

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Кузбасский государственный технический
университет имени Т.Ф. Горбачева»

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА

Контрольная работа № 3 и методические
указания для студентов 2 курса
специальности БЭсз 080101.65
/заочной формы обучения/

Составитель В. И. Грибков

Кемерово 2014

Контрольная работа № 3 составлена в соответствии с программой курса «Математика» для студентов специальности «Экономическая безопасность» заочной формы обучения.

Номера задач контрольной работы студент должен выбрать по таблице «Выбор номеров контрольных задач» следующим образом:

- выбрать строку, соответствующую первой букве фамилии;
- выбрать столбец, соответствующий последней цифре номера зачетной книжки;
- на пересечении выбранных строки и столбца взять номера задач.

Контрольная работа, выполненная не по своему варианту, возвращается непроверенной. Требования к оформлению смотрите на сайте кафедры: matematika.kuzstu.ru/ Студентам.

ПРОГРАММА 2 КУРСА (3 СЕМЕСТР)

Рабочая программа дисциплины «Математика» составлена в соответствии с ФГОС ВПО и примерной ООП подготовки специалистов «Экономическая безопасность» заочной формы обучения.

1. Неопределённый интеграл
 - 1.1. Первообразная (неопределённый интеграл), её свойства. Таблица интегралов.
 - 1.2. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.
 - 1.3. Использование таблиц (справочников) неопределённых интегралов.
2. Определённый интеграл
 - 2.1. Задачи, приводящиеся к понятию определённого интеграла.
 - 2.2. Определённый интеграл как предел интегральных сумм.
 - 2.3. Основные свойства определённого интеграла.
 - 2.4. Формула Ньютона-Лейбница.
 - 2.5. Приложения определенного интеграла.
3. Теория функций комплексного переменного.
 - 3.1. Комплексные числа и действия над ними.
 - 3.2. Алгебраические действия над комплексными числами.

Выбор номеров задач контрольной работы

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
А В Д	1 37 52 75	2 38 53 76	3 39 54 77	4 40 55 78	5 41 54 79	6 42 55 80	7 43 56 81	8 44 57 82	9 45 58 83	10 46 59 84
Б Е З	11 32 47 85	12 33 48 86	13 34 49 87	14 35 50 88	15 36 51 89	16 37 52 90	17 38 53 61 137	18 39 54 62	19 40 55 63	20 41 56 64
Г Ж И Л	21 42 57 65	22 43 58 66	23 44 59 67	24 45 60 68	25 31 46 69	26 32 47 70	27 33 48 71	28 34 49 72	29 35 50 73	30 36 51 74
К	1 38 53 76	2 39 54 77	3 40 55 78	4 41 56 79	5 42 57 80	6 43 58 81	7 44 59 82	8 45 60 83	9 31 46 84	10 32 47 85
М Н О	11 34 49 86	12 32 41 87	13 35 50 88	14 36 51 89	15 37 52 90	16 38 53 61	17 39 54 62	18 40 55 63	19 41 56 64	20 42 57 65
П Х Ц Ш	21 43 58 65	22 44 59 66	23 45 60 67	24 31 46 68	25 32 47 69	26 33 48 70	27 34 49 71	28 35 50 72	29 36 51 73	30 37 52 84
С У Ё Ы Й	1 39 59 74	2 37 57 75	3 38 58 76	4 40 60 77	5 31 44 78	6 32 45 79	7 33 46 80	8 34 47 81	9 35 48 82	10 36 49 83
Р Т Ф	21 41 57 66	22 42 58 67	23 43 59 68	24 44 60 69	25 36 50 70	26 31 44 71	27 32 45 72	28 33 46 73	29 34 47 74	30 35 48 75
Ч Щ Э Ю Я	11 33 43 86	12 39 49 87	13 40 50 88	14 41 51 89	15 42 52 90	16 43 53 61	17 44 54 62	18 45 55 63	19 46 56 64	20 47 57 65

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Для вычисления неопределённых интегралов (№ 1-30) необходимо проработать в литературе раздел «Неопределенный интеграл. Методы интегрирования».

Для выполнения задания 1-30 (пункт а) нужно из таблицы интегралов выбрать такой, к которому можно свести данный интеграл.

Пример 1. При вычислении

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+2)^5}} = \int (5x+2)^{-\frac{5}{3}} dx,$$

используем табличный интеграл

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c.$$

Согласно этой формуле, подводим под знак дифференциала основание степени. Так как $d(5x+2) = 5dx$, то умножим и разделим интеграл на 5, то есть

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+2)^5}} &= \int (5x+2)^{-\frac{5}{3}} dx = \frac{1}{5} \int (5x+2)^{-\frac{5}{3}} \cdot 5dx = \frac{1}{5} \int (5x+2)^{-\frac{5}{3}} d(5x+2) = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x+2)^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + c = -\frac{3}{10} (5x+2)^{-\frac{2}{3}} + c = -\frac{3}{10 \sqrt[3]{(5x+2)^2}} + c. \end{aligned}$$

Пример 2. Интеграл $\int x \cdot e^{3x^2-1} dx$ сводится к табличному $\int e^u du = e^u + c$ путём подведения под знак дифференциала показателя степени $d(3x^2-1) = 6xdx$. Таким образом

$$\int x \cdot e^{3x^2-1} dx = \frac{1}{6} \int e^{3x^2-1} 6xdx = \frac{1}{6} \int e^{3x^2-1} d(3x^2-1) = \frac{1}{6} e^{3x^2-1} + c.$$

Пример 3. В интеграле $\int \frac{3 \cos x \cdot dx}{2 + \sin x}$ используем формулу $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$, где под знак дифференциала подводится знаменатель дроби. Так как $d(2 + \sin x) = \cos x dx$, то

$$3 \int \frac{\cos x dx}{2 + \sin x} = 3 \int \frac{d(2 + \sin x)}{2 + \sin x} = 3 \cdot \ln|2 + \sin x| + c.$$

При вычислении интегралов в пункте б) применяются методы подстановки и интегрирования по частям, то есть по формуле $\int u dv = uv - \int v du$ мы от исходного интеграла $\int u dv$ переходим к более простому интегралу $\int v du$.

Пример 4. $\int x \cdot \arctg x dx = \int \arctg x \cdot x dx$, то есть возьмём

$$\left[\begin{array}{l} u = \arctg x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = x dx \Rightarrow v = \int dv = \int x dx = \frac{x^2}{2}. \end{array} \right]$$

(здесь при нахождении v константу c полагаем равной 0). Получим

$$\int x \cdot \arctg x dx = \int \arctg x \cdot x dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{dx}{1+x^2}.$$

Возьмём $\int x^2 \cdot \frac{dx}{1+x^2}$ отдельно

$$\int x^2 \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctg x + c$$

Итак

$$\int x \cdot \arctg x dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} (x - \arctg x) + c.$$

Пример 5. Найти $\int x \cdot e^{-3x} dx$. Пусть

$$\left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx, \\ dv = e^{-3x} dx \Rightarrow v = \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int e^{-3x} d(-3x) = -\frac{1}{3} e^{-3x}. \end{array} \right].$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{-3x} dx &= x \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) - \int \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) dx = -\frac{x e^{-3x}}{3} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx = \\ &= -\frac{x e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9} + c. \end{aligned}$$

Пример 6. При вычислении интеграла $I = \int \frac{2+\sqrt{x+1}}{x+3} dx$ сделаем

подстановку $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1 \Rightarrow x = u^2 - 1 \Rightarrow dx = 2u du$,

$$x+3 = u^2 - 1 + 3 = u^2 + 2.$$

$$\text{Получим } I = \int \frac{2+\sqrt{x+1}}{x+3} dx = \int \frac{2+u}{u^2+2} 2u du = 2 \int \frac{2u+u^2}{u^2+2} du.$$

Дробь $\frac{2u+u^2}{u^2+2}$ неправильная (степень числителя не меньше степени знаменателя). Выделим целую часть

$$\frac{(u^2 + 2) - 2 + 2u}{u^2 + 2} = 1 - \frac{2}{u^2 + 2} + \frac{2u}{u^2 + 2}.$$

$$\text{Итак } I = 2 \int \frac{2u + u^2}{u^2 + 2} du = 2 \left(\int du - \int \frac{2du}{u^2 + 2} + \int \frac{2udu}{u^2 + 2} \right) = 2u - \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}} + \\ + 2 \cdot \ln(u^2 + 2) + c = 2\sqrt{x+1} - \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{2}} + 2 \cdot \ln|x+3| + c.$$

Здесь $\int du$ и $\int \frac{du}{u^2 + 2}$ табличные, а

$$\int \frac{2udu}{u^2 + 2} = \int \frac{d(u^2 + 2)}{u^2 + 2} = \ln(u^2 + 2) + c.$$

Для нахождения площадей плоских фигур и объёмов тел вращения в задачах № 31-60 рекомендуется изучить в литературе раздел «Определенный интеграл. Свойства определенного интеграла. Приложения определенного интеграла».

Пример 7. Найти площади частей, на которые круг $x^2 + y^2 = 12$ делится параболой $y = x^2$.

Сделаем схематический чертёж (рис.1) и найдём точки пересечения этих линий

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 12 - y^2 \\ x^2 = y \end{cases} \Rightarrow 12 - y^2 = y \Rightarrow \\ y^2 + y - 12 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}, \quad y = 3.$$

В точке пересечения $x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$. Площадь меньшей

$$S_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{12 - x^2} dx - \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^2 dx = \left(\frac{x}{2} \sqrt{12 - x^2} + 6 \cdot \arcsin \frac{x}{\sqrt{12}} \right) \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{12 - 3} + 6 \cdot \arcsin \sqrt{\frac{3}{12}} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{12 - 3} - 6 \cdot \arcsin \sqrt{\frac{3}{12}} \right) - \\ - \left(\frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{-3\sqrt{3}}{3} \right) = 3\sqrt{3} + 12 \cdot \frac{\pi}{6} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\pi.$$

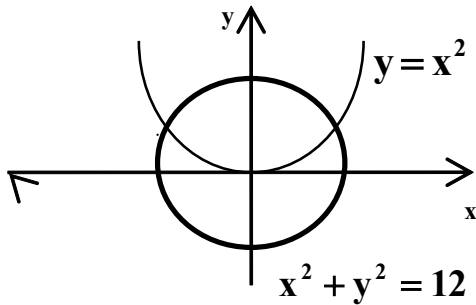


Рис.1

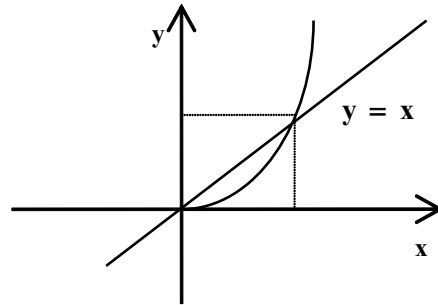


Рис.2

Площадь большей части $S_2 = \pi r^2 - S_1 = \pi \cdot 12 - \sqrt{3} - 2\pi = 10\pi - \sqrt{3}$.

Пример 8. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x\sqrt{\sin x}$, $0 \leq x \leq \pi$.

Сделаем схематический чертёж (рис.2) и найдём точки пересечения этих

линий $\begin{cases} y = x \\ y = x\sqrt{\sin x} \end{cases} \Rightarrow x - x\sqrt{\sin x} = 0, x_1 = 0, 1 - \sqrt{\sin x} = 0, \sin x = 1, x_2 = \frac{\pi}{2}$.

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_a^b y_1^2 dx - \pi \int_a^b y_2^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \sin x dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} - 2x \sin x + (x^2 - 2) \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left(\frac{\pi^3}{24} - \pi + 2 \right),$$

$$\int x^2 \sin x dx = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x.$$

При нахождении длины дуги в задачах № 31-60 и массы неоднородной линии в задачах № 61-90 следует помнить, что дифференциал длины дуги выражается различными.

- 1) $ds = \sqrt{1 + (y'_x)^2} \cdot dx$, если линия задана в декартовых координатах;
- 2) $ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} \cdot dt$, если линия задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$;
- 3) $ds = \sqrt{r^2 + (r'(\theta))^2} \cdot d\theta$, если линия задана в полярных координатах $r = r(\theta)$.

Пример 9. Найти длину дуги кривой $r = \cos^2 \frac{\theta}{2}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Вычисляем $ds = \sqrt{r^2 + (r'(\theta))^2} \cdot d\theta$, $r'_\theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(-\sin \frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$.

$$r^2 + (r'(\theta))^2 = \cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$ds = \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = \cos \frac{\theta}{2} d\theta,$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Пример 10. Найти массу участка линии

$$L: \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ если плотность } \gamma = 3y.$$

$$m = \int_L \gamma \cdot ds.$$

Найдём $ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} \cdot dt$,

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \cdot \sin t,$$

$$ds = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \cdot dt =$$

$$= a \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \cdot dt =$$

$$= a \sqrt{2 - 2 \cos t} \cdot dt = a \sqrt{2} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \cdot dt = 2a \sin \frac{t}{2} \cdot dt.$$

$$m = \int_0^{2\pi} 3a(1 - \cos t) \cdot 2a \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 6a^2 \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 12a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt =$$

$$= 12a^2 \left(-2 \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \cos^3 \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 12a^2 \left(2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} \right) = 32a^2.$$

3. Теория функций комплексного переменного

3.1. Комплексные числа и действия над ними.

По данному разделу лучше взять учебник Письменного и пособие Рябушко, ч.2.

Комплексными числами называются числа вида $z = x + i y$, где $i^2 = -1$, x, y – действительные числа, $x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть, $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа.

По определению, два комплексных числа: $z_1 = x_1 + i y_1$ и $z_2 = x_2 + i y_2$ – равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

Комплексное число $\bar{z}$ называется сопряженным комплексному числу z , если $\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$. Другими словами, если $z = x + i y$, то $\bar{z} = x - i y$.

Всякому комплексному числу $x + i y$ можно поставить в соответствие единственную точку плоскости $M(x, y)$ и обратно, всякую точку $M(x, y)$ плоскости $ХОУ$ можно рассматривать как геометрический образ единственного комплексного числа $x + i y$.

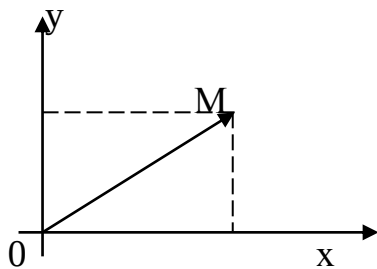


Рисунок 1

Для сокращения изложения не говорят: "точка, соответствующая комплексному числу $x + i y$ ", а говорят просто – "точка $x + i y$ ". При этом множество всех действительных чисел изображается точками оси абсцисс, которая поэтому называется действительной осью, множество чисто мнимых чисел $i y$ точками оси ординат, называемой мнимой осью. Заметим, что одна точка мнимой оси, а именно начало координат,

изображает действительное число нуль. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется комплексной плоскостью.

В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением числа $x + i y$ радиус-вектор точки $M(x, y)$.

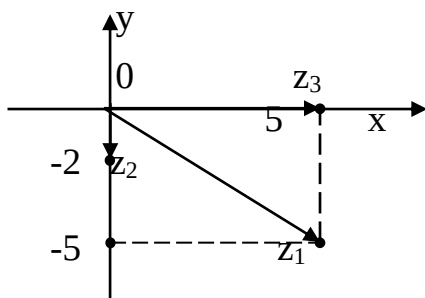


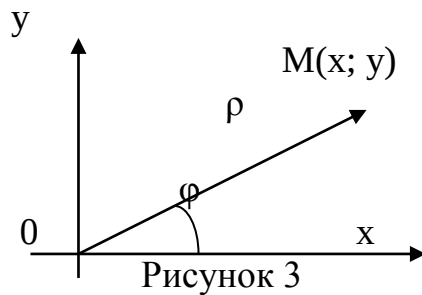
Рисунок 2

Пример 11. Построить точки $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 5$.

В дальнейшем, наряду с представлением комплексных чисел в декартовых координатах, полезно иметь их представление в обобщенных полярных координатах.

Рассмотрим число $x + i y$, которому на плоскости соответствует точка $M(x, y)$. Ее

координаты в полярной системе координат (ρ, φ) .



Тогда $x = \rho \cos \varphi$,

$y = \rho \sin \varphi$.

$$z = x + i y = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Полярный радиус $\rho = |OM|$ называется модулем комплексного числа и обозначается $|z| = \rho$.

Полярный угол φ называется аргументом комплексного числа и обозначается $\varphi = \text{Arg } z$. Тогда

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| (\cos \text{Arg } z + i \sin \text{Arg } z).$$

Эта форма называется тригонометрической формой комплексного числа.

Модуль комплексного числа определяется однозначно: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π . Главным значением аргумента называется значение, заключенное в интервале $(-\pi, \pi]$. Обозначается оно $\arg z$. Таким образом, $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Очевидно, $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$.

Главное значение аргумента определяется однозначно.

Так как $\text{tg } \arg z = \frac{y}{x}$,

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } (x, y) \in \text{I, IV четвертям,} \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & \text{если } (x, y) \in \text{II четверти,} \\ \arctg \frac{y}{x} - \pi, & \text{если } (x, y) \in \text{III четверти.} \end{cases}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа будет иметь вид

$$z = |z| (\cos(\arg z + 2k\pi) + i \sin(\arg z + 2k\pi)).$$

Пример 12. Написать в тригонометрической форме комплексное число $z = -1 + i$.

Решение. $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\text{tg } \varphi = -1$,

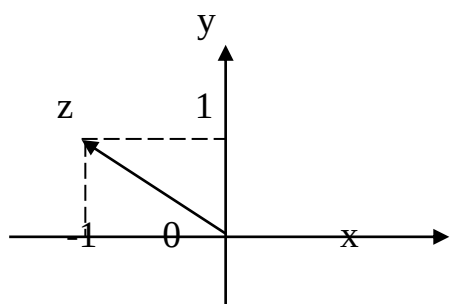


Рисунок 4

$$\arg z = \arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi.$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) \right).$$

Пусть $z = x + i y = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$. Используя формулу Эйлера $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$, получаем так называемую показательную форму записи комплексного числа:

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}.$$

Пример 13. Представить в показательной форме комплексное число $z = -1 - i$.

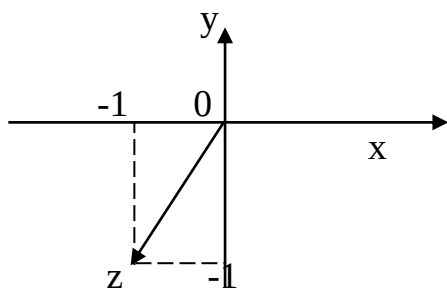


Рисунок 5

Решение

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = 1,$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi,$$

$$-1 - i = \sqrt{2} e^{-\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i}.$$

Пример 14. Вычислить $e^{\pi i}$.

Решение. По формуле Эйлера $e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.

3.2. Алгебраические действия над комплексными числами.

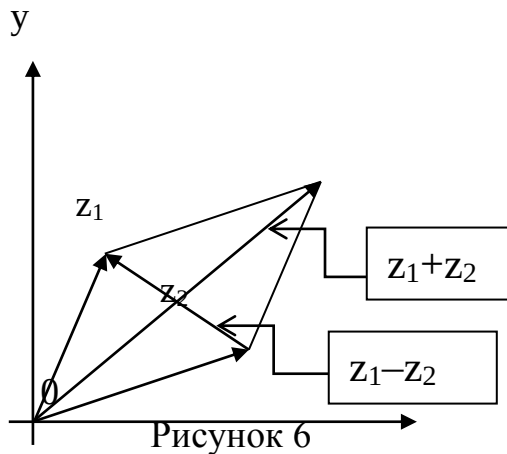
Сложение и умножение комплексных чисел производится по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов с учетом $i \cdot i = -1$. При записи результата следует разделить действительную часть от мнимой части, т. е. собрать отдельно члены, содержащие множитель i и члены, не содержащие множитель i :

$$(x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2),$$

$$(x_1 + i y_1) - (x_2 + i y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

В частности, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Операции сложения и вычитания сводятся к сложению и вычитанию векторов, изображающих эти числа. Отсюда расстояние между точками $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.



Пример 15.

$|z - z_0| = R$ – уравнение окружности с центром в точке z_0

и радиусом равным R .

Деление на комплексное число, отличное от нуля, определяется как действие, обратное действию умножения.

Для представления частного в виде $\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$

следует провести простые преобразования, показанные на следующем примере.

Пример 16.
$$\frac{3-i}{1+2i} = \frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-6i-i-2}{1+4} = \frac{1-7i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Для модуля и аргумента произведения и частного справедливы следующие утверждения:

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$.

Пример 17. Найти модуль и аргумент произведения $z \cdot i$.

Решение. $|z \cdot i| = |z|$, $\operatorname{Arg}(z \cdot i) = \operatorname{Arg} z + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$.

Таким образом, умножение на i соответствует повороту вектора z на угол $\frac{\pi}{2}$;

2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$.

Пусть $z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$.

Тогда $z^2 = z \cdot z = |z|^2(\cos 2 \operatorname{Arg} z + i \sin 2 \operatorname{Arg} z)$.

Можно доказать методом полной математической индукции, что для любого целого $n > 0$: $z^n = |z|^n (\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z)$ (формула Муавра). Формула справедлива и для целых отрицательных n .

Пример 18. Вычислить $(\sqrt{3} - i)^5$.

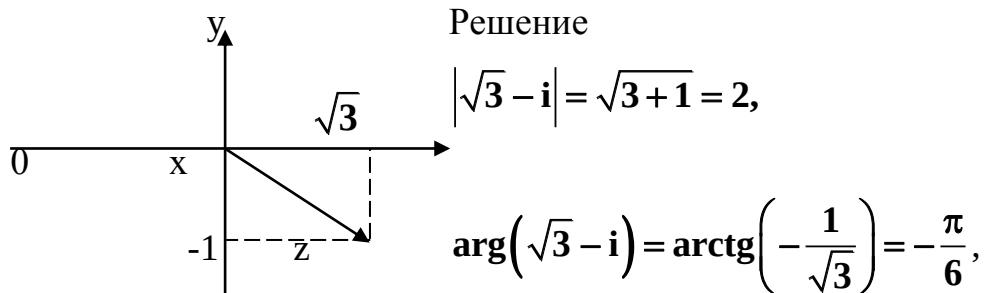


Рисунок 7

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \right),$$

$$(\sqrt{3} - i)^5 = 2^5 \left(\cos\left(-\frac{5}{6}\pi + 10k\pi\right) + i \sin\left(-\frac{5}{6}\pi + 10k\pi\right) \right) =$$

$$= 32 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = -16\sqrt{3} - 16i.$$

Корнем n -ой степени из комплексного числа называется такое число w , для которого $w^n = z$.

Используя формулу Муавра, получим

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \operatorname{Arg} w = \frac{\operatorname{Arg} z}{n} = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Для других значений k аргументы будут отличаться от полученных на число кратное 2π , и, следовательно, получатся значения корня, совпадающие с рассмотренными ранее. Итак, корень n -ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Пример 19. Найти все значения $\sqrt[3]{-8}$ и построить их.

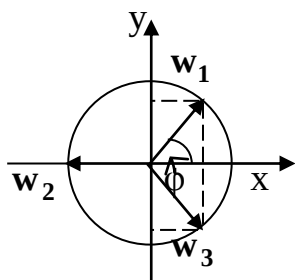


Рисунок 8

Решение. $|-8| = 8$, $\arg(-8) = \pi$,

$$-8 = 8(\cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)),$$

$$\sqrt[3]{-8} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right),$$

$$k = 0, \quad w_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$k = 1, \quad w_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3} \right) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2,$$

$$k = 2, \quad w_3 = 2 \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Контрольная работа №3

1-30. Вычислить неопределённые интегралы.

1. a) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}},$

b) $\int \arccos x \cdot dx.$

2. a) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x},$

b) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+5} \cdot dx.$

3. a) $\int \frac{x dx}{x^4 + 1},$

b) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \cdot dx.$

4. a) $\int \frac{dx}{4x^2 + 7},$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x-3}-1} \cdot dx$

5. a) $\int x \cdot \cos(x^2) dx,$

b) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} \cdot dx.$

6. a) $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x dx,$

b) $\int \frac{1}{(x+12)\sqrt{x+3}} \cdot dx.$

7. a) $\int x^2 \cdot \sqrt{x^3 + 5} \cdot dx,$

b) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{(x-1)^3}} \cdot dx.$

8. a) $\int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x} dx,$

b) $\int \arcsin x \cdot dx.$

9. a) $\int \frac{x dx}{4x^2 + 7},$

10. a) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} + 5},$

11. a) $\int \frac{e^{\sqrt{2x+1}} dx}{\sqrt{2x+1}},$

12. a) $\int x(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} dx,$

13. a) $\int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx,$

14. a) $\int \frac{\sin x dx}{4 - \cos x},$

15. a) $\int \frac{\sqrt{3 - \ln 2x} \cdot dx}{x},$

16. a) $\int x \cdot e^{x^2 - 3} dx,$

17. a) $\int \frac{2 dx}{4x - x \ln x},$

18. a) $\int \frac{dx}{1 + \cos 6x},$

19. a) $\int \frac{\sin 2x \cdot dx}{1 - \cos 2x},$

20. a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 5}},$

21. a) $\int \frac{4 dx}{\sqrt{2 - 6x^2}},$

22. a) $\int \frac{\cos x \cdot dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}},$

23. a) $\int x \cdot e^{-x^2} dx,$

24. a) $\int \frac{\sin \sqrt{x} \cdot dx}{\sqrt{x}},$

25. a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 - 1}},$

26. a) $\int \frac{\cos x \cdot dx}{\sqrt[3]{3 + 5 \sin x}},$

b) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot dx.$

b) $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{x + 3\sqrt{x}} \cdot dx.$

b) $\int \frac{1 - \sqrt{x+2}}{(x+2) - 2\sqrt{x+2}} \cdot dx.$

b) $\int \frac{\sin^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx.$

b) $\int \frac{1 + \sqrt{x+4}}{x+5} \cdot dx.$

b) $\int (x+2) \ln x \cdot dx.$

b) $\int x^2 \arcsin x \cdot dx.$

b) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \cdot dx.$

b) $\int x^2 \cdot e^{3x} \cdot dx.$

b) $\int \frac{x}{\sin^2 x} \cdot dx.$

b) $\int \frac{x \cdot \sin x}{\cos^2 x} \cdot dx.$

b) $\int \frac{4+x}{\sqrt{x+1}+7} \cdot dx.$

b) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+11} \cdot dx.$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{3+e^x}} \cdot dx.$

b) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} \cdot dx.$

b) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}} \cdot dx.$

b) $\int x^2 \cdot e^{-2x} \cdot dx.$

b) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot dx.$

27. а) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x},$

б) $\int x^2 \cdot \cos x \cdot dx.$

28. а) $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5 \cdot \sqrt{1-x^2}},$

б) $\int \sqrt{x} \cdot \ln^2 x \cdot dx.$

29. а) $\int \frac{dx}{\arctg^3 x \cdot (1+x^2)},$

б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \cdot dx.$

30. а) $\int \frac{\sqrt{\arcsin^3 x} \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}},$

б) $\int x^2 \cdot \sin 2x \cdot dx.$

31-60. Задачи на геометрические приложения определённого интеграла

31. Найти площади частей, на которые круг $x^2 + y^2 \leq 8$ делится параболой

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

32. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = x(x-1)^2$ и осью абсцисс Ox .

33. Найти длину дуги параболы $y = x^2$ от точки $(0,0)$ до точки $(1,1)$.

34. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}x^2$ и $2x + 2y - 3 = 0$.

35. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 0$ и $y = \sin^2 x$, $(0 \leq x \leq \pi)$.

36. Найти площадь фигуры, ограниченной параблами $x^2 + 8y = 8$ и $x^2 - 24y = 40$.

37. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.

38. Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками её пересечения с осью Ox .

39. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{4x}$, $y = 0$, $x = 1$.

40. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ от точки $x = \sqrt{3}$ до точки $x = \sqrt{8}$.

41. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией

$$y = x - x^{\frac{3}{2}} \text{ и осью абсцисс } Ox.$$

42. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси **Ox** фигуры, ограниченной линиями $y = x \cdot e^x$, $x = 1$, $y = 0$.
43. Найти площади фигур, на которые парабола $y^2 = 6x$ делит круг $x^2 + y^2 \leq 16$.
44. Вычислить площадь фигуры, заключённой между линией $y = \frac{1}{1+x^2}$ и параболой $y = 0,5x^2$.
45. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси **Oy** фигуры, ограниченной линиями $y = 0,5(x-2)^2$ и $y = 2$.
46. Найти длину дуги кривой $x = \frac{1}{6}t^6$, $y = 4 - \frac{1}{4}t^4$ между точками её пересечения с осями координат.
47. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси **Ox** фигуры, ограниченной линиями $y = e^{2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$, $x = 0$.
48. Найти длину дуги кривой $y = \ln(1-x^2)$ от точки $x = 0$ до точки $x = 0,5$.
49. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$.
50. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = \arcsin x$ и прямыми $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$.
51. Найти длину дуги кривой $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ от $t = 0$ до точки $t = 1$.
52. Найти объём тела, образованного вращением параболического сегмента с основанием $2a$ и высотой h вокруг высоты.
53. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x + 1$ и $y^2 = 9 - x$.
54. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.
55. Найти длину дуги астроида $x = a \cdot \cos^3 t$, $y = a \cdot \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
56. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки **M(4,8)**.

57. Фигура ограничена кривой $x = a \cdot \cos t$, $y = a \cdot \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ и осями координат Ox , Oy . Найти объём тела вращения.

58. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 3$ и осью Oy .

59. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$, $x = 0$.

60. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 1$, $y = 4$, $y = 2x$, $y = \sqrt{x}$.

Задачи № 61-90. Задания: а) представить комплексное число в тригонометрической форме, б) представить комплексное число в показательной форме; в) выполнить указанные действия над комплексными числами, г) вычислить корень или решить уравнение.

61. а) $1+i$, б) $3-3\sqrt{3}i$, в) $\frac{7-5i}{1-2i} + i(1-i)$, г) $\sqrt[4]{1-i}$;

62. а) $1-i$, б) $2-2i$, в) $\frac{7-2i}{2+i} + (i)^{11}$, г) $\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i}$;

63. а) $-1+i$, б) $\frac{7}{2} + \frac{7}{2\sqrt{3}}i$, в) $\frac{5}{1+2i} + (i)^{18}$, г) $\sqrt{-1,2-1,2i}$;

64. а) $-1-i$, б) $-5+5i$, в) $\frac{1+i}{1-i} + (i)^4$, г) $\sqrt[3]{3i-\sqrt{3}}$;

65. а) $-2i$, б) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, в) $-\frac{12}{5}i + i(2+i)^2$, г) $\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{3}}i}$;

66. а) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, б) $1+\sqrt{3}i$, в) $(i)^{23} - \frac{17-6i}{3-4i}$, г) $\sqrt{7+7i}$;

67. а) $-\sqrt{3}+i$, б) $4i$, в) $\frac{4}{1+\sqrt{3}i} + \frac{\sqrt{3}}{i}$, г) $\sqrt[3]{-\sqrt{2}-\sqrt{6}i}$;

68. а) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, б) $-\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$, в) $(3i+2) \cdot (-i)^9 + \frac{i+1}{i-1}$, г) $\sqrt[5]{i-1}$;

69. а) $\sqrt{3}+i$, б) $-\sqrt{2}-\sqrt{6}i$, в) $(0,2-0,3i) \cdot (0,5+0,6i) + (i)^{26}$,
г) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$;

$$70. \text{ a) } 0,5 + 0,5\sqrt{3}i, \text{ б) } 1 - i, \text{ в) } (3 + \sqrt{3}i) \cdot (3 - \sqrt{3}i) + (i)^{33}, \text{ г) } \sqrt[4]{-1 + \sqrt{3}i};$$

$$71. \text{ a) } -\sqrt{3} + \sqrt{3}i, \text{ б) } 2i, \text{ в) } \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}, \text{ г) } \sqrt[3]{-2-2i};$$

$$72. \text{ a) } 3\sqrt{3} - 3i, \text{ б) } -\sqrt{3} + i, \text{ в) } (i)^{37} + \frac{7+5i}{1-2i}, \text{ г) } z^4 - 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}i = 0;$$

$$73. \text{ a) } 0,5 - 0,5i, \text{ б) } -2, \text{ в) } (i)^{25} - \frac{3-4i}{4-3i}, \text{ г) } z^2 - 7 + 7i = 0;$$

$$74. \text{ a) } 4i, \text{ б) } i, \text{ в) } \frac{32}{1+3\sqrt{3}i} - \frac{3\sqrt{7}}{2i}, \text{ г) } z^6 - \sqrt{3} - i = 0;$$

$$75. \text{ a) } -0,7 + 0,7i, \text{ б) } 1 + i, \text{ в) } \frac{1-i^2}{(1+i)^2} + 3 + i, \text{ г) } z^4 + 1 + \sqrt{3}i = 0;$$

$$76. \text{ a) } 1 - \sqrt{3}i, \text{ б) } -1 + i, \text{ в) } (i)^{44} - \frac{1-i}{i}, \text{ г) } z^4 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 0;$$

$$77. \text{ a) } -2 + 2i, \text{ б) } -1 - i, \text{ в) } (-0,5 - 0,5\sqrt{3}i)^2 + 0,5\sqrt{3}(i)^{35}, \\ \text{ г) } z^3 - \sqrt{2} + \sqrt{6}i = 0;$$

$$78. \text{ a) } 3i, \text{ б) } \sqrt{3} + i, \text{ в) } \left(\frac{1 + \sqrt{7}i}{2} \right)^4, \text{ г) } z^5 + 1 + i = 0;$$

$$79. \text{ a) } -1, 2, \text{ б) } -2i, \text{ в) } (2 - \sqrt{2}i)^2 + \frac{1+i}{i}, \text{ г) } z^4 - 1 + \sqrt{3}i = 0;$$

$$80. \text{ a) } \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \text{ б) } 3 - 3i, \text{ в) } (i)^{17} + \frac{2i}{(3-i)}, \text{ г) } z^2 + 2 - 2i = 0;$$

$$81. \text{ a) } -\sqrt{2} - \sqrt{6}i, \text{ б) } -3i, \text{ в) } \frac{(2-i)}{3+i} \cdot (1+i^6) + (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^2, \text{ г) } z^3 - \frac{i}{8} = 0.;$$

$$82. \text{ a) } \sqrt{3} - i, \text{ б) } 2 + 2i, \text{ в) } \frac{(i)^{13} \cdot (i-1)}{2+i} + 1, \text{ г) } z^3 - 8i = 0;$$

$$83. \text{ a) } -\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i, \text{ б) } 2 - 2\sqrt{3}i, \text{ в) } (1+2i) \cdot (i)^{21} + \frac{5-i}{i}, \text{ г) } z^3 - i = 0;$$

$$84. \text{ а) } -5i, \text{ б) } 3-3\sqrt{3}i, \text{ в) } (i)^{23} - \frac{17-6i}{3-4i}, \text{ г) } z^4 - \sqrt{3} + i = 0;$$

$$85. \text{ а) } 3-3\sqrt{3}i, \text{ б) } 2-2i, \text{ в) } -\frac{12}{5}i + i(2+i)^2, \text{ г) } z^3 - \sqrt{3}i - 3 = 0;$$

$$86. \text{ а) } 1+\sqrt{3}i, \text{ б) } \frac{7}{2} + \frac{7}{2\sqrt{3}}i, \text{ в) } \frac{1+i}{1-i} + (i)^4, \text{ г) } z^3 - \sqrt{6} + \sqrt{2}i = 0;$$

$$87. \text{ а) } -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i, \text{ б) } -5+5i, \text{ в) } \frac{5}{1+2i} + (i)^{18}, \text{ г) } z^3 + 1 + \sqrt{3}i = 0;$$

$$88. \text{ а) } -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \text{ б) } \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ в) } \frac{7-2i}{2+i} + (i)^{11}, \text{ г) } z^4 - \sqrt{3}i + 1 = 0;$$

$$89. \text{ а) } -8i, \text{ б) } -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \text{ в) } \frac{7-5i}{1-2i} + i(1-i), \text{ г) } z^3 - \sqrt{2} - \sqrt{6}i = 0;$$

$$90. \text{ а) } -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \text{ б) } 1+\sqrt{3}i, \text{ в) } (i)^{22} + \frac{7+5i}{1-2i}, \text{ г) } z^3 + 3i - \sqrt{3} = 0.$$

Список рекомендуемой литературы

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: АЙРИС ПРЕСС, 2006. – 608 с.
2. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч. Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студентов технич. специальностей вузов / под общ. ред. А. П. Рябушко. - Минск: Вышэйшая школа, 2007. - 396 с.
3. Лунгу К. Н., Макаров Е. В. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 1. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.; ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 216 с.
4. Лунгу К. Н., Макаров Е. В. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2. – М.; ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 384 с.
5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч.1: учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - М.: ОНИКС, 2006. - 304 с.
6. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч.2: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. // П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - М.: ОНИКС: Мир и образование, 2006.- 416 с.