

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Кузбасский государственный технический
университет имени Т.Ф. Горбачева»

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА

Контрольная работа № 4 и методические
указания для студентов 2 курса
специальности БЭсз 080101.65
заочной формы обучения

Составитель: В. И. Грибков

Кемерово 2015

Контрольная работа № 4 составлена в соответствии с программой курса «Математика» для студентов специальности «Экономическая безопасность» заочной формы обучения.

Номера заданий контрольной работы студент должен выбрать по табл. 1. «Номера заданий» следующим образом:

- выбрать строку, соответствующую первой букве фамилии;
- выбрать столбец, соответствующий последней цифре номера зачетной книжки;
- на пересечении выбранных строки и столбца взять номера заданий.

Контрольная работа, выполненная не по своему варианту или не в соответствии с требованиями к оформлению, возвращается непроверенной. Требования к оформлению смотрите на сайте кафедры: matematika.kuzstu.ru/ Студентам.

ПРОГРАММА 2 КУРСА (4 СЕМЕСТР)

Рабочая программа дисциплины «Математика» составлена в соответствии с ФГОС ВПО и примерной ООП подготовки специалистов «Экономическая безопасность» заочной формы обучения.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1.1. Задачи, приводящиеся к дифференциальным уравнениям.

Основные определения.

1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

1.3. Интегрирование простейших типов дифференциальных уравнений: с разделяющимися переменными, однородных и линейных.

1.4. Дифференциальные уравнения второго порядка. Задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.

1.5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

1.6. Применение дифференциальных уравнений для решения задач физики и механики.

2. Числовые и функциональные ряды.

2.1. Числовые ряды. Признаки сходимости.

2.2. Степенные ряды.

2.3. Разложение функции в степенной ряд.

2.4. Применение рядов к вычислению пределов, нахождению асимптот графиков функций, вычислению интегралов.

Таблица 1: Номера заданий.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>А В Д Я</i>	1 37 75 100 129	2 38 76 91 128	3 39 77 99 127	4 40 78 98 126	5 41 79 97 125	6 42 80 96 124	7 43 81 95 123	8 44 82 94 122	9 45 83 93 121	10 46 84 92 130
<i>Б Е З</i>	11 47 85 110 133	12 48 86 109 134	13 49 87 108 135	14 50 88 107 136	15 51 89 106 137	16 52 90 105 138	17 53 61 104 139	18 54 62 103 140	19 55 63 102 131	20 56 64 101 132
<i>Г Ж И Л</i>	21 57 65 120 144	22 58 66 119 145	23 59 67 118 146	24 60 68 117 147	25 31 69 116 148	26 32 70 115 149	27 33 71 114 150	28 34 72 113 141	29 35 73 112 142	30 36 74 111 143
<i>К</i>	1 38 76 100 125	2 39 77 99 126	3 40 78 98 127	4 41 79 97 128	5 42 80 96 129	6 43 81 95 130	7 44 82 94 121	8 45 83 93 122	9 31 84 92 123	10 32 85 91 124
<i>М Н О</i>	11 34 86 101 136	12 32 87 102 137	13 35 88 103 138	14 36 89 105 139	15 37 90 104 140	16 53 61 106 131	17 54 62 107 132	18 55 63 108 133	19 56 64 110 134	20 57 65 109 135
<i>П Х Ц Ш</i>	21 58 65 114 142	22 59 66 115 143	23 60 67 116 144	24 46 68 117 145	25 47 69 118 146	26 48 70 119 150	27 49 71 120 149	28 50 72 111 148	29 51 73 112 147	30 52 84 113 141
<i>С Ё Ы Й</i>	1 39 74 94 150	2 37 75 95 149	3 38 76 96 148	4 40 77 97 147	5 31 78 98 146	6 32 79 99 145	7 33 80 100 144	8 34 81 91 143	9 35 82 92 142	10 36 83 93 141
<i>Р У Т Ф</i>	21 41 66 102 140	22 42 67 103 139	23 43 68 104 138	24 44 69 105 137	25 36 70 106 136	26 44 71 107 135	27 45 72 108 134	28 46 73 109 133	29 47 74 110 132	30 48 75 101 131
<i>Ч Щ Э Ю</i>	11 43 86 117 130	12 49 87 118 129	13 50 88 119 128	14 51 89 120 127	15 52 90 116 126	16 53 61 115 125	17 54 62 114 124	18 55 63 113 123	19 56 64 112 122	20 57 65 111 121

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

A -- №№ 1-30 -- [1, стр. 325-334].

Перед решением задач нужно определить тип уравнения и метод решения, при этом можно руководствоваться табл.2.

Таблица 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Тип дифференциального уравнения первого порядка	Вид уравнения	Метод решения
1.Сразделяющимися переменными	$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$	$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$
2. Однородное	$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Подстановка $\frac{y}{x} = u, y = ux,$ $y' = u'x + u$ приводит к уравнению первого типа
3. Линейное	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$	Подстановка $y = u(x) \cdot v(x)$ приводит к уравнениям первого типа $\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot v = 0,$ $\frac{du}{dx} \cdot v = Q(x)$

Пример 1.1. Найти общее решение уравнения $\frac{y'}{\sin x} = y$.

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то получаем уравнение $\frac{dy}{dx} = y \cdot \sin x$ – уравнение первого типа. Разделяем переменные

$$\frac{dy}{y} = \sin x \cdot dx, \int \frac{dy}{y} = \int \sin x dx, \ln|y| = -\cos x + c,$$

где c – произвольная постоянная. Можно оставить решение в таком виде или выразить y в явном виде

$$y = e^{-\cos x + c}.$$

Пример 1.2. Найти общее решение уравнения $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

Это уравнение второго типа, однородное, следовательно, делаем подстановку $\frac{y}{x} = u, y = ux, y' = u'x + u$. Уравнение примет вид

$$u'x + u = e^u + u, \frac{du}{dx} \cdot x = e^u, \frac{du}{dx} = \frac{e^u}{x}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{e^u} = \frac{dx}{x}, \int \frac{du}{e^u} = \int \frac{dx}{x}, -e^{-u} = \ln|x| + \ln c.$$

Здесь мы обозначили произвольную постоянную не c , а $\ln c$ для удобства записи

$$-e^{-u} = \ln|cx|, u = \frac{y}{x} \Rightarrow -e^{-\frac{y}{x}} = \ln|cx|.$$

Можно оставить решение в таком виде, а можно u выразить явно

$$e^{-\frac{y}{x}} = -\ln|cx|, e^{-\frac{y}{x}} = \ln \frac{1}{|cx|}, -\frac{y}{x} = \ln \ln \frac{1}{|cx|}, y = -x \ln \ln \frac{1}{|cx|}.$$

Пример 1.3. Найти общее решение уравнения $y' + 2y = x$.

Это линейное уравнение $P(x) = 2, Q(x) = x$ (табл. 2.). Делаем подстановку $y = u(x) \cdot v(x), y' = u'v + uv'$. Подставив эти соотношения в исходное уравнение, получаем $u'v + uv' + 2uv = x$. Одну из функций находим из уравнения

$$uv' + 2uv = 0, \frac{dv}{dx} + 2v = 0,$$

тогда вторая функция u определяется из уравнения $u'v = x$.

Решая первое уравнение, находим функцию v , то есть

$$\frac{dv}{dx} = -2v, \frac{dv}{v} = -2dx, \int \frac{dv}{v} = - \int 2dx, \ln|v| = -2x, v = e^{-2x},$$

произвольную константу для функции v полагаем равной нулю.

Получаем уравнение для нахождения функции u

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-2x} = x, du = \frac{x}{e^{-2x}} dx, du = x \cdot e^{2x} dx, \int du = \int x \cdot e^{2x} dx,$$

$$u = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c.$$

Решение исходного уравнения имеет вид

$$y = uv = \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c \right) \cdot e^{-2x}.$$

В -- №№ 31-60 -- [1, стр. 350-357].

При решении задач **№№31-60** используются приёмы решения дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения используется табл. 3, а для нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения используется табл. 4.

Пример1.4. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 8y' + 16y = 2xe^{-4x},$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Общее решение неоднородного уравнения можно записать в виде $y = y_0 + Y$, где y_0 – общее решение однородного уравнения

$$y'' + 8y' + 16y = 0,$$

которое определяется по табл. 2, а Y – частное решение неоднородного уравнения, которое определяется по табл. 4.

Для определения y_0 составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 8k + 16 = 0.$$

Его корни $k_1 = k_2 = -4$. Следовательно, согласно табл. 2.:

$$y_0 = e^{-4x}(c_1 + c_2x).$$

Так как правая часть уравнения $f(x) = 2xe^{-4x}$, то согласно табл. 3.:

$$Y = x^2 \cdot e^{-4x}(Ax + B).$$

Здесь $a = -4, P_n(x) = 2x, r = 2$.

$$Y = e^{-4x}(Ax^3 + Bx^2).$$

$$Y' = -4e^{-4x}(Ax^3 + Bx^2) + e^{-4x}(3Ax^2 + 2Bx) =$$

$$e^{-4x}(-4Ax^3 + x^2(-4B + 3A) + 2Bx).$$

$$Y'' = -4e^{-4x}(-4Ax^3 + x^2(-4B + 3A) + 2Bx) + e^{-4x}(12Ax^2 + 2x(-4B + 3A) + 2B) = e^{-4x}(16Ax^3 + x^2(16B - 24A) + x(-16B + 6A) + 2B).$$

Подставив эти выражения в наше уравнение, получим равенство:

$$e^{-4x}(16Ax^3 + x^2(16B - 24A) + x(-16B + 6A) + 2B) + 8e^{-4x}(-4Ax^3 + x^2(-4B + 3A) + 2Bx) + 16e^{-4x}(Ax^3 + Bx^2) = 2xe^{-4x}.$$

Сократим на e^{-4x} и сгруппируем члены с равными степенями:

$$x^3(16A - 32A + 16A) + x^2(16B - 24A - 32B + 24A + 16B) +$$

$$+ x(-16B + 6A + 16B) + 2B = 2x,$$

$$\text{или } 6Ax + 2B = 2x.$$

Таблица 3. Общее решение однородного уравнения

Вид общего решения однородного уравнения	Корни характеристического уравнения
1. $y_0 = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$	k_1, k_2 – вещественные, $k_1 \neq k_2$
2. $y_0 = (c_1 + c_2 x) e^{kx}$	k_1, k_2 – вещественные, $k_1 = k_2$
3. $y_0 = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$	k_1, k_2 – комплексные, $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$

Таблица 4. Частное решение неоднородного уравнения

Вид правой части неоднородного дифференциального уравнения	Вид частного решения
$f(x) = e^{ax} \cdot P_n(x)$, $P_n(x)$ – многочлен степени n	$y = x^r \cdot e^{ax} \cdot Q_n(x)$, где $r = \begin{cases} 0, & \text{если } a \text{ не является корнем} \\ & \text{характерист. уравнения} \\ 1, & \text{если } a \text{ равно одному корню} \\ & \text{характерист. уравнения} \\ 2, & \text{если оба корня характерист.} \\ & \text{уравнения равны } a \end{cases}$ $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределёнными коэффициентами
$f(x) = e^{ax} \cdot \left(\begin{matrix} P_n(x) \cos bx + \\ + Q_m(x) \sin bx \end{matrix} \right) P_n(x)$ – многочлен степени n , $Q_m(x)$ – многочлен степени m	$y = x^r \cdot e^{ax} \cdot (S_N(x) \cos bx + Z_N(x) \sin bx)$ $r = \begin{cases} 0, & \text{если } a + bi \text{ не является корнем} \\ & \text{характерист. уравнения} \\ 1, & \text{если } a + bi \text{ равно одному корню} \\ & \text{характерист. уравнения} \end{cases}$ N равно наибольшей из степеней n и m

Приравниваем коэффициенты многочленов, стоящих в левой и правой части равенства, при одинаковых степенях x

Получаем систему уравнений для определения A, B .

$$\begin{cases} 6A = 2, \\ 2B = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ B = 0. \end{cases}$$

Итак, $Y = e^{-4x} \cdot \frac{1}{3} x^3$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$y = e^{-4x} (c_1 + c_2 x) + e^{-4x} \cdot \frac{1}{3} x^3$, откуда

$$y' = -4e^{-4x} (c_1 + c_2 x) + e^{-4x} \cdot c_2 - 4e^{-4x} \cdot \frac{1}{3} x^3 + e^{-4x} \cdot x^2.$$

Подставляя в эти выражения начальные условия $x=0, y=1, y'=2$, найдём c_1, c_2 .

$$\begin{cases} 1 = c_1, \\ 2 = -4c_1 + c_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1, \\ c_2 = 6. \end{cases}$$

Итак, искомое решение имеет вид

$$y = e^{-4x} (1 + 6x) + e^{-4x} \cdot \frac{1}{3} x^3.$$

Пример 1.5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 13y = 4 \sin 5x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,235; y'(0) = 0$.

Общее решение неоднородного уравнения можно записать в виде $y = y_0 + Y$, где y_0 – общее решение однородного уравнения

$$y'' + 6y' + 13y = 0,$$

которое определяется по табл. 3, а Y – частное решение неоднородного уравнения, которое определяется по табл. 4.

Для определения y_0 составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 6k + 13 = 0.$$

$$\text{Его корни } k_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i.$$

Согласно табл.3. $\alpha = -3, \beta = 2$, то есть $y_0 = e^{-3x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.

Для определения Y используем табл. 4. Так как $f(x) = 4 \sin 5x$, то $a = 0, b = 5, P_0(x) = 0, Q_0(x) = 4, r = 0$. Следовательно,

$$Y = A \cos 5x + B \sin 5x.$$

Для определения A, B подставим Y в первоначальное уравнение

$$Y' = -5A \sin 5x + 5B \cos 5x,$$

$$Y'' = -25A \cos 5x - 25B \sin 5x.$$

Тогда уравнение примет вид

$$-25A\cos 5x - 25B\sin 5x + 6(-5A\sin 5x + 5B\cos 5x) + \\ + 13(A\cos 5x + B\sin 5x) = 4\sin 5x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 5x$ и $\sin 5x$ в левой и правой частях этого уравнения, получим систему

$$\begin{cases} -12A + 30B = 0, \\ -30A - 12B = 4. \end{cases} \quad A = \frac{30}{12}B = \frac{5}{2}B, \quad -30 \cdot \frac{5}{2}B - 12B = 4, \quad B = -0,115,$$

$$A = \frac{5}{2}(-0,115) = -0,046. \quad Y = -0,115\cos 5x - 0,046\sin 5x.$$

Общее решение нашего уравнения имеет вид

$$y = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) - 0,115\cos 5x - 0,046\sin 5x.$$

Отсюда

$$y' = -3e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + e^{-3x}(-2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x) \\ + 0,575\sin 5x - 0,23\cos 5x.$$

Найдём из начальных условий $y(0) = 0,235$; $y'(0) = 0$ постоянные c_1, c_2 .

$$\begin{cases} 0,235 = c_1 - 0,115, \\ 0 = -3c_1 + 2c_2 - 0,23. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0,35, \\ c_2 = 0,64. \end{cases}$$

Итак, искомое решение имеет вид

$$y = e^{-3x}(0,35\cos 2x + 0,64\sin 2x) - 0,115\cos 5x - 0,046\sin 5x.$$

2. Числовые и функциональные ряды.

С -- №№ 61-90 -- [1, стр. 438-454].

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

где $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ – бесконечная числовая последовательность, называется числовым рядом.

$u_1, u_2, u_3, \dots$ – члены ряда, u_n – общий член ряда.

Сумма вида $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ называется n -ой частичной суммой ряда. Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд называется сходящимся, S – суммой ряда. В противном случае ряд называется расходящимся, расходящиеся ряды суммы не имеют. Разность $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ называется остатком ряда.

Пример 2.1. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$ сходится, найти его сумму.

Решение. Общий член ряда $u_n = \frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$ является рациональной дробью и может быть представлен в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n^2(n+2)^2} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n+2} + \frac{D}{(n+2)^2} = \\ &= \frac{An(n+2)^2 + B(n+2)^2 + Cn^2(n+2) + Dn^2}{n^2(n+2)^2}. \end{aligned}$$

Пусть $n=0$, тогда $1=4B$, то есть $B=1/4$; $n=-2$, тогда $-1=4D$, $D=-1/4$. Для отыскания A и C приравняем коэффициенты при одинаковых степенях n числителей справа и слева равенства: при n^3 $A + C = 0$, при n^2 $4A + B + 2C + D = 0$. Отсюда $A = C = 0$. Таким образом,

$$\frac{n+1}{n^2(n+2)^2} = \frac{0}{n} + \frac{1/4}{n^2} + \frac{0}{n+2} - \frac{1/4}{(n+2)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right).$$

По этой формуле запишем любой член ряда

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \frac{1}{16} - \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{(n+2)^2} \right); \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{(n+2)^2} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{16}.$$

Таким образом, ряд сходится и его сумма равна $\frac{5}{16}$.

Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю. Необходимый признак сходимости ряда является достаточным признаком расходимости ряда. Если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

Пример 2.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2 + 2}$.

Решение. Рассмотрим $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2 + 2} = \frac{1}{3}$, значит, ряд расходится.

Пример 2.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n}}$.

Решение. Рассмотрим $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{n}} = e^0 = 1$, значит, ряд расходится.

Признаки сравнения. Если имеем два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ с неотрицательными членами, причём члены первого ряда не превосходят членов второго ряда ($0 \leq u_n \leq v_n$), то:

а) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

б) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Для сравнения используются ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический, расходящийся ряд;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ – обобщённый гармонический ряд, сходится при $\alpha > 1$,

расходится при $\alpha \leq 1$;

3. ряд – геометрическая прогрессия, сходится, если знаменатель прогрессии $|q| < 1$; расходится, если $|q| \geq 1$.

Пример 2.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$.

Решение. Справедливы неравенства:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+3)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+3)(n+3)}} = \frac{1}{n+3}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$ расходится, как гармонический, значит, исходный ряд тоже расходится.

Пример 2.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$.

Решение. Имеем $\frac{1}{n(n+4)} < \frac{1}{n^2}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, значит, исходный ряд тоже сходится.

Для исследования сходимости рядов с положительными членами удобна предельная форма признака сравнения.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – ряды с положительными членами и существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$, то рассматриваемые ряды одновременно сходятся или расходятся.

Пример 2.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n \sqrt[n]{n}}$.

Решение. Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^n \sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(e^{\ln n})^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} \\ &= e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Для нахождения предела применено правило Лопиталя.

Так как предел конечный, отличный от нуля, то исходный ряд тоже расходится.

Пример 2.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$.

Решение. Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ и $\frac{1}{n^2}$ – эквивалентные бесконечно малые величины при $n \rightarrow \infty$.

Значит, исходный ряд тоже сходится.

Ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_m(n)}{Q_l(n)}$ удобно сравнивать с рядами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{l-m}}$, которые сходятся при $l-m > 1$ и расходятся при $l-m \leq 1$.

Пример 2.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+1}$.

Решение. Так как $m=1$, $l=2$, $l-m=1$, сравним данный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n}{(n^2+n+1) \cdot 1} = 1 \neq 0, \text{ значит, исходный ряд расходится.}$$

Пример 2.9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Решение. Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot n^2}{(n^2+1) \cdot 1} = 1 \neq 0, \text{ значит, исходный ряд тоже сходится.}$$

Признак Даламбера. Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с

положительными членами таков, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд

сходится, а при $l > 1$ ряд расходится, при $l = 1$ вопрос о сходимости остаётся открытым (необходимо применение других признаков сходимости).

Пример 2.10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

$$\text{Решение. } u_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}, u_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}},$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2 \cdot 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2} \cdot (n!)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! (n+1)! \cdot 2^{n^2}}{n! n! \cdot 2^{n^2+2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1)}{2^{2n+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2^{2n+1} \cdot \ln 2 \cdot 2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{2n+1} \cdot \ln 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2n+1} \cdot \ln^2 2 \cdot 2} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1, \end{aligned}$$

значит, ряд сходится.

Пример 2.11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}$.

Решение. $u_n = \frac{5^n \cdot n!}{n^n}, u_n = \frac{5^{(n+1)} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}},$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{(n+1)} \cdot 5^n \cdot n!} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{(n+1)}} =$$

$$= 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{5}{e} > 1,$$

значит, ряд расходится.

Признак Коши. Если для ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

с положительными членами существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то этот ряд при $l < 1$ сходится, а при $l > 1$ расходится, при $l = 1$ вопрос о сходимости остаётся открытым (необходимо применение других признаков сходимости).

Пример 2.12. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$, значит, данный ряд сходится.

Пример 2.13. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$, ряд расходится.

Интегральный признак сходимости рядов с положительными членами. Если $\phi(x)$ положительная, ограниченная, интегрируемая функция на интервале $a \leq x < +\infty$, где a – натуральное число, то ряд

$$\phi(a) + \phi(a+1) + \phi(a+2) + \dots + \phi(a+n) + \dots$$

и несобственный интеграл $\int_a^{\infty} \phi(x) dx$ или оба сходятся, или оба расходятся.

Пример 2.14. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \cdot e^{-\sqrt[3]{n}}$.

Решение. $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot e^{-\sqrt[3]{x}}$. Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot e^{-\sqrt[3]{x}} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot e^{-\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-\sqrt[3]{x}} \right) \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-\sqrt[3]{b}} + e^{-\sqrt[3]{1}} \right) = e^{-1} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл сходится, значит, ряд тоже сходится.

Ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$, где $a_n > 0$, называется знакопередающим.

Теорема Лейбница. Знакопередающий ряд, члены которого убывают по абсолютной величине, а общий член стремится к нулю, сходится, а его остаток имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине.

Если ряд $\sum |a_n|$ сходится, то ряд $\sum a_n$ называется абсолютно сходящимся; если ряд $\sum |a_n|$ расходится, а ряд $\sum a_n$ сходится, то эта сходимость называется условной.

Пример 2.15. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 - \dots + (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$$

Решение. Ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ сходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Значит, данный ряд сходится абсолютно.

Пример 2.16. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Решение. Ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ расходится;

проверим условия Лейбница: а.) $\frac{1}{\sqrt[3]{1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \frac{1}{\sqrt[3]{4}} > \dots$; б.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

По теореме Лейбница знакопередающий ряд сходится. Так как ряд из абсолютных величин расходится, то эта сходимость условная.

Д -- №№ 91-120 -- [1, стр. 457-462].

Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ называется степенным,

c_n – коэффициентами степенного ряда. При $a=0$ степенной ряд имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Этот ряд сходится при $x=0$. Если он сходится при $x \neq 0$, то областью его сходимости является интервал $(-R, R)$.

Число R называется радиусом сходимости. Если степенной ряд сходится на всей числовой оси, то $R = \infty$. Внутри интервала сходимости степенной ряд сходится абсолютно, а сходимость на концах интервала проверяют дополнительно.

Пример 2.17. Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

Решение. Применим признак Даламбера.

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n; \quad u_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} x^{n+1};$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!(n+1)! x^{n+1} (2n)!}{(2n+2)! n! n! x^n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(n+1)x}{(2n+1)(2n+2)} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} |x|. \end{aligned}$$

Ряд сходится, если $\frac{1}{4} |x| < 1$, тогда $|x| < 4$, отсюда $R = 4$.

Пример 2.18. Найти интервал и радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n.$$

Решение. Применим радикальный признак сходимости Коши.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}} = \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = |x| \cdot e. \end{aligned}$$

Ряд сходится, если $|x| \cdot e < 1$, тогда $|x| < \frac{1}{e}$, $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$, отсюда $R = \frac{1}{e}$.

Проверим сходимость на концах интервала сходимости.

Пусть $x = \frac{1}{e}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{e^n} = 1.$$

Необходимый признак сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

$$\text{Пусть } x = -\frac{1}{e}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}.$$

При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, значит, ряд расходится.

$$\text{Ответ: } R = \frac{1}{e}; \quad \left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right).$$

Если функция $f(x)$ имеет на некотором интервале, содержащем точку a , производные всех порядков, то к ней может быть применена формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \\ \dots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n,$$

где R_n – остаточный член ряда, $R_n = f^{(n)}(c)\frac{(x-a)^n}{n!}$ ($a < c < x$).

Если для некоторых x $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, то в пределе формула Тейлора обращается для этого значения x в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \\ \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

При $a = 0$ имеем ряд

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \dots \\ = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!},$$

который называется рядом Маклорена.

Функция $f(x)$ может быть разложена в ряд Тейлора, если

- 1) она имеет производные всех порядков;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

Многократное дифференцирование и нахождение значений производных в данной точке часто связано с громоздкими выкладками. Эту трудность можно обойти на основании теоремы о единственности разложения функции в ряд, позволяющей утверждать, что полученное любым путём разложение функции в ряд будет её разложением в ряд Тейлора.

При разложении в ряд Тейлора могут быть использованы готовые разложения некоторых важных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots;$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \dots;$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots;$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots;$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$$

Пример 2.19. Разложить в ряд функцию $f(x) = \ln \sqrt[5]{\frac{1+2x}{1-x}}$ по степеням x .

Решение. $f(x) = \frac{1}{5} (\ln(1+2x) - \ln(1-x));$

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{2^3 x^3}{3} - \frac{2^4 x^4}{4} + \dots;$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \dots;$$

$$f(x) = \ln \sqrt[5]{\frac{1+2x}{1-x}} =$$

$$= \frac{1}{5} \left(2x - \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{2^3 x^3}{3} - \frac{2^4 x^4}{4} + \dots + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{5} \left(3x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{9}{3} x^3 - \frac{15}{4} x^4 + \dots \right) =$$

$$= \frac{3}{5} x - \frac{3}{10} x^2 + \frac{3}{5} x^3 - \frac{3}{4} x^4 + \dots$$

Пример 2.20. Разложить функцию $f(x) = \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{2x^3}$ в степенной ряд по степеням x .

$$\text{Решение. } f(x) = \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{2} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{\operatorname{sh} x^2}{x^3} = \frac{1}{x^3} \cdot \operatorname{sh} x^2;$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \cdot \left(x^2 + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{14}}{7!} + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{5!} + \frac{x^{11}}{7!} + \dots$$

Определённый интеграл не может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница, если первообразная не выражается в элементарных функциях.

Если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат интервалу сходимости этого ряда, то приближённое вычисление интеграла возможно с наперёд заданной точностью.

Пример 2.21. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$ с точностью до 10^{-4} .

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}; \quad -\infty < x < \infty;$$

в данном интеграле пределы интегрирования входят в область сходимости.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\frac{1}{4}} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^{\frac{1}{4}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(2n+1) \cdot 4^{2n+1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} - \dots; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} = 0,25000; \quad \frac{1}{3 \cdot 4^3} \cong 0,00521; \quad \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} \cong 0,000098 < 10^{-5}.$$

Для достижения требуемой точности уже третий член ряда может быть отброшен (признак Лейбница). Таким образом, с точностью до 10^{-4}

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \cong 0,25000 - 0,00521 = 0,24479 \cong 0,2448.$$

Ответ: 0,2448.

Пример 2.22. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ с точностью до 10^{-3} .

$$\text{Решение. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots;$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^5}{6} + \dots;$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx &= \left(x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{25} - \dots \right) \Big|_0^{\frac{1}{10}} = \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2 \cdot 4} + \frac{1}{10^3 \cdot 9} - \frac{1}{10^4 \cdot 16} + \frac{1}{10^5 \cdot 25} - \dots; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{10} = 0,1000; \quad \frac{1}{10^2 \cdot 4} = 0,0025;$$

$$\frac{1}{10^3 \cdot 9} \cong 0,0001; \quad \frac{1}{10^4 \cdot 16} < 10^{-4};$$

Значит, для вычисления интеграла с точностью 10^{-3} достаточно взять три члена ряда:

$$\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = 0,1000 - 0,0025 + 0,0001 = 0,0976 \cong 0,098.$$

Ответ: 0,098.

Контрольные задания

№№ 1-30. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

1. $y' + \frac{y}{x} - x = 0$.

2. $(x^2 + y^2)dy = 2xydx$.

3. $y' + ay = e^{mx}$.

4. $ydy + (x - 2y)dx = 0$.

5. $xdy = (x + y)dx$.

6. $y - x \cdot y' = y \ln \frac{x}{y}$.

7. $(1 - x^2)y' - xy = 1$.

8. $y - x \cdot y' = x + yy'$.

9. $xdy - ydx = ydy$.

10. $\frac{dx}{dy} - x + y = 0$.

11. $(x - y)y - x^2y' = 0$.

12. $xdy - 2ydx = ydy$.

13. $y' + 3y + x = 0$.

14. $(y^2 - 3x^2)dx + 2xydy = 0$.

15. $y' + 2y = e^{-x}$.

16. $y^2 + x^2 \cdot y' = xy y'$.

17. $y' - \frac{1+2x}{x^2}y = 1$.

18. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

19. $y' + 2xy - x^3 = 0$.

20. $(y - x)dx = (x + y)dy$.

21. $y' - y = xe^x$.

22. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$.

23. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

24. $y' = \operatorname{tg} \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$.

25. $(x + 2y)ydx = x^2dy$.

26. $y' - x = y$.

27. $y' \cdot \ln x + \frac{y}{x} = x$.

28. $y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x = x$.

29. $y' \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{y}{1+x^2} = 2x$.

30. $2xy' - yy' = y$.

№№ 31-60. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

31. $y'' + 9y = \cos 3x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

32. $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

33. $y'' - 2y' + y = xe^x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 3$.

34. $y'' + y' = x^2 - 5$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

35. $y'' + 4y' + 29y = x^2 - x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$.

36. $y'' + 3y' + 2y = 3e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

37. $y'' + 2y' = x^2 + 3x + 4$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 4$.

38. $y'' - y' - 6y = -2e^{3x}, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1.$
39. $y'' + y' - 2y = (x - 2)e^x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$
40. $y'' + y = 6\cos 2x - \sin 2x, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 1.$
41. $y'' - 4y' + 13y = \sin 3x, \quad y(0) = \frac{5}{7}, \quad y'(0) = \frac{1}{7}.$
42. $2y'' + 5y' = 30x^2 - 4, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = \frac{5}{2}.$
43. $y'' - y' = e^{2x}, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1.$
44. $y'' + 2y' + 5y = x^2 - 3x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2.$
45. $y'' - 3y' = -3e^{3x}, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 6.$
46. $y'' + 4y' + 4y = 15e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$
47. $y'' + y' - 2y = 2e^x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1.$
48. $y'' - 5y' + 6y = -3e^{-x}, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0.$
49. $4y'' + 4y' + y = x^2 + x - 1, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 0,5.$
50. $y'' + 2y' + 2y = 2e^{2x}, \quad y(\pi) = -3, \quad y'(\pi) = 4.$
51. $y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$
52. $y'' - 4y = 4x^2 + x - 8, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$
53. $y'' - y = 6e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3.$
54. $y'' + 5y' + 6y = 10e^{2x}, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -2.$
55. $y'' - 8y' + 7y = 6xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 7.$
56. $y'' - 6y' + 13y = x^2 - x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0.$
57. $y'' - y = 8e^{3x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2.$
58. $y'' - 2y' = 6x^2 - 3, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4.$
59. $y'' + 4y = x^2 - x + 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'(\pi) = 4.$
60. $y'' + 6y' + 10y = 2e^{-3x}, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1.$

№№ 61–90. Исследовать на сходимость ряд.

61. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)};$

62. а) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-n^3};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{\sqrt{2^n + 3}};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^n;$

63. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! 4^n};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)};$

64. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{(2n+1)^n};$

65. а) $\sum_{n=0}^{\infty} n \cos 2n;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1)(2n)!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)2^{2n}};$

66. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{n^2};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n};$

67. а) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cos n;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n (n+1)!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}};$

68. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{6n};$

69. а) $\sum_{n=e}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2};$

70. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3} \right)^{n^2};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!};$

71. а) $\sum_{n=0}^{\infty} n \cos n;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n;$

72. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{2^n (3n+5)};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n};$

73. а) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \sin n;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} (n^3+1)}{(n+1)!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!};$

74. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n^3};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1) \left(\frac{3}{2} \right)^n};$

75. а) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot 2 \cdot n!}{(2n)!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{3n}};$

76. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n};$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n (n-1)!};$

в) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+1}{n(n-1)};$

77. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+3)}$;
78. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{4^n \cdot n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{3n+1} \right)^n$;
79. а) $\sum_{n=0}^{\infty} n \sin n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[5]{n}}{5^n + 2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n}{(2n+1)^n}$;
80. а) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} n^3$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+2)! \cdot 6^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt[3]{n}}$;
81. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n!}{\sqrt{2^n + 3}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{5}{n}}{5^n}$;
82. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+2)!}{(2n)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+2) \cdot 9^n}$;
83. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n^2 + 1)^{\frac{n}{2}}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n \cdot n!}{n^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}$;
84. а) $\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 4}$;
85. а) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n \cdot \sqrt[5]{n^2}}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{6n}$;
86. а) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[3]{\ln n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$;
87. а) $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \cos 3n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(4^n + 1)(2n)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}$;
88. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{5n^2 + 4} \right)^{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! \cdot 4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n$;
89. а) $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \sin 4n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot \sin \frac{\pi}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}$;
90. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{4n-1} \right)^{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{\sqrt{2^n + 3}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}$;

№№ 91–120. Найти интервал и радиус сходимости ряда.

91. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n n^3}{(n^4 + 1)^2}$;

106. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(2n+1)2^n}$;

92. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n^3}$;

107. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$;

- | | | | |
|------|---|------|--|
| 93. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n n^2}{(n^4+1)^2};$ | 108. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n} (2n+9)^5}{3n+5};$ |
| 94. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x+4)^n}{n^2+1};$ | 109. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{n};$ |
| 95. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4)3^n};$ | 110. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}};$ |
| 96. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n};$ | 111. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{4^n (2n-1)};$ |
| 97. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$ | 112. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)5^n};$ |
| 98. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (x-2)^n}{3^n};$ | 113. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (x-3)^n}{(n^4+3)^2};$ |
| 99. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{(2n+1) \cdot 3^n};$ | 114. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x-3)^n}{n^3};$ |
| 100. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+1}}{2n+7};$ | 115. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n \cdot n^2}{(n^4+1)^2};$ |
| 101. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n} (3n+7)^3}{4n+5};$ | 116. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n 3^n}{n^2+3};$ |
| 102. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n} 4^n}{n};$ | 117. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n n^2}{(n^4+1)^2};$ |
| 103. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x+4)^n}{n^2+1};$ | 118. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}};$ |
| 104. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{4^n (2n-1)};$ | 119. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (x-2)^n}{3^n};$ |
| 105. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{(2n+1) \cdot 3^n};$ | 120. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n \cdot n^2}{(n^4+1)^2};$ |

№№ 121–150. Найти приближённое значение интеграла:

- | | | | |
|------|--|------|--|
| 121. | $\int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx, \varepsilon = 0,001;$ | 136. | $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}, \varepsilon = 0,001;$ |
| 122. | $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx, \varepsilon = 0,001;$ | 137. | $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}, \varepsilon = 0,001;$ |
| 123. | $\int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx, \varepsilon = 0,001;$ | 138. | $\int_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2, \varepsilon = 0,001;$ |

$$124. \int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$125. \int_0^{0,4} \frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x} dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$126. \int_0^1 \cos x^2 dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$127. \int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$128. \int_0^{0,1} \sin(10x^2) dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$129. \int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$130. \int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$131. \int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$132. \int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$133. \int_0^{0,1} \sin(10x^2) dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$134. \int_0^1 \cos x^2 dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$135. \int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$139. \int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$140. \int_0^{0,2} e^{-2x^2} dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$141. \int_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x} dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$142. \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$143. \int_0^{0,4} \frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x} dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$144. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$145. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$146. \int_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$147. \int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$148. \int_0^{0,2} e^{-2x^2} dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$149. \int_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x} dx, \quad \varepsilon = 0,001;$$

$$150. \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}, \quad \varepsilon = 0,001;$$

Список рекомендуемой литературы

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: АЙРИС ПРЕСС, 2006. – 608 с.
2. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч. Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студентов технич. специальностей вузов / под общ. ред. А. П. Рябушко. - Минск: Вышэйшая школа, 2007. - 396 с.
3. Лунгу К. Н., Макаров Е. В. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 1. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.; ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 216 с.
4. Лунгу К. Н., Макаров Е. В. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2. – М.; ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 384 с.
5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч.1: учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - М.: ОНИКС, 2006. - 304 с.
6. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч.2: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. // П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - М.: ОНИКС: Мир и образование, 2006.- 416 с.