

$$= \frac{e^{3x} - 5 + 9e^{3x} \cdot x}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{e^{3x}(9x+1) - 5}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}};$$

c) функцию $y = arctg\,\frac{2x}{1-x^2}$ можно представить в виде $y = arctgu$, где $u = \frac{2x}{1-x^2}$, используя формулы таблицы производных и правила дифференцирования (V) и (VI) получим:

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \frac{(2x)'(1-x^2) - 2x(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{\frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1-x^2)^2}{1+2x^2+x^4} \cdot \frac{2-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2+2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}.$$

Определение. Дифференциалом функции y=f(x) называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x .$$

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной, т.е. $dx = \Delta x$. Итак, дифференциал функции равен произведению её производной на дифференциал аргумента: $dy = f'(x) \cdot dx$.

Для определения полного дифференциала функции *Z=f(x,y)* необходимо ввести понятие частной производной нескольких переменных.

Определение. Величина $\Delta Z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ называется полным приращением функции в точке *(x, y)*. Если задать только приращение аргумента x или только приращения аргумента y, то полученные приращения функции соответственно: $\Delta_x Z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ и $\Delta_y Z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ называются частными.

Определение. Частной производной от функции $Z = f(x,y)$ по независимой переменной x называется конечный предел $Z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x Z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$, вычисленный при постоянном y .

Определение. Частной производной от функции $Z = f(x,y)$ по y называется конечный предел $Z'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y Z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$, вычисленный при постоянном x .

Обозначается частная производная так: Z_x', Z_y' или $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Z}{\partial y}$; $f_x'(x,y)$; $f_y'(x,y)$.

Пример 7 Найти частные производные функций:

a) $Z = x \cdot \ln y + \dfrac{y}{x}$; b) $Z = x^y$

Решение:

a) при нахождении частной производной по x будем рассматривать y как величину постоянную. Получим: $Z_x' = \ln y + y\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \ln y - \dfrac{y}{x^2}$.

Аналогично, дифференцируя по y, считаем x постоянной величиной, т.е. $Z_y' = x(\ln y)' + \dfrac{1}{x} \cdot y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x}$.

b) при фиксированном y имеем степенную функцию от x, таким образом, $Z_x' = y \cdot x^{y-1}$;

при фиксированном x функция является показательной относительно y, тогда $Z_y' = x^y \cdot \ln x$.

Полный дифференциал функции $Z = f(x, y)$ *вычисляется по формуле*

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x}dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy.$$

Пример 8 Найти полный дифференциал функции $Z = x^4 - 5x^2 y - 2y^3$.

Решение: $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = 4x^3 - 10xy$; $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = -5x^2 - 6y^2 = -(5x^2 + 6y^2)$;

$dZ = (4x^3 - 10xy)\ dx - (5x^2 + 6y^2)\ dy$.

Общая схема исследования функции и построения графика

Для полного исследования функции и построения её графика рекомендуется использовать следующую схему:

1) найти область определения функции;

2) найти точки разрыва функции и вертикальные асимптоты (если они существуют);

3) исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные и наклонные асимптоты;

4) исследовать функцию на чётность (нечётность) и на периодичность (для тригонометрических функций);

5) найти экстремумы и интервалы монотонности функции;

6) определить интервалы выпуклости и точки перегиба;

7) найти точки пересечения с осями координат, если возможно и некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Исследование функции проводится одновременно с построением её графика.

Пример 9 Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ и построить график.

Решение:

1. Область определения : $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$;
2. Функция терпит разрыв в точках $x_1=-1$, $x_2=1$;

Исследуем функцию на наличие вертикальных асимптот.

$\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\infty$; $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty$, $x_1=-1$— вертикальная асимптота.

$\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\infty$, $x_2=1$— вертикальная асимптота.

3. Исследуем функцию на наличие наклонных и горизонтальных асимптот.

Прямая $y=kx+b$— наклонная асимптота, если $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)x}=0$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}-0\cdot x=1$.

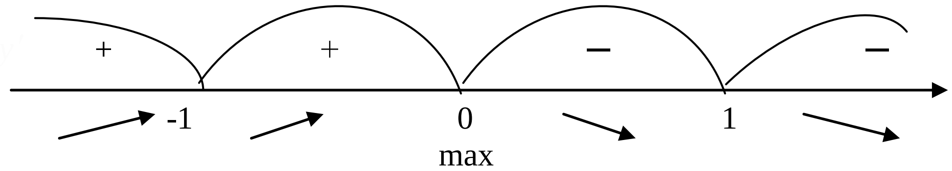
Прямая $y=1$ — горизонтальная асимптота.

4. Функция является четной т.к. $y(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=y(x)$. Чётность функции указывает на симметричность графика относительно оси ординат.

5. Найдём интервалы монотонности и экстремумы функции.

$$y'=\frac{(x^2+1)'\cdot(x^2-1)-(x^2-1)'(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

Найдём критические точки, т.е. точки в которых производная равна 0 или не существует: $4x=0$; $(x^2-1)^2=0$. Имеем три точки $x_1=0$; $x_2=-1$; $x_3=1$. Эти точки разбивают всю действительную ось на четыре промежутка. Определим знаки y' на каждом из них.



На интервалах (-∞; -1) и (-1; 0) функция возрастает, на интервалах (0; 1) и (1 ; +∞) — убывает. При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, в этой точке функция имеет максимум $y_{\max} = f(0) = -1$.

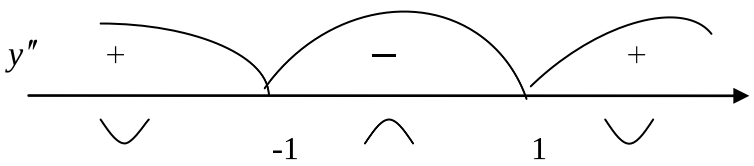
6. Найдём интервалы выпуклости , точки перегиба.

$$y'' = \left(\frac{-4x}{(x^2-1)^2} \right)' = \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

Найдём точки, в которых y'' равна 0, или не существует.

$3x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней. $x^2 - 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

Точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ разбивают действительную ось на три интервала. Определим знак y'' на каждом промежутке.



Таким образом, кривая на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ выпуклая вниз, на интервале (-1;1) выпуклая вверх; точек перегиба нет, т. к. функция в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ не определена.

7. Найдем точки пересечения с осями.

С осью Oy график функции пересекается в точке (0; -1), а с осью Ox график не пересекается, т.к. числитель данной функции не имеет действительных корней.

График заданной функции изображён на рисунке 1.

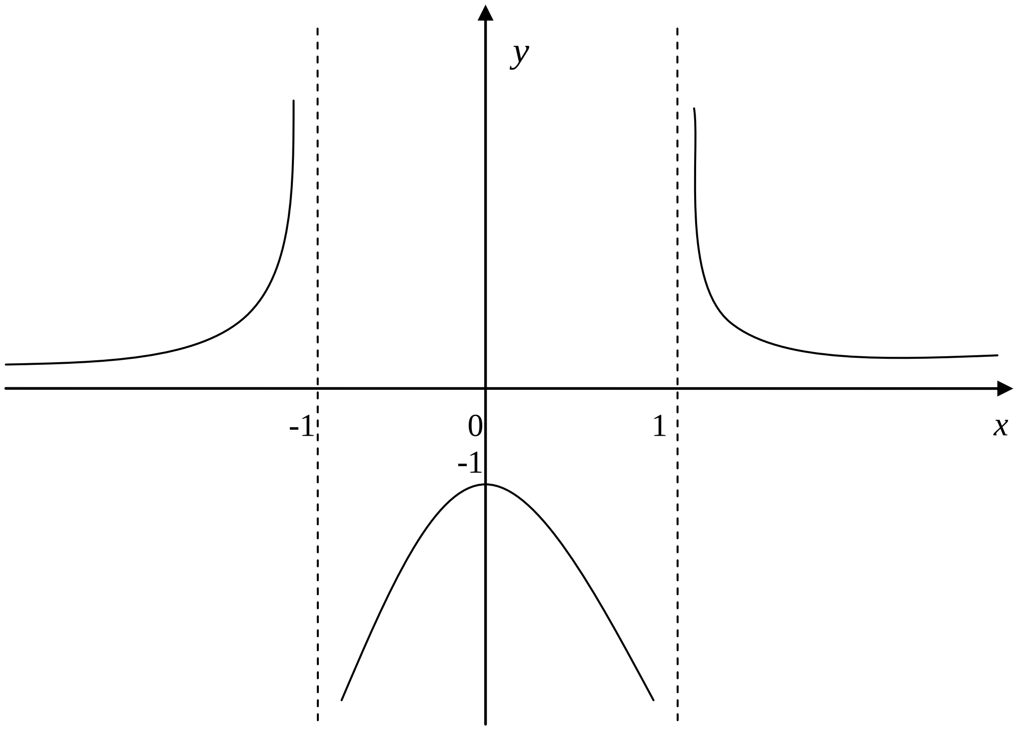


Рисунок 1 — График функции $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Применение понятия производной в экономике.
Эластичность функции

Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие эластичности функции.

Определение. Эластичностью функции $E_x(y)$ называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x \to 0$,

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y' \quad . \qquad \text{(VII)}$$

Эластичность функции показывает приближённо, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

Эластичность функции применяется при анализе спроса и потребления. Если эластичность спроса (по абсолютной величине) $|E_x(y)| > 1$, то спрос считают эластичным, если $|E_x(y)| = 1$ — нейтральным, если $|E_x(y)| < 1$ — неэластичным относительно цены (или дохода).

Пример 10 Рассчитать эластичность функции $y = x^2 + 3x + 1$ и найти значение показателя эластичности для x = 3.

Решение: по формуле (VII) эластичность функции:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{x^2 + 3x + 1} \cdot (2x + 3) = \frac{x(2x + 3)}{x^2 + 3x + 1}.$$

Пусть x=3, тогда $E_{x=3}(y) = 1{,}42$. Это означает, что если независимая переменная возрастёт на 1%, то значение зависимой переменной увеличится на 1,42 %.

Пример 11 Пусть функция спроса y относительно цены x имеет вид $y = a \cdot e^{-2x}$, где a — постоянный коэффициент. Найти значение показателя эластичности функции спроса при цене x = 3 ден. ед.

Решение: рассчитаем эластичность функции спроса по формуле (VII)

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{a \cdot e^{-2x}} \left(-2a \cdot e^{-2x}\right) = -2x.$$

Полагая $x = 3$ ден.ед., получим $E_{x=3}(y) = -6$. Это означает, что при цене $x = 3$ ден.ед. повышение цены на 1% вызовет снижение спроса на 6%, т.е. спрос эластичен.

Интегралы

Определение. Функция *F(x)* называется первообразной функцией для функции *f(x)* на промежутке *X*, если в каждой точке *x* этого промежутка

$$F'(x) = f(x).$$

Если функция *f(x)* имеет первообразную *F(x)*, то она имеет бесконечное множество первообразных, причём все первообразные содержатся в выражении *F(x) + C*, где *C* — произвольная постоянная.

Определение. Совокупность всех первообразных функции *f(x)* на промежутке Х называется неопределённым интегралом от функции *f(x)* и обозначается $\int f(x)dx$, т.е. $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Свойства неопределённого интеграла

1. $\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx$, a — постоянное число.
2. $\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$.
3. $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$.
4. $[\int f(x)dx]' = f(x)$.
5. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Таблица основных интегралов

№	Формулы	№	Формулы
1	$\int 0 \cdot dx = C$	8	$\int \cos x dx = \sin x + C$
2	$\int dx = x + C$	9	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1, n - const)$	10	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
4	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	11	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $(a > 0, a \neq 1)$	12	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
6	$\int e^x dx = e^x + C$	13	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
7	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a} \right\rvert + C$

Пример 12 Найти интеграл $\int \frac{(2\sqrt{x} + 1)^2}{x\sqrt{x}} dx$.

Решение:

$$\int \frac{(2\sqrt{x} + 1)^2}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{4x + 4\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$= 4\int x^{-\frac{1}{2}} dx + 4\int \frac{dx}{x} + \int x^{-\frac{3}{2}} dx = 8x^{\frac{1}{2}} + 4\ln\lvert x\rvert - 2x^{-\frac{1}{2}} + C =$$

$$= 8\sqrt{x} + 4\ln\lvert x\rvert - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

Таблицу интегралов можно расширить, если применить формулы:

а) $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$, если $\int f(x)dx = F(x) + C$;

б) $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln|\varphi(x)| + C$.

Пример 13 Найти интегралы.

а) $\int e^{4x+5}dx = \frac{1}{4}e^{4x+5} + C$; б) $\int \sin(3x+2)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + C$;

в) $\int \frac{dx}{3-2x} = -\frac{1}{2}\cdot\int \frac{-2dx}{3-2x} = -\frac{1}{2}\ln|3-2x| + C$;

г) $\int \frac{x\ dx}{5x^2-3} = \frac{1}{10}\int \frac{10x\ dx}{5x^2-3} = \frac{1}{10}\ln\left|5x^2-3\right| + C\cdot$

Замена переменной в неопределённом интеграле
(метод подстановки)

Одним из основных методов интегрирования является метод замены переменной, описываемый следующей формулой:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\ ,$$

где $x = \varphi(t)$ — функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке.

Пример 14 Найти интегралы:

а) $\int x^2\left(3+2x^3\right)^4 dx$; б) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$; в) $\int \frac{arctg^3x}{1+x^2}dx$; г) $\int \frac{2\sin x\ dx}{\sqrt{3+\cos^2 x}}$.

Решение:

а) $$\int x^2\left(3+2x^3\right)^4 dx = \left|\begin{array}{l} 3+2x^3 = t \\ 6x^2dx = dt \\ x^2dx = \frac{1}{6}dt \end{array}\right| = \frac{1}{6}\int t^4dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{30}\left(3+2x^3\right)^5 + C ;$$

б) $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}} = \left|\begin{array}{l} x^3 = t \\ 3x^2dx = dt \\ x^2dx = \frac{1}{3}dt \end{array}\right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{3}\arcsin t + C = \frac{1}{3}\arcsin x^3 + C ;$$

в) $$\int \frac{arctg^3x}{1+x^2}dx = \left|\begin{array}{l} arctg x = t \\ \frac{1}{1+x^2}dx = dt \end{array}\right| = \int t^3dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{arctg^4x}{4} + C ;$$

г) $$\int \frac{2\sin xdx}{\sqrt{3+\cos^2 x}} = \left|\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin xdx = dt \\ \sin xdx = -dt \end{array}\right| = -2\int \frac{dt}{\sqrt{3+t^2}} = -2\ln\left|t+\sqrt{3+t^2}\right| + C =$$

$$= -2\ln\left|\cos x + \sqrt{3+\cos^2 x}\right| + C.$$

Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU ,$$

где $U = \varphi(x),\ V = \psi(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции.

При использовании этой формулы за U берётся та функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dV — та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Пример 15 Найти интегралы:

а) $\int x \cdot e^{7x} dx$; б) $\int x^3 \ln x\ dx$; в) $\int arctgx\ dx$.

Решение:

а) $\int x \cdot e^{7x} dx = \left| \begin{array}{l} U = x;\ \ dU = dx; \\ dV = e^{7x}dx;\ \ V = \int e^{7x}dx = \dfrac{1}{7}e^{7x}; \end{array} \right| = \dfrac{1}{7}x \cdot e^{7x} - \dfrac{1}{7}\int e^{7x}dx =$

$= \dfrac{1}{7}x \cdot e^{7x} - \dfrac{1}{49}e^{7x} + C.$

б) $\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} U = \ln x\ ;dU = \dfrac{1}{x}dx; \\ dV = x^3dx;\ \ V = \int x^3dx = \dfrac{x^4}{4}; \end{array} \right| = \dfrac{1}{4}x^4 \ln x - \int \dfrac{x^4}{4} \cdot \dfrac{1}{x}dx = \dfrac{x^4}{4}\ln x - \dfrac{x^4}{16} + C.$

в)

$\int arctgxdx = \left| \begin{array}{l} U = arctgx;\quad dU = \dfrac{dx}{1+x^2}; \\ dV = dx;\quad V = \int dx = x; \end{array} \right| = x \cdot arctgx - \int \dfrac{x}{1+x^2}dx = x \cdot arctgx - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$

Формула Ньютона – Лейбница

Если функция *f*(*x*) непрерывна на отрезке [a;b] и F(x) — первообразная для *f(x)* на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_b^a = F(b) - F(a) .$$

Пример 16 Вычислить: $\int_1^e \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$.

Решение:

$$\int_1^e \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx = \left| \begin{array}{l} 1+\ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \\ при \;\; x=1 \;\; t=1+\ln 1 = 1 \\ при \;\; x=e \;\; t=1+\ln e = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \sqrt[3]{t}dt = \frac{t^{\frac{4}{3}}}{4\backslash 3}\Bigg|_1^2 = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{2^4}-1\right) = -\frac{3}{4}(\sqrt[3]{16}-1)$$

Формула интегрирования по частям

$$\int_a^b U\cdot dV = U\cdot V\Big|_a^b - \int_a^b V\cdot dU$$

Пример 17

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} U = x & dU = dx \\ dV = \cos x dx & V = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x dx =$$

$$\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\sin 0 + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0 = \frac{\pi}{2}-1.$$

Дифференциальные уравнения

Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка

№	Вид уравнения	Алгоритм решения
1	Дифференциальное уравнение с разделёнными переменными. $f_1(y)dy = f_2(x)dx$ (1)	Проинтегрировать почленно $\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx + c$
2	Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. $f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0$	1. Приводим к уравнению (1) Разделим обе части уравнения на произведение $f_1(x)g_2(y)$ получим уравнение $\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx = 0$ 2. Проинтегрируем уравнение $\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy + \int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx = c$

3	Однородное дифференциальное уравнение $Q(x,y)dy + P(x,y)dx = 0$ $Q(x,y)$ и $P(x,y)$ – однородные функции одной степени относительно x и y	1. Введём замену $y = ux$ (2) $dy = udx + xdu$ (3) 2. Получим уравнение с разделяющимися переменными. 3. Находим решение полученного уравнения относительно функции u. 4. Вместо u, в полученное решение подставим $u = \frac{y}{x}$
4	Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка. $y' + P(x)y = Q(x)$ $P(x),\ Q(x)$ – либо непрерывные функции, либо постоянные числа	1. Введём замену $y = uv$ (4), $y' = u'v + v'u$ (5) и подставим в данное уравнение. 2. Получим уравнение $u'v + v'u + P(x)uv = Q(x)$ (6) $u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$ 3. Выберем v так, чтобы $v' + P(x)v = 0$ Решим уравнение с разделяющимися переменными относительно функции v. 4. Подставим в уравнение (6) вместо v найденное выражение. Получим уравнение с разделяющимися переменными, решим его и найдём u. 4. Найдём решение исходного уравнения в виде $y = uv$
5	Уравнение Бернулли $y' + P(x)y = y^n Q(x)$	1. Разделим все члены уравнения на y^n, получим уравнение $y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$ (7) 2. Введём замену $z = y^{1-n}$ (8) $z' = (1-n)y^{-n}y'$; $\frac{z'}{1-n} = y^{-n}y'$ (9) 3. Подставим в уравнение (7) выражения (8) и (9), получим линейное уравнение $\frac{1}{1-n}z' + p(x)z = Q(x)$ (10) Уравнение (10) решим заменой $z = uv$ Найдём y, используя равенство (8)

Пример 18 Найти частное решение дифференциального уравнения $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$, при условии $y(1) = 1$.

Решение: $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$;

$y(1+x)dx + x(1-y)dy = 0$ — уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим обе части уравнения на *xy*, $\frac{1+\text{x}}{\text{x}}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0$.

Интегрируя, получим: $\int \frac{1+\text{x}}{\text{x}}dx + \int \frac{1-y}{y}dy = c$; $\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy = c$;

$\ln|x| + x + \ln|y| - y = c$; $\ln|xy| + x - y = c$ — общее решение.

y(1)=1; ln1+1-1=*c*; *c*=0*;* частное решение $\ln|\text{xy}| + x - y = 0$.

Пример 19 Найти общее решение дифференциального уравнения $ydy + (x-2y)dx = 0$

Решение: Обозначим $P(y) = y$, $Q(x,y) = (x-2y)$ и проверим, являются ли эти функции однородными одной степени.

$P(ty) = ty = tP(y)$; $Q(tx,ty) = tx - 2ty = t(x-2y) = tQ(x,y)$, $P(y)$ и $Q(x,y)$ однородные функции степени 1, данное уравнение является однородным.

Применим подстановку $y = ux,\ dy = udx + xdu$; $ux(udx + xdu) + x(1-2u)dx = 0$;

разделим обе части уравнения на *x*, $u(udx + xdu) + (1-2u)dx = 0$;

$u^2dx + uxdu + (1-2u)dx = 0$; $uxdu + (1-2u+u^2)dx = 0$.

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{udu}{1\text{-}2u+u^2} + \frac{dx}{x} = 0$; $\frac{udu}{(1-u)^2} + \frac{dx}{x} = 0$; $\int\frac{udu}{(1-u)^2} + \int\frac{dx}{x} = c$;

$$\int\frac{u}{(1-u)^2}du = \left|\begin{matrix}1-u=t\\ u=1-t\\ du=-dt\end{matrix}\right| = -\int\frac{1-t}{t^2}dt = \int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt = \ln|t| + \frac{1}{t} = \ln|1-u| + \frac{1}{1-u};$$

$$\ln|1-u| + \frac{1}{1-u} + \ln|x| = c.$$

Вместо *u*, в полученное решение, подставим $u = \frac{y}{x}$

$$\ln\left|1-\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{1-\frac{y}{x}} + \ln|x| = c;\ \ln\left|\frac{x-y}{x}\right| + \frac{x}{x-y} + \ln|x| = c;\ \ln|x-y| - \ln|x| + \frac{x}{x-y} + \ln|x| = c;$$

$\ln|x-y| + \frac{x}{x-y} = c$ — общее решение уравнения.

Пример 20 Найти общее решение уравнения $y'\sin x - y\cos x = 1$.

Решение: $y' - y\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$ — уравнение линейное.

Применим подстановку $y = uv$; $y' = u'v + v'u$

$u'v + u(v' - v\frac{\cos x}{\sin x}) = \frac{1}{\sin x}$; найдем v из уравнения $v' - v\frac{\cos x}{\sin x} = 0$;

$\frac{dv}{dx} = v\frac{\cos x}{\sin x}$; $\frac{dv}{v} = \frac{\cos x}{\sin x}dx$; $\int\frac{dv}{v} = \int\frac{\cos x}{\sin x}dx$; $\ln|v| = \ln|\sin x|$; $v = \sin x$.

Функцию u найдём из уравнения

$u'v = \frac{1}{\sin x}$; $\frac{du}{dx}\sin x = \frac{1}{\sin x}$; $du = \frac{1}{\sin^2 x}dx$; $\int du = \int\frac{1}{\sin^2 x}dx$; $u = -ctgx + c$.

Искомую функцию y находим из равенства $y = uv = (c - ctgx)\sin x$

$y = c\sin x - \cos x$ — общее решение.

Пример 21 Найти общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} - xy = -y^s e^{-x^2}$.

Решение: $\frac{dy}{dx} - xy = -y^s e^{-x^2}$ — уравнение Бернулли.

Разделим обе части уравнения на y^3, $y^{-3}y' - xy^{-2} = -e^{-x^2}$.

Введём замену $z = y^{-2}$; $z' = -2y^{-3}y'$; $y^{-3}y' = -\frac{1}{2}z'$ и подставим в данное

уравнение $-\frac{1}{2}z' - xz = -e^{-x^2}$. Получили линейное уравнение.

Введём замену $z = uv$; $z' = u'v + v'u$;

$-\frac{1}{2}u'v - \frac{1}{2}v'u - xuv = -e^{-x^2}$; $\frac{1}{2}u'v + u(\frac{1}{2}v' + xv) = e^{-x^2}$; $\frac{1}{2}v' + xv = 0$; $\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + xv = 0$;

$\frac{dv}{v} + 2xdx = 0$; $\int\frac{dv}{v} = -2\int xdx$; $\ln|v| = \frac{2x^2}{-2}$; $v = e^{-x^2}$; $\frac{1}{2}u'v = e^{-x^2}$ **;**

$\frac{1}{2}\frac{du}{dx}e^{-x^2} = e^{-x^2}$**;** $du = 2dx$**;** $\int du = 2\int dx$**;** $u = 2x + c$**.**

$z = uv$ **;** $z = (2x + c)e^{-x^2}$; $y^{-2} = e^{-x^2}(2x + c)$;

$\frac{1}{y^2} = \frac{2x + c}{e^{x^2}}$ — общее решение.

Решение однородного линейного дифференциального уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$y'' + py' + gy = 0$ линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

$k^2 + pk + g = 0$ характеристическое уравнение.

Корни характеристического уравнения	Вид решения
1. k_1, k_2 – действительные различные корни	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$
2. $k = k_1 = k_2$; k_1, k_2 – действительные равные корни	$y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}$
3. $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ k_1, k_2-комплексные корни	$y = e^{dx}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$

Пример 22

$y'' - 3y' + 2y = 0$;

Характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$; $k_1=1$, $k_2=2$; $k_1 \neq k_2$

Общее решение $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

Пример 23

$y'' - 10y + 25 = 0$; $k^2 - 10k + 25 = 0$; $(k-5)^2 = 0$; $k_1 = k_2 = 5$

Общее решение $y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$

Пример 24

$y'' - 2y + 4 = 0$; $k^2 - 2k + 4 = 0$; $k_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm \sqrt{-12} = 1 \pm i\sqrt{3}$; $\alpha = 1, \beta = \sqrt{3}$

Общее решение ─ $y = e^{x}(c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x)$.

Решение неоднородного линейного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$y'' + py' + gy = f(x)$ ─ линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами p и g.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = \bar{y} + \tilde{y}$$

$\bar{y}$ ─ общее решение соответствующего однородного уравнения;

$\tilde{y}$ — частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Для подбора частного решения $\tilde{y}$ по виду правой части *f(x)* и корней характеристического уравнения можно пользоваться следующей таблицей.

Рассмотрим только те случаи, в которых корни характеристического уравнения – действительные числа.

Правая часть уравнения *f(x)*	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения уравнения
1. $\mathrm{f(x)} = \mathrm{e}^{\alpha x} P_n(x)$ α — действительное число $P_n(x)$— многочлен степени *n*>0 относительно *x*. $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$	а) α — не является корнем характеристического уравнения, т.е $\alpha \neq \mathrm{k}_1$, $\alpha \neq k_2$	$\tilde{y} = e^{\alpha x} Q_n(x)$ $Q_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$
	б) α — является корнем характеристического уравнения $\alpha = \mathrm{k}_1$, $\alpha \neq k_2$	$\tilde{y} = x e^{\alpha x} Q_n(x)$
	в) α — является двукратным корнем характеристического уравнения $\alpha = k_1 = k_2$	$\tilde{y} = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$

Пример 25 $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x$

$y'' - 3y' + 2y = 0$ однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

Правая часть $f(x) = e^{0x}(x^2 + 3x)$; $P_n(x) = x^2 + 3x$ — многочлен 2-ой степени, $n = 2$.

Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения.

$k^2 - 3k + 2 = 0$ характеристическое уравнение; $k_1 = 1$; $k_2 = 2$ — корни уравнения различные, общее решение соответствующего однородного уравнения —

$\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

Найдём частное решение неоднородного дифференциального уравнения, т. к. $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения, т. е. $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$, то вид частного решения $\tilde{y} = e^{\alpha x} Q_2(x)$; $\tilde{y} = e^{0x}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$; $\tilde{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$. Найдём $\tilde{y}' = b_1 + 2b_2 x$; $\tilde{y}'' = 2b_2$ и подставим полученные выражения $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в исходное уравнение

$$2b_2 - 3(b_1 + 2b_2 x) + 2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = x^2 + 3x;$$

$$2b_2 - 3b_1 - 6b_2 x + 2b_0 + 2b_1 x + 2b_2 x^2 = x^2 + 3x;$$

$$2b_2 x^2 + (2b_1 - 6b_2)x + (2b_2 - 3b_1 + 2b_0) = x^2 + 3x$$

Приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях x в левой и правой частях уравнения

$$\begin{cases} 2b_2 = 1 \\ 2b_1 - 6b_2 = 3 \\ -3b_1 + 2b_2 + 2b_0 = 0 \end{cases}$$, решая систему, получим $b_2 = \frac{1}{2}, b_1 = 3, b_0 = 4$.

Тогда частное решение $\tilde{y} = 4 + 3x + \frac{1}{2}x^2$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \bar{y} + \tilde{y};\ y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + 4 + 3x + \frac{1}{2}x^2.$$

Пример 26

$$y'' - y' - 2y = e^{2x}$$

$y'' - y' - 2y = 0$; $k^2 - k - 2 = 0$; $k_1 = -1$, $k_2 = 2$; $\bar{y} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$,

$f(x) = e^{2x}$; $\alpha = 2$; $P_n(x) = 1 -$ многочлен нулевой степени, $n = 0$, $Q_0(x) = b$;

$\alpha = k_2 = 2$ корень характеристического уравнения, следовательно, частное решение будем искать в следующем виде: $\tilde{y} = xbe^{2x}$;

$$\tilde{y}' = be^{2x} + 2xbe^{2x};\ \tilde{y}'' = 2be^{2x} + 2be^{2x} + 4xbe^{2x} = 4be^{2x} + 4xbe^{2x};$$

$$4be^{2x} + 4xbe^{2x} - be^{2x} - 2xbe^{2x} - 2xbe^{2x} = 2^{2x};\ 3be^{2x} = e^{2x};\ 3b = 1;\ b = \frac{1}{3};$$

$\tilde{y} = \frac{1}{3}xe^{2x}$. Общее решение $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{2x}$.

Пример 27

$$y'' - 6y' + 9y = 5e^{3x}.$$

$y'' - 6y' + 9y = 0$; $k^2 - 6k + 9 = 0$; $(k-3)^2 = 0$; $k_1 = k_2 = 3$,

$\bar{y} = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения.

$f(x) = 5e^{3x} 0,\ \alpha = 3$ — двукратный корень характеристического уравнения

$P_n(x) = 5$, $n=0$, $Q_0(x) = b$, $\tilde{y} = Q_0(x) x^2 e^{\alpha x}$;

$\tilde{y} = bx^2 e^{3x}$; $\tilde{y}' = 2bxe^{3x} + 3bx^2 e^{3x}$; $\tilde{y}'' = 2be^{3x} + 6bxe^{3x} + 9bx^2 e^{3x} + 6bxe^{3x}$

$2be^{3x} + 6bxe^{3x} + 9bx^2 e^{3x} + 6bxe^{3x} - 6(2bxe^{3x} + 3bx^2 e^{3x}) + 9bx^2 e^{3x} = 5e^{3x}$

$2be^{3x} = 5e^{3x}$; $2b = 5$; $b = \frac{5}{2}$; $\tilde{y} = \frac{5}{2} x^2 e^{3x}$.

Общее решение — $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{5}{2} x^2 e^{3x}$.

Числовые и степенные ряды

Определение. Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ соединённых знаком сложения:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (11)$$

Числа $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ называются членами ряда, а u_n — общим членом ряд.

Сумма первых n членов ряда (11) называется n-й частичной суммой ряда и обозначается S_n, т. е. $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда (11), то этот предел называется суммой ряда, а ряд называется сходящимся. Если $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ не существует или равен бесконечности, то ряд (11) называется расходящимся.

Признаки сходимости числового ряда

Необходимый признак сходимости числового ряда

Если ряд (11) сходится, то его общий член u_n стремится к 0, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Если $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

Пример 28 Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n+5}$

Решение : Проверим выполнение необходимого признака сходимости.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0$, необходимое условие сходимости не выполняется, поэтому ряд расходится.

Необходимое условие сходимости не позволяет однозначно ответить на вопрос о сходимости ряда. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Достаточные признаки сходимости числового ряда с положительными членами

Признак Даламбера. Пусть дан ряд (11) с положительными членами и существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, тогда если $\ell < 1$, то ряд сходится, если $\ell > 1$, то ряд расходится, если $\ell = 1$,то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 29 Исследовать ряд на сходимость а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

Решение: а) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$, $u_n = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$; $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \dfrac{2^n}{n^2} = \dfrac{2^n(n+1)^2}{2n^2}$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \frac{1}{2};$$

$\ell = \dfrac{1}{2} < 1$ по признаку Даламбера ряд сходится;

б) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+!}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{n}{n+1}-1)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right)^{\frac{-1}{n+1}\cdot n} = \lim_{n\to\infty}(e)^{\frac{-n}{n+1}} = e^{-1}$$

$l = e^{-1} < 1$, ряд сходится.

Замечание. Признак Даламбера применяется когда общий член ряда содержит выражение вида n! или a^n.

Признак Коши. Пусть дан ряд (11) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell$. Тогда, если $\ell<1$, то ряд сходится, если $\ell>1$, то ряд расходится, если $\ell=1$,то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 30 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^n$

Решение. По признаку Коши.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0$, $\ell=0<1\Rightarrow$ ряд сходится.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[\text{n}]{\left(\frac{3\text{n}+2}{\text{n}+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n+1}=3$, $\ell=3>1\Rightarrow$ ряд расходится.

Интегральный признак. Если члены знакоположительного ряда $\sum\limits_{\text{n}=1}^{\infty}\text{u}_\text{n}$ могут быть представлены, как числовые значения некоторой функции *f(x)*: $u_1=f(1)$, $u_2=f(2)$, $u_3=f(3)$,... $u_n=f(n)$... и функция *f(x)* – непрерывная, монотонно убывающая на интервале $(1;+\infty)$, то:

если $\int\limits_1^{+\infty}\text{f(x)dx}$ сходится, то сходится и ряд (1);

если $\int\limits_1^{+\infty}\text{f(x)dx}$ расходится, то расходится так же и ряд (1).

Признак сравнения. Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum\limits_{\text{n}=1}^{\infty}\text{u}_\text{n}$ и $\sum\limits_{\text{n}=1}^{\infty}v_\text{n}$, для всех *n* выполняется неравенство $u_n\le v_n$,

то если ряд $\sum\limits_{\text{n}=1}^{\infty}v_\text{n}$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{\text{n}=1}^{\infty}\text{u}_\text{n}$ сходится,

если ряд $\sum\limits_{\text{n}=1}^{\infty}\text{u}_\text{n}$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{\text{n}=1}^{\infty}v_\text{n}$ расходится.

Для сравнения часто используются «эталонные» ряды:

Геометрический ряд $\sum\limits_{\text{n}=1}^{\infty}a_\text{n}q^{n-1}$ – сходится при $|q|<1$, расходится при $|q|\ge1$.

Гармонический ряд $\sum\limits_{\text{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\text{n}}$ – расходится.

Обобщённый гармонический ряд $\sum\limits_{\text{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\text{n}^\alpha}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$,сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha<1$.

Знакочередующиеся ряды.

Определение. Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u^n \ . \qquad (12)$$

Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд сходится, если выполняются два условия :

1)последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т.е. $|u_1| > |u_2| > |u_3| > \ldots > |u_n| > \ldots$;

2) общий член ряда стремится к нулю $\lim\limits_{n \to \infty} |u_n| = 0$.

Пример 31 Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$.

Решение: Проверим выполнение условий признака Лейбница

1) $|u_1| = \left|\frac{(-1)^{1-1}}{2 \cdot 1 - 1)^2}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1$; $|u_2| = \left|\frac{(-1)^{2-1}}{2 \cdot 2 - 1)^2}\right| = \left|\frac{-1}{9}\right| = \frac{1}{9}$;

$|u_3| = \left|\frac{(-1)^{3-1}}{2 \cdot 3 - 1)^2}\right| = \left|\frac{1}{25}\right| = \frac{1}{25} \ldots$ члены ряда убывают по абсолютной величине.

2) $\lim\limits_{n \to \infty} |u_n| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 0$, условия признака Лейбница выполняются, данный ряд сходится.

Пример 32 Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

Решение: 1) $|u_1| = \left|(-1)^1 \frac{1}{1+1}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$; $|u_2| = \left|(-1)^2 \frac{2}{2+1}\right| = \frac{2}{3}$;

$|u_3| = \left|(-1)^3 \frac{3}{3+1}\right| = \frac{3}{4} \ldots$ члены ряда убывают по абсолютной величине;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, второе условие признака Лейбница не выполняется, ряд расходится.

Степенные ряды

Определение. Ряд вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ – (13)

называется степенным.

Числа $a_0, a_1, \ldots a_2, \ldots a_n \ldots$ называются коэффициентами ряда,

$x \in R$ — действительная переменная.

Теорема. Степенной ряд (13) сходится при значениях x, содержащихся в некотором интервале $(-R, R)$ и расходится при значениях x вне этого интервала. Этот интервал называется интервалом сходимости, а число R — радиусом сходимости.

Формула для вычисления радиуса сходимости степенного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (14)$$

Пример 33 Определить радиус сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$.

Решение: Найдём коэффициенты a_n и a_{n+1}

$a_n = \frac{1}{3^n(n+1)}$, $a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}((n+1)+1)} = \frac{1}{3^{n+1}(n+2)}$; Найдем

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;\ R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3(n+2)}{n+1}\right| = 3.$$

R=3, значит ряд сходится на интервале (-3; 3). Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x = 3$, получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{3^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$, ряд расходится, как гармонический.

При x = -3, получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{3^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$, этот ряд сходится (по признаку Лейбница). Таким образом, ряд сходится для всех $x \in [-3;\ 3)$.

Пример 34 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+1)^n}{2n-1}$.

Найдём радиус сходимости $a_n = \frac{2^n}{2n-1}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2(n+1)-1} = \frac{2^{n+1}}{2n+1}$,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{2n-1}\cdot\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{2n-1}\cdot\frac{2n+2-1}{2^n\cdot 2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(2n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \ ; \quad R = \frac{1}{2}.$$

$-\frac{1}{2} < x+1 < \frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$ — интервал сходимости.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x = -\frac{1}{2}$, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$

Для исследования ряда на сходимость воспользуемся интегральным признаком сходимости, в качестве функции *f(x)* возьмём функцию $\frac{1}{2x-1}$.

Несобственный интеграл

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x-1} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln|2b-1| - \frac{1}{2}\ln(2\cdot 1-1)\right) = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln|2b-1| = \infty$ расходится ,

следовательно и ряд расходится.

При $x = -\frac{3}{2}$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$, по признаку Лейбница ряд сходится, таким образом, интервал сходимости $-\frac{3}{2} \le x < -\frac{1}{2}$.

Задания для выполнения контрольной работы

Задание 1. Найти предел.

Таблица 2 — Данные задания 1

№		№	
1	а) $\lim_{x\to 0}\frac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$	11	а) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x-1}\right)^{4x}$		б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+5}\right)$
2	а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^4-4x^2+1}{(x-1)^2}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6-3^n}{2+3^{n+1}}$	12	а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt{2-x^2}}{2x^2-5x+3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x+3}\right)^{4x}$
3	а) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{x}$	13	а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2+2x}{x^3-x^4}$
4	а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2-8}{x^2+4x+10}$	14	а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2+6x-8}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{5x}\right)^{3x}$
5	а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{2x}$	15	а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{1-9x^2}{3x^2-10x+3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-2x+1}{5-4x^2-6x^3}\right)$
6	а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^2-x+7}{3x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\sin x}{x-\cos x}$	16	а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{x^2-4}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6^x+1}{6^{x+1}-1}$
7	а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x+5}{x^2+1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$	17	а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(2-x)3^x}{x^2-3x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-2x+1}{\sqrt{x^4+1}}$
8	а) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$ б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 8x}$	18	а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-6x+8}$

			б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-4}\right)^{2x}$
9	а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x}$	19	а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{x^2+4x-5}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{4x^2+2}}$
10	а) $\lim\limits_{x\to-4}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{8}{16-x^2}\right)$ б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$	20	а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin6x}{\sin4x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+5x-1}{3x^2-x^5}$

Задание 2. Найти: а) производную функции $\frac{dy}{dx}$

б) полный дифференциал функции $z=f(x,y)$

Таблица 3 ─ Данные задания 2

№		№	
1	а) $y=\sqrt{\ln x+x}+tg^2 3x$ б) $z=\sqrt{x}\arcsin y+2xy^2-\frac{1}{y^2}$	11	а) $y=\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\arcsin 3x\right)e^{2x}$ б) $z=\left(x^2+y^2\right)\arcsin y+2\frac{x}{y}-2$
2	а) $y=5^{x^2}\ln^2 x$ б) $z=x^2 arctgy+\sqrt{x^2+1}-\frac{2}{y}$	12	а) $y=\sqrt{x^3+1}\cos^2 5x$ б) $z=(x-y)arctgx+4\sqrt{xy}+5$
3	а) $y=\frac{\sin^2 x}{\cos 4x}$ б) $z=-4x^3y+\frac{x^4}{2y^3}+\sin 5x$	13	а) $y=\frac{arctg^3 x}{\left(x^2+3\right)^2}$ б) $z=\left(x-y^2\right)\ln x+\frac{2\sqrt{y}}{x}-4$
4	а) $y=arctg\frac{x}{3}+\ln\sqrt{x^2+3}$ б) $z=3xtg2y+2x^3y+4\sqrt{y}$	14	а) $y=arctg\frac{x}{4}+2\ln(x+2)^2$ б) $z=3x^2y+2y^2+5x^2-6x\cos y$
5	а) $y=x^4\sin^3 5x-\arcsin 3x$ б) $z=4x^2\cos 6y+2y^3x^2-5$	15	а) $y=\sin 2xe^{\cos 3x}\ln x$ б) $z=y+\sqrt{x^2+y^2}-3tgx+2$
6	а) $y=4x\ln(1-x^3)$ б) $z=(x+x^2y)\cos y+3x-7$	16	а) $y=\ln\left(\frac{1+tgx}{1-tgx}\right)^3$ б) $z=\sqrt{1-x^2}\arcsin y+2y^4x-6y$

7	а) $y=(xe^{2x}+4\sin x)^5$ б) $z=e^{x+y}+2x^3y^4-5y^3+2$	17	а) $y=\frac{4x}{2+x^2}\arcsin^4 2x$ б) $z=2\frac{x}{y}+3x^2y^5-5\sin x+7$
8	а) $y=\cos^5 2x+\ln tg\frac{x}{2}$ б) $z=2^{x-y}+4\sqrt{x}-2y^5x+1$	18	а) $y=4^{\sin^5 2x}+\cos 2x\ln x$ б) $z=x(y^2+1)-3e^yx^4+5y-1$
9	а) $y=e^{4x}\ln\cos x$ б) $z=(2x+y)\ln y+6$	19	а) $y=3^{\arccos 2x}+\frac{\cos^2 x}{2x+1}$ б) $z=y(x^2-2)+3\sqrt{y}x+6x+7$
10	а) $y=\frac{1}{2}\ln tg\frac{x}{3}-arctg^2 5x$ б) $z=3x\sqrt{y}+2y\cos x+6x$	20	а) $y=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x+2}}+e^{2x^2+3}$ б) $z=ytgx+y+2-2^{x+y}$

Задание 3. Исследовать функцию и построить график

Таблица 4 — Данные задания 3

№		№	
1	$y=\frac{x^2}{x^2+4}$	11	$y=\frac{3\ln x}{x}$
2	$y=x-2+\frac{4}{x-2}$	12	$y=x-\ln(x+2)$
3	$y=\frac{e^{x-1}}{x}$	13	$y=\frac{x^3}{2(x-1)^2}$
4	$y=\frac{x^2}{2(x-1)}$	14	$y=\frac{3-4x}{2+5x}$
5	$y=2x\ln x$	15	$y=x+\frac{27}{x^3}$
6	$y=\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{x}$	16	$y=(1+x)e^{-x}$
7	$y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x^2}$	17	$y=\frac{2x}{\ln x}$
8	$y=\frac{8x}{(x-2)^2}$	18	$y=\frac{x}{x^2-16}$
9	$y=\ln(x^2+4x+5)$	19	$y=\frac{3x^2}{x^2+1}$
10	$y=\frac{2x^2}{2x-1}$	20	$y=\frac{x^2+2}{x^2-9}$

Задание 4.

1 — 5. Предложение товара (S) относительно цены (p) определяется функцией S(p). Рассчитать эластичность функции предложения и найти значения показателя эластичности для заданных значений p. Дать экономическую интерпретацию полученным результатам.

1. $S(p)=\frac{3(4+p^2)}{1+5p}$ (усл.ед.), p = 4 (ден.ед.).

2. $S(p)=\frac{6}{12-p}$ (усл.ед.), p = 8 (ден.ед.).

3. $S(p)=3p-2$ (усл.ед.), p = 4 (ден.ед.).

4. $S(p)=\frac{9}{12-p}$ (усл.ед.), p = 3 (ден.ед.).

5. $S(p)=2p+3$ (усл.ед.), p = 2 (ден.ед.).

6 — 10. Спрос на товар (Д) в зависимости от дохода потребителей (x) определяется функцией Д(x). Рассчитать эластичность функции спроса относительно дохода и найти значение показателя эластичности для заданных значений x. Дать экономическую интерпретацию полученным результатам.

6. $Д(x)=\frac{2x}{x+4}$ (усл.ед.), x = 2 (ден.ед.).

7. $Д(x)=\frac{5(x-1)}{(x+2)}$ (усл.ед.), x = 4 (ден.ед.).

8. $Д(x)=\frac{5}{\sqrt[3]{x}}$ (усл.ед.), x = 2 (ден.ед.).

9. $Д(x)=\frac{3x}{2x+7}$ (усл.ед.), x = 3 (ден.ед.).

10. $Д(x)=\frac{8(x-2)}{x+6}$ (усл.ед.), x = 8 (ден.ед.).

11—15. Пусть функция полных затрат имеет вид К(x), где x — объём производимой продукции. Рассчитать эластичность функции полных затрат и найти значение показателя эластичности для заданных значений x. Дать экономическую интерпретацию полученных результатов.

11. $K(x)=4\ln(2+3x)$ (ден.ед.), x = 30 (усл.ед.).

12. $K(x)=2x^3+x^2+3x$ (ден.ед.), x = 20 (усл.ед.).

13. $K(x)=3x^3-6x^2+12x$ (ден.ед.), x = 4 (усл.ед.).

14. $K(x)=\ln(1+3x)^2$ (ден.ед.), x = 25 (усл.ед.).

15. $K(x)=5x^3-3x^2+10x$ (ден.ед.), x = 3 (усл.ед.).

16 ─ 20. Спрос на товар (Q) относительно цены (p) определяется функцией Q(p). Рассчитать эластичность функции спроса относительно цены и найти значение показателя эластичности для заданных значений p. Дать экономическую интерпретацию полученным результатам.

16. $Q(p)=e^{-3p}$ (усл.ед.), p = 2 (ден.ед.).

17. $Q(p)=\dfrac{500}{2p+4}$ (усл.ед.), p = 12 (ден.ед.).

18. $Q(p)=16-2p$ (усл.ед.), p = 10 (ден.ед.).

19. $Q(p)=\dfrac{p+6}{p+1}$ (усл.ед.), p = 2 (ден.ед.).

20. $Q(p)=80-2p$ (усл.ед.), p = 10 (ден.ед.).

Задание 5. Найти интеграл

Таблица 5 ─ Данные задания 5

№		№	
1	а) $\int(\frac{2}{x}+3x-\frac{4}{\sqrt{1-9x^2}})dx$ б) $\int_{-1}^{2} x\sqrt{2+x}dx$ в) $\int \ln x dx$	11	а) $\int(\frac{1}{\sqrt{2-2x^2}}-3^{-2x})dx$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ в) $\int \mathrm{arctg}2x dx$
2	а) $\int x^2(1+x^2+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$ б) $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$ в) $\int x\ln x dx$	12	а) $\int \frac{x^3-2x+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ б) $\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}}$ в) $\int \ln(1+x)dx$
3	а) $\int \frac{x^3+3x-1}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int_{-0,5}^{0,5} \frac{3^x dx}{1+9^x}$	13	а) $\int(\frac{2}{\cos^2 x}-e^{4x+2}+6x^3)dx$ б) $\int_0^{16} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

	в) $\int x\sin 3x dx$		в) $\int x2^x dx$
4	а) $\int \frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int_1^2 x^2 e^{3x^3} dx$ в) $\int arctg\, 2x dx$	14	а) $\int (\frac{3}{\sin^2 x}+6^{-2x+1}+4x)dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2^{\mathrm{tgx}}}{\cos^2 x}$ в) $\int x^2 \ln 4x dx$
5	а) $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x}dx$ б) $\int_e^{e^2} \frac{2\ln x+1}{x}dx$ в) $\int xe^{-x}dx$	15	а) $\int (\frac{\sqrt[4]{x}}{4}+3x^4-\frac{1}{4+x^2})dx$ б) $\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^8+1}$ в) $\int 4^x(x+1)dx$
6	а) $\int (2e^x+\sqrt[3]{x^2})dx$ б) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}dx$ в) $\int \arcsin 2x dx$	16	а) $\int (\frac{2}{\sqrt{x}}-3x^3+e^{2x})dx$ б) $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$ в) $\int x^2 e^{2x} dx$
7	а) $\int (3^x-2\sin 3x+5)dx$ б) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$ в) $\int \arccos 3x dx$	17	а) $\int (\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+x\sqrt{x+3})dx$ б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$ в) $\int x\cos 2x dx$
8	а) $\int (8^{-x}+\frac{x^2+2}{1+x^2})dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^3 4x dx$ в) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$	18	а) $\int (\sqrt{x\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{x^2})dx$ б) $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ в) $\int x^2 3^{x+2} dx$
9	а) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$ в) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$	19	а) $\int (\frac{4}{\sin^2 x}-\frac{2}{x^2+1}+\frac{3}{x^3})dx$ б) $\int_1^8 \frac{\mathrm{dx}}{1+\sqrt[3]{\mathrm{x}}}$ в) $\int \frac{\ln 3x}{x^2}dx$
10	а) $\int (\cos 3x+\frac{4}{\sqrt{1-6x^2}}dx)$	20	а) $\int (3\sin 2x+e^{-2x}+\frac{1}{4x})dx$

	б) $\int_0^{\frac{\pi}{16}} \frac{2-tg4x}{\cos^2 4x}dx$ в) $\int x\cos 2x dx$		б) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}dx$ в) $\int (x+2)e^x dx$

Задание 6. Решить дифференциальные уравнения.

Таблица 6 ─ Данные задания 6

№		№	
1	а) $(1+x)dx-(y+2)dy=0$ б) $y''-2y'-8y=e^{2x}$	11	а) $xy+y^2=(2x^2+xy)y'$ б) $y''-5y+6y=2xe^{4x}$
2	а) $x+xy+y'(y+2xy)=0$ б) $y''-y'-2y=x+2$	12	а) $y'-\frac{3y}{x}=x$ б) $y''+6y'+9y=10e^{-3x}$
3	а) $2y'\sqrt{x=y}$ б) $y''-4y'-5y=3e^{-x}$	13	а) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{e^{-x^2}}{x}$ б) $y''+5y'=xe^{-2x}$
4	а) $(x^2+x)\ y'=2y+1$ б) $y''-6y'=3x+2$	14	а) $yy'=2y-x$ б) $2y''-y'-y=x+1$
5	а) $(1+x^2)y'+(1+y^2)=0$ б) $y''-2y'-3y=2x+1$	15	а) $x^2y'-xy=y^2$ б) $y''+3y'-10y=xe^{-2x}$
6	а) $\frac{dy}{dx}(1+x)^3-(y-2)^2=0$ б) $y''-9y=9e^{3x}$	16	а) $xy'=y(1+\ln\frac{y}{x})$ б) $y''+2y'-8y=4e^{2x}$
7	а) $(y+xy)+(x-xy)y'=0$ б) $y''-3y'+2y=xe^{3x}$	17	а) $(1-x^2)y'-xy=xy^2$ б) $y''-y'+y=x^2+4$
8	а) $2(1+e^x)y\frac{dy}{dx}=e^x$ б) $y''+4y'-5y=5x^2-3x+5$	18	а) $y'-y=e^x$ б) $y''-4y'+4y=(2x+5)e^{2x}$
9	а) $(1+x^2)y^3dx-(y^2-1)x^3dy=0$ б) $y''-4y'+4y=8x$	19	а) $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x$ б) $2y''-y'-y=3x$
10	а) $y'=3y^3\ln x$ б) $y''-y'+y=x^3+6$	20	а) $y'\sin x-y\cos x=1$ б) $y''-25y'=4e^{5x}$

Задание 7. Исследовать ряд на сходимость.

Таблица 7 — Данные задания 7

№		№	
1	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$	11	а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{n+1}x^n$
2	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	12	а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n+3}x^n$
3	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$	13	а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$	14	а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{4n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}(x+3)^n$
5	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$	15	а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n^3}$
6	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$	16	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{(2n+1)2^n}$
7	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!x^n}{3^n}x^n$	17	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}(x+1)^n$
8	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+3}$	18	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n7^n}$
9	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{5n}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}x^n$	19	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(3n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n4^n}$
10	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}x^n$	20	а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{3n+3}$