

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольная работа № 2
для студентов 1 курса (2 семестр) специальности 130400.65
«Горное дело», специализаций 130401.65, 130403.65, 130404.65,
130405.65, 130406.65 заочной формы обучения

Составители А. И. Бабин
Е. А. Волкова
Е. В. Прейс

Утверждены на заседании кафедры
Протокол № 1 от 29.08.2012
Рекомендованы к печати
учебно-методической комиссией
специальности 130400.65
Протокол № 02/12 от 19.04.2012
Электронная копия находится
в библиотеке КузГТУ

Кемерово 2012

Контрольная работа № 2 составлена в соответствии с программой курса «Математика» для студентов специальности 130400.65 «Горное дело» заочной формы обучения.

В составлении работы и методических указаний к ней принимали участие преподаватели: В. М. Волков, В. А. Гоголин, И. А. Ермакова.

Номера задач контрольной работы студент должен выбрать по таблице «Выбор номеров контрольных задач» следующим образом:

- найти строку, соответствующую первой букве фамилии;
- найти столбец, соответствующий последней цифре шифра;
- на пересечении найденных строки и столбца взять номера задач контрольной работы № 2.

Контрольная работа, выполненная не по своему варианту, возвращается непроверенной.

ПРОГРАММА 1 КУРСА (2 СЕМЕСТР)

Рабочая программа дисциплины «Математика» составлена в соответствии с ФГОС ВПО и примерной ООП подготовки бакалавров специальности 130400.65 «Горное дело», специализаций 130401.65, 130403.65, 130404.65, 130405.65, 130406.65 заочной формы обучения

1. Неопределённый интеграл

1.1. Первообразная (неопределённый интеграл), её свойства.

Таблица интегралов.

1.2. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.

1.3. Использование таблиц (справочников) неопределённых интегралов.

2. Определённый интеграл

2.1. Задачи, приводящиеся к понятию определённого интеграла.

2.2. Определённый интеграл как предел интегральных сумм.

2.3. Основные свойства определённого интеграла.

2.4. Производная интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.

Выбор номеров задач контрольной работы

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
А,В,Д	1 37 75 120 121	2 38 76 91 122	3 39 77 92 123	4 40 78 93 124	5 41 79 94 125	6 42 80 95 126	7 43 81 96 127	8 44 82 97 128	9 45 83 98 129	10 46 84 99 130
Б,Е,З	11 47 85 100 131	12 48 86 101 132	13 49 87 102 133	14 50 88 103 134	15 51 89 104 135	16 52 90 105 136	17 53 91 106 137	18 54 92 107 138	19 55 93 108 139	20 56 64 109 140
Г,Ж, И,Л	21 57 65 110 121	22 58 66 111 122	23 59 67 112 123	24 30 68 113 124	25 31 69 114 125	26 32 70 115 126	27 33 71 116 127	28 34 72 117 128	29 35 73 118 129	30 36 74 119 130
К	1 38 75 120 131	2 39 76 91 132	3 40 77 92 133	4 41 78 93 134	5 42 79 94 135	6 43 80 95 136	7 44 81 96 137	8 45 82 97 138	9 46 83 98 139	10 47 84 99 140
М,Н,О	11 49 85 100 141	12 48 86 101 142	13 50 87 102 143	14 51 88 103 144	15 52 89 104 145	16 53 90 105 146	17 54 61 106 147	18 55 62 107 148	19 56 63 108 149	20 57 64 109 150
П,Х,Ц, Ш	21 58 65 110 121	22 59 66 111 122	23 60 67 112 123	24 60 68 113 124	25 39 69 114 125	26 31 70 115 126	27 32 71 116 127	28 33 72 117 128	29 34 73 118 129	30 35 74 119 130
С,У,Ё, Ы,Й	1 36 75 91 131	2 37 76 92 132	3 38 77 93 133	4 40 78 94 134	5 41 79 95 135	6 42 80 96 136	7 43 81 97 137	8 44 82 120 138	9 45 83 98 139	10 46 84 99 140
Р,Т,Ф	21 57 65 110 141	22 58 66 111 142	23 59 67 112 143	24 60 68 113 144	25 36 69 114 145	26 31 70 115 146	27 32 71 116 147	28 33 72 117 148	29 34 73 118 149	30 35 74 119 150
Ч,Щ,Э ,Ю,Я	11 47 85 100 150	12 48 86 101 121	13 49 87 102 122	14 50 88 103 123	15 51 89 104 124	16 52 90 105 125	17 53 61 106 126	18 54 62 107 127	19 55 63 108 128	20 56 64 109 129

3. Теория функций комплексного переменного
 - 3.1. Комплексные числа и действия над ними.
 - 3.2. Алгебраические действия над комплексными числами.
4. Обыкновенные дифференциальные уравнения
 - 4.1. Задачи, приводящиеся к дифференциальным уравнениям. Основные определения.
 - 4.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
 - 4.3. Интегрирование простейших типов дифференциальных уравнений: с разделяющимися переменными, однородных и линейных.
 - 4.4. Дифференциальные уравнения второго порядка. Задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.
 - 4.5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
 - 4.6. Применение дифференциальных уравнений для решения задач физики и механики.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Для вычисления неопределённых интегралов (№ 1-30) необходимо проработать литературу: [2, гл.I, §1 - §7, с. 8-54; 4, п. 6, с. 148 - 168], где содержатся практические рекомендации по данной теме.

Для выполнения задания 1-30 (пункт а) нужно из таблицы интегралов выбрать такой, к которому можно свести данный интеграл.

Например, при вычислении

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+2)^5}} = \int (5x+2)^{-\frac{5}{3}} dx,$$

используем табличный интеграл

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c.$$

Согласно этой формуле, подводим под знак дифференциала основание степени. Так как $d(5x+2) = 5dx$, то умножим и разделим интеграл на 5, то есть

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+2)^5}} &= \int (5x+2)^{-\frac{5}{3}} dx = \frac{1}{5} \int (5x+2)^{-\frac{5}{3}} \cdot 5dx = \frac{1}{5} \int (5x+2)^{-\frac{5}{3}} d(5x+2) = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x+2)^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + c = -\frac{3}{10} (5x+2)^{-\frac{2}{3}} + c = -\frac{3}{10 \sqrt[3]{(5x+2)^2}} + c. \end{aligned}$$

Интеграл $\int x \cdot e^{3x^2-1} dx$ сводится к табличному $\int e^u du = e^u + c$ путём подведения под знак дифференциала показателя степени $d(3x^2-1) = 6x dx$. Таким образом

$$\int x \cdot e^{3x^2-1} dx = \frac{1}{6} \int e^{3x^2-1} 6x dx = \frac{1}{6} \int e^{3x^2-1} d(3x^2-1) = \frac{1}{6} e^{3x^2-1} + c.$$

В примере $\int \frac{3 \cos x \cdot dx}{2 + \sin x}$ используем формулу $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$, где под знаком дифференциала находится знаменатель дроби. Так как $d(2 + \sin x) = \cos x dx$, то

$$3 \int \frac{\cos x dx}{2 + \sin x} = 3 \int \frac{d(2 + \sin x)}{2 + \sin x} = 3 \cdot \ln|2 + \sin x| + c.$$

При вычислении интегралов в пункте б) применяются методы подстановки и интегрирования по частям, то есть по формуле $\int u dv = uv - \int v du$ мы от исходного интеграла $\int u dv$ переходим к более простому интегралу $\int v du$.

Пример. $\int x \cdot \arctg x dx = \int \arctg x \cdot x dx$, то есть возьмём

$$\left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = x dx \Rightarrow v = \int dv = \int x dx = \frac{x^2}{2}. \end{array} \right]$$

(здесь при нахождении v константу c полагаем равной 0).
Получим

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \int \operatorname{arctg} x \cdot x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{dx}{1+x^2}.$$

Возьмём $\int x^2 \cdot \frac{dx}{1+x^2}$ отдельно

$$\int x^2 \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + c$$

Итак

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + c.$$

Пример. Найти $\int x \cdot e^{-3x} dx$. Пусть

$$\left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx, \\ dv = e^{-3x} dx \Rightarrow v = \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int e^{-3x} d(-3x) = -\frac{1}{3} e^{-3x} \end{array} \right].$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{-3x} dx &= x \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) - \int \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) dx = -\frac{x e^{-3x}}{3} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx = \\ &= -\frac{x e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9} + c. \end{aligned}$$

Пример. При вычислении интеграла $I = \int \frac{2 + \sqrt{x+1}}{x+3} dx$ сделаем
подстановку $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1 \Rightarrow x = u^2 - 1 \Rightarrow dx = 2u du$,
 $x+3 = u^2 - 1 + 3 = u^2 + 2$. Получим

$$I = \int \frac{2 + \sqrt{x+1}}{x+3} dx = \int \frac{2+u}{u^2+2} 2u du = 2 \int \frac{2u+u^2}{u^2+2} du.$$

Дробь $\frac{2u+u^2}{u^2+2}$ неправильная (степень числителя не меньше степени знаменателя). Выделим целую часть

$$\frac{(u^2 + 2) - 2 + 2u}{u^2 + 2} = 1 - \frac{2}{u^2 + 2} + \frac{2u}{u^2 + 2}.$$

$$\text{Итак } I = 2 \int \frac{2u + u^2}{u^2 + 2} du = 2 \left(\int du - \int \frac{2du}{u^2 + 2} + \int \frac{2udu}{u^2 + 2} \right) = 2u - \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}} + \\ + 2 \cdot \ln(u^2 + 2) + c = 2\sqrt{x+1} - \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{2}} + 2 \cdot \ln|x+3| + c.$$

Здесь $\int du$ и $\int \frac{du}{u^2 + 2}$ табличные, а

$$\int \frac{2udu}{u^2 + 2} = \int \frac{d(u^2 + 2)}{u^2 + 2} = \ln(u^2 + 2) + c.$$

Для нахождения площадей плоских фигур и объёмов тел вращения в задачах № 31-60 рекомендуется изучить литературу [2, гл. II, § 2, с. 67 - 68; 4, п. 7.11 – 7.12, с. 185-190].

Пример. Найти площади частей, на которые круг $x^2 + y^2 = 12$ делится параболой $y = x^2$.

Сделаем схематический чертёж (рис.1) и найдём точки пересечения этих линий

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 12 - y^2 \\ x^2 = y \end{cases} \Rightarrow 12 - y^2 = y \Rightarrow$$

$$y^2 + y - 12 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}, \quad y = 3.$$

В точке пересечения $x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$. Площадь меньшей

$$S_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{12 - x^2} dx - \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^2 dx = \left(\frac{x}{2} \sqrt{12 - x^2} + 6 \cdot \arcsin \frac{x}{\sqrt{12}} \right) \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{12 - 3} + 6 \cdot \arcsin \sqrt{\frac{3}{12}} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{12 - 3} - 6 \cdot \arcsin \sqrt{\frac{3}{12}} \right) - \\ - \left(\frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{-3\sqrt{3}}{3} \right) = 3\sqrt{3} + 12 \cdot \frac{\pi}{6} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\pi.$$

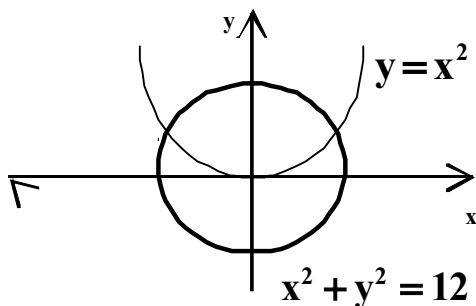


Рис.1

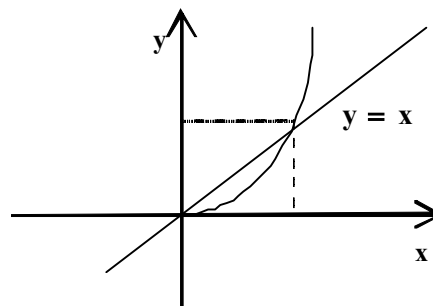


Рис.2

Площадь большей части

$$S_2 = \pi r^2 - S_1 = \pi \cdot 12 - \sqrt{3} - 2\pi = 10\pi - \sqrt{3}.$$

Пример. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x\sqrt{\sin x}$, $0 \leq x \leq \pi$.

Сделаем схематический чертёж (рис.2) и найдём точки пересечения этих линий

$$\begin{cases} y = x \\ y = x\sqrt{\sin x} \end{cases} \Rightarrow x - x\sqrt{\sin x} = 0, x_1 = 0, 1 - \sqrt{\sin x} = 0, \sin x = 1, x_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_a^b y_1^2 dx - \pi \int_a^b y_2^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \sin x dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} - 2x \sin x + (x^2 - 2) \cos x \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left(\frac{\pi^3}{24} - \pi + 2 \right),$$

$$\int x^2 \sin x dx = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x.$$

При нахождении длины дуги в задачах № 31-60 и массы неоднородной линии в задачах № 61-90 следует помнить, что дифференциал длины дуги выражается различными формулами [2, гл. II, § 2.2, с. 68; 4, п. 7.10.11, с. 184 - 185].

1) $ds = \sqrt{1 + (y'_x)^2} \cdot dx$, если линия задана в декартовых координатах;

- 2) $ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} \cdot dt$, если линия задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$;
- 3) $ds = \sqrt{r^2 + (r'(\theta))^2} \cdot d\theta$, если линия задана в полярных координатах $r = r(\theta)$.

Пример. Найти длину дуги кривой $r = \cos^2 \frac{\theta}{2}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Вычисляем $ds = \sqrt{r^2 + (r'(\theta))^2} \cdot d\theta$, $r'_\theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(-\sin \frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$.

$$r^2 + (r'(\theta))^2 = \cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$ds = \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = \cos \frac{\theta}{2} d\theta,$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Пример. Найти массу участка линии

$$L: \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ если плотность } \gamma = 3\gamma.$$

$$m = \int_L \gamma \cdot ds.$$

Найдём $ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} \cdot dt$,

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \cdot \sin t,$$

$$ds = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \cdot dt =$$

$$= a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \cdot dt =$$

$$= a\sqrt{2 - 2\cos t} \cdot dt = a\sqrt{2} \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}} \cdot dt = 2a \sin \frac{t}{2} \cdot dt.$$

$$m = \int_0^{2\pi} 3a(1 - \cos t) \cdot 2a \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 6a^2 \int_0^{2\pi} 2\sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 12a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt =$$

$$= 12a^2 \left(-2 \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \cos^3 \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 12a^2 \left(2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} \right) = 32a^2.$$

3. Теория функций комплексного переменного

3.1. Комплексные числа и действия над ними.

Более подробный теоретический материал и практические рекомендации по данной теме (№ 61-90) можно найти, например, в следующих учебниках: [1, т. 1, гл. VI, § 1, 2, с. 134 - 137; 3, т.2, § 5.3, с. 239-244].

Комплексными числами называются числа вида $z = x + i y$, где $i^2 = -1$, x, y — действительные числа, $x = \operatorname{Re} z$ — действительная часть, $y = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть комплексного числа.

По определению, два комплексных числа: $z_1 = x_1 + i y_1$ и $z_2 = x_2 + i y_2$ — равны тогда и только тогда, когда и $y_1 = y_2$.

Комплексное число $\bar{z}$ называется сопряженным комплексному числу z , если $\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$. Другими словами, если $z = x + i y$, то $\bar{z} = x - i y$.

Всякому комплексному числу $x + i y$ можно поставить в соответствие единственную точку плоскости $M(x, y)$ и обратно, всякую точку $M(x, y)$ плоскости XOY можно рассматривать как геометрический образ единственного комплексного числа $x + i y$.

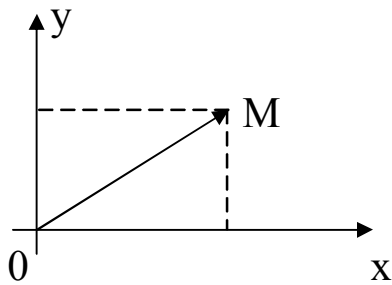


Рисунок 1

Для сокращения изложения не говорят: "точка, соответствующая комплексному числу $x+iy$ ", а говорят просто – "точка $x+iy$ ". При этом множество всех действительных чисел изображается точками оси абсцисс, которая поэтому называется действительной осью, множество чисто мнимых чисел iy точками оси ординат, называемой мнимой осью. Заметим, что одна точка мнимой оси, а именно начало координат,

изображает действительное число нуль. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется комплексной плоскостью.

В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением числа $x+iy$ радиус-вектор точки $M(x, y)$ – $\overrightarrow{OM} \{x, y\}$.

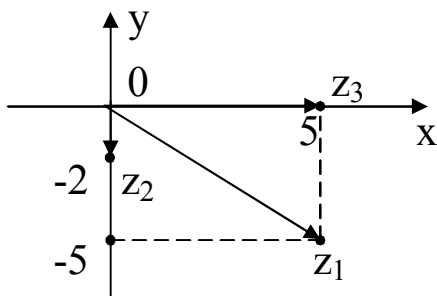


Рисунок 2

Пример 1. Построить точки $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 5$.

В дальнейшем, наряду с представлением комплексных чисел в декартовых координатах, полезно иметь их представление в обобщенных полярных координатах.

Рассмотрим число $x+iy$, которому на плоскости соответствует точка $M(x, y)$. Ее координаты в полярной системе координат (ρ, φ) .

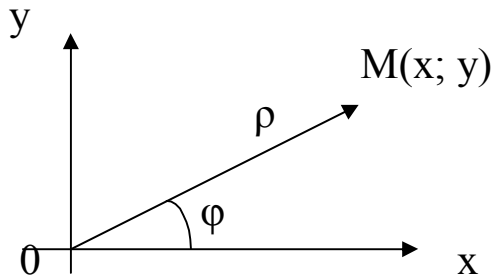


Рисунок 3

Тогда $x = \rho \cos \varphi$,
 $y = \rho \sin \varphi$.

$$z = x + i y = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Полярный радиус $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ называется *модулем* комплексного числа и обозначается $|z| = \rho$.

Полярный угол φ называется *аргументом* комплексного числа и обозначается $\varphi = \text{Arg } z$. Тогда

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| (\cos \text{Arg } z + i \sin \text{Arg } z).$$

Эта форма называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Модуль комплексного числа определяется однозначно:
 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π . Главным значением аргумента называется значение, заключенное в интервале $(-\pi, \pi]$. Обозначается оно $\arg z$. Таким образом, $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Очевидно, $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$.

Главное значение аргумента определяется однозначно.

Так как $\text{tg } \arg z = \frac{y}{x}$,

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } (x, y) \in \text{I, IV четвертям,} \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & \text{если } (x, y) \in \text{II четверти,} \\ \arctg \frac{y}{x} - \pi, & \text{если } (x, y) \in \text{III четверти.} \end{cases}$$

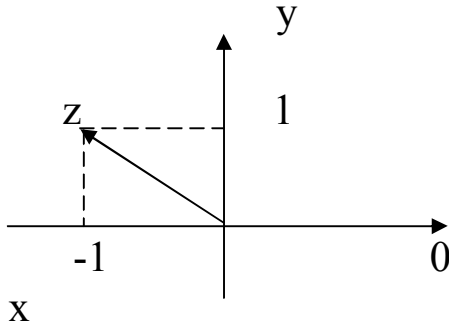
Тригонометрическая форма комплексного числа будет иметь вид

$$z = |z| \left(\cos(\arg z + 2k\pi) + i \sin(\arg z + 2k\pi) \right).$$

Пример 2. Написать в тригонометрической форме комплексное число $z = -1 + i$.

Решение. $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = -1$,

$$\arg z = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi.$$



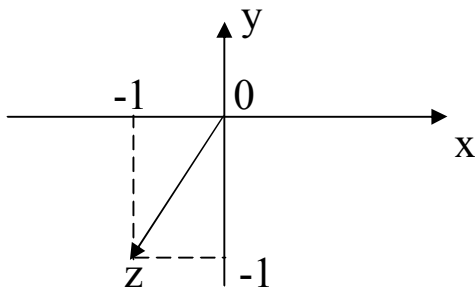
$$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) \right).$$

Рисунок 4

Пусть $z = x + i y = |z| (\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$. Используя формулу Эйлера $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$, получаем так называемую *показательную форму* записи комплексного числа:

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}.$$

Пример 3. Представить в показательной форме комплексное число $z = -1 - i$.



Решение

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = 1,$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi,$$

$$-1 - i = \sqrt{2} e^{-\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i}.$$

Рисунок 5

Пример 4. Вычислить $e^{\pi i}$.

Решение. По формуле Эйлера $e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.

3.2. Алгебраические действия над комплексными числами.

Для выполнения алгебраических действий над комплексными числами (№ 91-120) необходимо проработать литературу: [1, т. 1, гл. VI, § 3, с. 137, 138; 3, т.2, § 5.3, с. 239-244], где содержатся теоретический материал и практические рекомендации по данной теме.

Сложение и умножение комплексных чисел производится по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов с учетом $i \cdot i = -1$. При записи результата следует разделить действительную часть от мнимой части, т. е. собрать отдельно члены, содержащие множитель i , и члены, не содержащие множитель i :

$$(x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2),$$

$$(x_1 + i y_1) - (x_2 + i y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

В частности, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Операции сложения и вычитания сводятся к сложению и вычитанию векторов, изображающих эти числа. Отсюда расстояние между точками $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

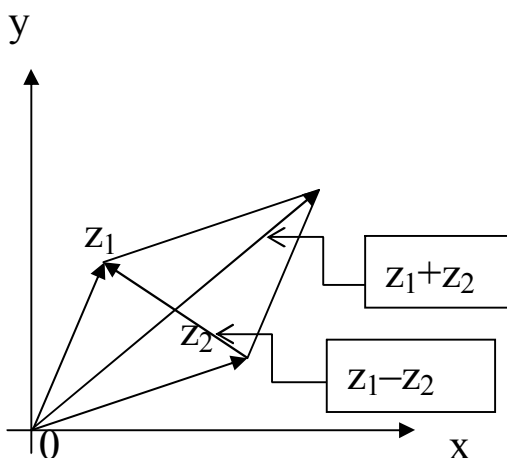


Рисунок 6

Пример 5.

$|z - z_0| = R$ – уравнение окружности с центром в точке z_0 и радиусом равным R .

Деление на комплексное число, отличное от нуля, определяется как действие, обратное действию умножения.

Для представления частного в виде $\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ следует провести простые преобразования, показанные на следующем примере.

Пример 6.
$$\frac{3-i}{1+2i} = \frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-6i-i-2}{1+4} = \frac{1-7i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Для модуля и аргумента произведения и частного справедливы следующие утверждения:

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$.

Пример 7. Найти модуль и аргумент произведения $z \cdot i$.

Решение. $|z \cdot i| = |z|$, $\operatorname{Arg}(z \cdot i) = \operatorname{Arg} z + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$.

Таким образом, умножение на i соответствует повороту вектора z на угол $\frac{\pi}{2}$;

2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$.

Пусть $z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$.

Тогда $z^2 = z \cdot z = |z|^2(\cos 2 \operatorname{Arg} z + i \sin 2 \operatorname{Arg} z)$.

Можно доказать методом полной математической индукции, что для любого целого $n > 0$: $z^n = |z|^n(\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z)$ (формула Муавра). Формула справедлива и для целых отрицательных n .

Пример 8. Вычислить $(\sqrt{3} - i)^5$.

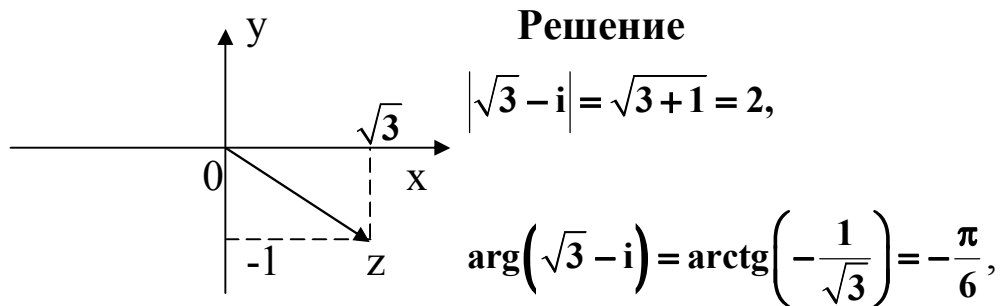


Рисунок 7

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \right),$$

$$(\sqrt{3} - i)^5 = 2^5 \left(\cos\left(-\frac{5}{6}\pi + 10k\pi\right) + i \sin\left(-\frac{5}{6}\pi + 10k\pi\right) \right) =$$

$$= 32 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = -16\sqrt{3} - 16i.$$

Корнем n -ой степени из комплексного числа называется такое число w , для которого $w^n = z$.

Используя формулу Муавра, получим

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \operatorname{Arg} w = \frac{\operatorname{Arg} z}{n} = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Для других значений k аргументы будут отличаться от полученных на число кратное 2π , и, следовательно, получатся значения корня, совпадающие с рассмотренными ранее. Итак, корень n -ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Пример 9. Найти все значения $\sqrt[3]{-8}$ и построить их.

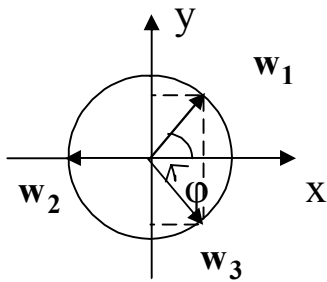


Рисунок 8

Решение. $|-8| = 8$, $\arg(-8) = \pi$,

$$-8 = 8(\cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)),$$

$$\sqrt[3]{-8} = 2\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right),$$

$$k = 0, \quad w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$k = 1, \quad w_2 = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin\frac{\pi + 2\pi}{3}\right) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2,$$

$$k = 2, \quad w_3 = 2\left(\cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin\frac{\pi + 4\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

В задачах № 91-120 при отыскании общего решения дифференциального уравнения первого порядка следует использовать литературу [2, т. 2, гл. VI, § 3, 4, с. 161 - 166; 4, п. 12.5-12.8, с. 169-277].

Перед решением задач нужно определить тип уравнения и метод решения, при этом можно руководствоваться табл.1.

Пример. Найти общее решение уравнения $\frac{y'}{\sin x} = y$.

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то получаем уравнение $\frac{dy}{dx} = y \cdot \sin x$ — уравнение первого типа. Разделяем переменные

$$\frac{dy}{y} = \sin x \cdot dx, \int \frac{dy}{y} = \int \sin x dx, \ln|y| = -\cos x + c,$$

где c — произвольная постоянная. Можно оставить решение в таком виде или выразить y в явном виде

$$y = e^{-\cos x + c}.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

Это уравнение второго типа, однородное, следовательно, делаем подстановку $\frac{y}{x} = u$, $y = ux$, $y' = u'x + u$. Уравнение примет вид

$$u'x + u = e^u + u, \quad \frac{du}{dx} \cdot x = e^u, \quad \frac{du}{dx} = \frac{e^u}{x}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{e^u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{e^u} = \int \frac{dx}{x}, \quad -e^{-u} = \ln|x| + \ln c.$$

Здесь мы обозначили произвольную постоянную не c , а $\ln c$ для удобства записи

$$-e^{-u} = \ln|cx|, \quad u = \frac{y}{x} \Rightarrow -e^{-\frac{y}{x}} = \ln|cx|.$$

Можно оставить решение в таком виде, а можно y выразить явно

$$e^{-\frac{y}{x}} = -\ln|cx|, \quad e^{-\frac{y}{x}} = \ln \frac{1}{|cx|}, \quad -\frac{y}{x} = \ln \ln \frac{1}{|cx|}, \quad y = -x \ln \ln \frac{1}{|cx|}.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y' + 2y = x$.

Это линейное уравнение $P(x) = 2$, $Q(x) = x$ (табл.1). Делаем подстановку $y = u(x) \cdot v(x)$, $y' = u'v + uv'$. Подставив эти соотношения в исходное уравнение, получаем $u'v + uv' + 2uv = x$. Одну из функций находим из уравнения

$$uv' + 2uv = 0, \quad \frac{dv}{dx} + 2v = 0,$$

тогда вторая функция u определяется из уравнения $u'v = x$.

Решая первое уравнение, находим функцию v , то есть

$$\frac{dv}{dx} = -2v, \quad \frac{dv}{v} = -2dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int 2dx, \quad \ln|v| = -2x, \quad v = e^{-2x},$$

Таблица 1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Тип дифференциального уравнения первого порядка	Вид уравнения	Метод решения
1. С разделяющимися переменными	$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$	$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx$
2. Однородное	$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Подстановка $\frac{y}{x} = u, y = ux,$ $y' = u'x + u$ приводит к уравнению первого типа
3. Линейное	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$	Подстановка $y = u(x) \cdot v(x)$ приводит к уравнениям первого типа $\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot v = 0,$ $\frac{du}{dx} \cdot v = Q(x)$

произвольную константу для функции v полагаем равной нулю.

Получаем уравнение для нахождения функции u

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-2x} = x, \quad du = \frac{x}{e^{-2x}} dx, \quad du = x \cdot e^{2x} dx, \quad \int du = \int x \cdot e^{2x} dx,$$

$$u = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c.$$

Решение исходного уравнения имеет вид

$$y = uv = \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c \right) \cdot e^{-2x}.$$

При решении задач № 121-150 используются приёмы решения дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными

коэффициентами, изложенные в литературе [2, т. 2, гл. VI, § 8, 9, с. 186 - 197; 4, п. 12.11-12.13, с. 279-286].

Для нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения используется табл. 2, а для нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения используется табл. 3.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 8y' + 16y = 2xe^{-4x},$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Таблица 2. Общее решение однородного уравнения

Вид общего решения однородного уравнения	Корни характеристического уравнения
1. $y_0 = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$	k_1, k_2 – вещественные, $k_1 \neq k_2$
2. $y_0 = (c_1 + c_2 x) e^{kx}$	k_1, k_2 – вещественные, $k_1 = k_2$
3. $y_0 = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$	k_1, k_2 – комплексные, $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$

Решение. Общее решение неоднородного уравнения можно записать в виде $y = y_0 + Y$, где y_0 – общее решение однородного уравнения

$$y'' + 8y' + 16y = 0,$$

которое определяется по табл. 3, а Y – частное решение неоднородного уравнения, которое определяется по табл. 4.

Для определения y_0 составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 8k + 16 = 0.$$

Его корни $k_1 = k_2 = -4$. Следовательно, $y_0 = e^{-4x}(c_1 + c_2 x)$.

Так как правая часть уравнения $f(x) = 2xe^{-4x}$, то $Y = x^2 \cdot e^{-4x}(Ax + B)$.

Здесь $a = -4$, $P_n(x) = 2x$, $r = 2$.

$$Y = e^{-4x}(Ax^3 + Bx^2).$$

$$Y' = -4e^{-4x}(Ax^3 + Bx^2) + e^{-4x}(3Ax^2 + 2Bx) =$$

$$= e^{-4x}(-4Ax^3 + x^2(-4B + 3A) + 2Bx).$$

$$Y'' = -4e^{-4x}(-4Ax^3 + x^2(-4B + 3A) + 2Bx) + e^{-4x}(12Ax^2 + 2x(-4B + 3A) + 2B) =$$

$$= e^{-4x}(16Ax^3 + x^2(16B - 24A) + x(-16B + 6A) + 2B).$$

Подставив эти значения в наше уравнение, получим

$$e^{-4x}(16Ax^3 + x^2(16B - 24A) + x(-16B + 6A) + 2B) + 8e^{-4x}(-4Ax^3 +$$

$$+ x^2(-4B + 3A) + 2Bx) + 16e^{-4x}(Ax^3 + Bx^2) = 2xe^{-4x}.$$

Таблица 3. Частное решение неоднородного уравнения

Вид правой части неоднородного дифференциального уравнения	Вид частного решения
$f(x) = e^{ax} \cdot P_n(x),$ $P_n(x)$ – многочлен степени n	$y = x^r \cdot e^{ax} \cdot Q_n(x),$ где $r = \begin{cases} 0, & \text{если } a \text{ не является корнем} \\ & \text{характерист. уравнения} \\ 1, & \text{если } a \text{ равно одному корню} \\ & \text{характерист. уравнения} \\ 2, & \text{если оба корня характерист.} \\ & \text{уравнения равны } a \end{cases}$ $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределёнными коэффициентами
$f(x) = e^{ax} \cdot \begin{pmatrix} P_n(x)\cos bx + \\ + Q_m(x)\sin bx \end{pmatrix}$ $P_n(x)$ – многочлен степени n , $Q_m(x)$ – многочлен степени $\square$	$y = x^r \cdot e^{ax} \cdot (S_N(x)\cos bx + Z_N(x)\sin bx)$ $r = \begin{cases} 0, & \text{если } a + bi \text{ не является корнем} \\ & \text{характерист. уравнения} \\ 1, & \text{если } a + bi \text{ равно одному корню} \\ & \text{характерист. уравнения} \end{cases}$ $\square$ равно наибольшей из степеней n и $\square$

Сократим на e^{-4x} и сгруппируем члены со степенями: x^3, x^2, x, x^0

$$x^3(16A - 32A + 16A) + x^2(16B - 24A - 32B + 24A + 16B) +$$

$$+x(-16B + 6A + 16B) + 2B = 2x,$$

или $6Ax + 2B = 2x$.

Приравниваем коэффициенты многочленов, стоящих в левой и правой части равенства, при одинаковых степенях x . Получаем систему уравнений для определения A, B .

$$\begin{cases} 6A = 2, \\ 2B = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ B = 0. \end{cases}$$

Итак, $Y = e^{-4x} \cdot \frac{1}{3}x^3$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$y = e^{-4x}(c_1 + c_2x) + e^{-4x} \cdot \frac{1}{3}x^3$, отсюда

$$y' = -4e^{-4x}(c_1 + c_2x) + e^{-4x} \cdot c_2 - 4e^{-4x} \cdot \frac{1}{3}x^3 + e^{-4x} \cdot x^2.$$

Подставляя в эти выражения начальные условия $x = 0, y = 1, y' = 2$, найдём c_1, c_2 .

$$\begin{cases} 1 = c_1, \\ 2 = -4c_1 + c_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1, \\ c_2 = 6. \end{cases}$$

Итак, искомое решение имеет вид

$$y = e^{-4x}(1 + 6x) + e^{-4x} \cdot \frac{1}{3}x^3.$$

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 13y = 4 \sin 5x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,235; y'(0) = 0$.

Решение. Общее решение неоднородного уравнения можно записать в виде $y = y_0 + Y$, где y_0 – общее решение однородного уравнения

$$y'' + 6y' + 13y = 0,$$

которое определяется по табл. 2, а Y – частное решение неоднородного уравнения, которое определяется по табл. 3.

Для определения y_0 составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 6k + 13 = 0.$$

$$\text{Его корни } k_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i.$$

Согласно таблице 3 $\alpha = -3, \beta = 2$, то есть

$$y_0 = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Для определения Y используем табл. 3. Так как $f(x) = 4 \sin 5x$, то $a = 0, b = 5, P_0(x) = 0, Q_0(x) = 4, r = 0$. Следовательно,

$$Y = A \cos 5x + B \sin 5x.$$

Для определения A, B подставим Y в первоначальное уравнение

$$\begin{aligned} Y' &= -5A \sin 5x + 5B \cos 5x, \\ Y'' &= -25A \cos 5x - 25B \sin 5x. \end{aligned}$$

Тогда уравнение примет вид

$$\begin{aligned} &-25A \cos 5x - 25B \sin 5x + 6(-5A \sin 5x + 5B \cos 5x) + \\ &+ 13(A \cos 5x + B \sin 5x) = 4 \sin 5x. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при $\cos 5x$ и $\sin 5x$ в левой и правой частях этого уравнения, получим систему

$$\begin{cases} -12A + 30B = 0, \\ -30A - 12B = 4. \end{cases} \quad A = \frac{30}{12}B = \frac{5}{2}B, \quad -30 \cdot \frac{5}{2}B - 12B = 4, \quad B = -0,115,$$

$$A = \frac{5}{2}(-0,115) = -0,046. \quad Y = -0,115 \cos 5x - 0,046 \sin 5x.$$

Общее решение нашего уравнения имеет вид

$$y = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) - 0,115 \cos 5x - 0,046 \sin 5x.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} y' &= -3e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + e^{-3x}(-2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x) \\ &+ 0,575 \sin 5x - 0,23 \cos 5x. \end{aligned}$$

Найдём из начальных условий $y(0) = 0,235; y'(0) = 0$ постоянные c_1, c_2 .

$$\begin{cases} 0,235 = c_1 - 0,115, \\ 0 = -3c_1 + 2c_2 - 0,23. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0,35, \\ c_2 = 0,64. \end{cases}$$

Итак, искомое решение имеет вид

$$y = e^{-3x}(0,35 \cos 2x + 0,64 \sin 2x) - 0,115 \cos 5x - 0,046 \sin 5x.$$

Контрольная работа №2

Интегралы.

1-30. Вычислить неопределённые интегралы.

- | | |
|---|--|
| 1. a) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}},$ | b) $\int \arccos x \cdot dx.$ |
| 2. a) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x},$ | b) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+5} \cdot dx.$ |
| 3. a) $\int \frac{xdx}{x^4+1},$ | b) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \cdot dx.$ |
| 4. a) $\int \frac{dx}{4x^2+7},$ | b) $\int \frac{1}{\sqrt{x-3}-1} \cdot dx$ |
| 5. a) $\int x \cdot \cos(x^2) dx,$ | b) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} \cdot dx.$ |
| 6. a) $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x dx,$ | b) $\int \frac{1}{(x+12)\sqrt{x+3}} \cdot dx.$ |
| 7. a) $\int x^2 \cdot \sqrt{x^3+5} \cdot dx,$ | b) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{(x-1)^3}} \cdot dx.$ |
| 8. a) $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x} dx,$ | b) $\int \arcsin x \cdot dx.$ |
| 9. a) $\int \frac{xdx}{4x^2+7},$ | b) $\int x \cdot \arctg x \cdot dx.$ |
| 10. a) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x}+5},$ | b) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}} \cdot dx.$ |
| 11. a) $\int \frac{e^{\sqrt{2x+1}} dx}{\sqrt{2x+1}},$ | b) $\int \frac{1-\sqrt{x+2}}{(x+2)-2\sqrt{x+2}} \cdot dx.$ |
| 12. a) $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{2}} dx,$ | b) $\int \frac{\sin^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx.$ |
| 13. a) $\int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx,$ | b) $\int \frac{1+\sqrt{x+4}}{x+5} \cdot dx.$ |
| 14. a) $\int \frac{\sin x dx}{4-\cos x},$ | b) $\int (x+2) \ln x \cdot dx.$ |
| 15. a) $\int \frac{\sqrt{3-\ln 2x} \cdot dx}{x},$ | b) $\int x^2 \arcsin x \cdot dx.$ |

16. a) $\int x \cdot e^{x^2-3} dx,$

17. a) $\int \frac{2dx}{4x - x \ln x},$

18. a) $\int \frac{dx}{1 + \cos 6x},$

19. a) $\int \frac{\sin 2x \cdot dx}{1 - \cos 2x},$

20. a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 5}},$

21. a) $\int \frac{4dx}{\sqrt{2 - 6x^2}},$

22. a) $\int \frac{\cos x \cdot dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}},$

23. a) $\int x \cdot e^{-x^2} dx,$

24. a) $\int \frac{\sin \sqrt{x} \cdot dx}{\sqrt{x}},$

25. a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 - 1}},$

26. a) $\int \frac{\cos x \cdot dx}{\sqrt[3]{3 + 5 \sin x}},$

27. a) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x},$

28. a) $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5 \cdot \sqrt{1 - x^2}},$

29. a) $\int \frac{dx}{\arctg^3 x \cdot (1 + x^2)},$

30. a) $\int \frac{\sqrt{\arcsin^3 x} \cdot dx}{\sqrt{1 - x^2}},$

b) $\int \arctg \sqrt{x} \cdot dx.$

b) $\int x^2 \cdot e^{3x} \cdot dx.$

b) $\int \frac{x}{\sin^2 x} \cdot dx.$

b) $\int \frac{x \cdot \sin x}{\cos^2 x} \cdot dx.$

b) $\int \frac{4 + x}{\sqrt{x + 1} + 7} \cdot dx.$

b) $\int \frac{\sqrt{x + 2}}{x + 11} \cdot dx.$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{3 + e^x}} \cdot dx.$

b) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} \cdot dx.$

b) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1 - e^x}} \cdot dx.$

b) $\int x^2 \cdot e^{-2x} \cdot dx.$

b) $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \cdot dx.$

b) $\int x^2 \cdot \cos x \cdot dx.$

b) $\int \sqrt{x} \cdot \ln^2 x \cdot dx.$

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x - 1}} \cdot dx.$

b) $\int x^2 \cdot \sin 2x \cdot dx.$

31-60. Задачи на геометрические приложения определённого интеграла

31. Найти площади частей, на которые круг $x^2 + y^2 \leq 8$ делится параболой $y = \frac{1}{2}x^2$.
32. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = x(x-1)^2$ и осью абсцисс Ox .
33. Найти длину дуги параболы $y = x^2$ от точки $x = 0$ до точки $x = 1$.
34. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}x^2$ и $2x + 2y - 3 = 0$.
35. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 0$ и $y = \sin^2 x$, $(0 \leq x \leq \pi)$.
36. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $x^2 + 8y = 8$ и $x^2 - 24y = 40$.
37. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.
38. Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками её пересечения с осью Ox .
39. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{4x}$, $y = 0$, $x = 1$.
40. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ от точки $x = \sqrt{3}$ до точки $x = \sqrt{8}$.
41. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = x - x^{\frac{3}{2}}$ и осью абсцисс Ox .
42. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x \cdot e^x$, $x = 1$, $y = 0$.
43. Найти площади фигур, на которые парабола $y^2 = 6x$ делит круг $x^2 + y^2 \leq 16$.

44. Вычислить площадь фигуры, заключённой между линией $y = \frac{1}{1+x^2}$ и параболой $y = 0,5x^2$.
45. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = 0,5(x-2)^2$ и $y = 2$.
46. Найти длину дуги кривой $x = \frac{1}{6}t^6$, $y = 4 - \frac{1}{4}t^4$ между точками её пересечения с осями координат.
47. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = e^{2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$, $x = 0$.
48. Найти длину дуги кривой $y = \ln(1-x^2)$ от точки $x = 0$ до точки $x = 0,5$.
49. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$.
50. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = \arcsin x$ и прямыми $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$.
51. Найти длину дуги кривой $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ от $t = 0$ до точки $t = 1$.
52. Найти объём тела, образованного вращением параболического сегмента с основанием $2a$ и высотой h вокруг высоты.
53. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x + 1$ и $y^2 = 9 - x$.
54. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.
55. Найти длину дуги астроиды $x = a \cdot \cos^3 t$, $y = a \cdot \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
56. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки $M(4,8)$.
57. Фигура ограничена кривой $x = a \cdot \cos t$, $y = a \cdot \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ и осями координат Ox , Oy . Найти объём тела вращения.

58. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 3$ и осью Oy .
59. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$, $x = 0$.
60. найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 1$, $y = 4$, $y = 2x$, $y = \sqrt{x}$.

Задачи № 61-90. Задания: а) представить комплексное число в тригонометрической форме, б) представить комплексное число в показательной форме; в) выполнить указанные действия над комплексными числами, г) вычислить корень или решить уравнение.

61. а) $1+i$, б) $3-3\sqrt{3}i$, в) $\frac{7-5i}{1-2i} + i(1-i)$, г) $\sqrt[4]{1-i}$;

62. а) $1-i$ б) $2-2i$, в) $\frac{7-2i}{2+i} + (i)^{11}$, г) $\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i}$;

63. а) $-1+i$ б) $\frac{7}{2} + \frac{7}{2\sqrt{3}}i$, в) $\frac{5}{1+2i} + (i)^{18}$, г) $\sqrt{-1,2-1,2i}$;

64. а) $-1-i$, б) $-5+5i$, в) $\frac{1+i}{1-i} + (i)^4$, г) $\sqrt[3]{3i-\sqrt{3}}$;

65. а) $-2i$, б) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, в) $-\frac{12}{5}i + i(2+i)^2$, г) $\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{3}}i}$;

66. а) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, б) $1+\sqrt{3}i$, в) $(i)^{23} - \frac{17-6i}{3-4i}$, г) $\sqrt{7+7i}$;

67. а) $-\sqrt{3}+i$, б) $4i$ в) $\frac{4}{1+\sqrt{3}i} + \frac{\sqrt{3}}{i}$, г) $\sqrt[3]{-\sqrt{2}-\sqrt{6}i}$;

68. а) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, б) $-\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$ в) $(3i+2) \cdot (-i)^9 + \frac{i+1}{i-1}$, г) $\sqrt[5]{i-1}$;

69. а) $\sqrt{3}+i$, б) $-\sqrt{2}-\sqrt{6}i$, в) $(0,2-0,3i) \cdot (0,5+0,6i) + (i)^{26}$,
г) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$;

$$70. \text{a) } 0,5 + 0,5\sqrt{3}i, \text{ б) } 1 - i, \text{ в) } (3 + \sqrt{3}i) \cdot (3 - \sqrt{3}i) + (i)^{33}, \text{ г) } \sqrt[4]{-1 + \sqrt{3}i};$$

$$71. \text{a) } -\sqrt{3} + \sqrt{3}i, \text{ б) } 2i, \text{ в) } \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}, \text{ г) } \sqrt[3]{-2-2i};$$

$$72. \text{a) } 3\sqrt{3} - 3i, \text{ б) } -\sqrt{3} + i, \text{ в) } (i)^{37} + \frac{7+5i}{1-2i}, \text{ г) } z^4 - 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}i = 0;$$

$$73. \text{a) } 0,5 - 0,5i, \text{ б) } -2, \text{ в) } (i)^{25} - \frac{3-4i}{4-3i}, \text{ г) } z^2 - 7 + 7i = 0;$$

$$74. \text{a) } 4i, \text{ б) } i, \text{ в) } \frac{32}{1+3\sqrt{3}i} - \frac{3\sqrt{7}}{2i}, \text{ г) } z^6 - \sqrt{3} - i = 0;$$

$$75. \text{a) } -0,7 + 0,7i, \text{ б) } 1 + i, \text{ в) } \frac{1-i^2}{(1+i)^2} + 3 + i, \text{ г) } z^4 + 1 + \sqrt{3}i = 0;$$

$$76. \text{a) } 1 - \sqrt{3}i, \text{ б) } -1 + i, \text{ в) } (i)^{44} - \frac{1-i}{i}, \text{ г) } z^4 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 0;$$

$$77. \text{a) } -2 + 2i, \text{ б) } -1 - i, \text{ в) } (-0,5 - 0,5\sqrt{3}i)^2 + 0,5\sqrt{3}(i)^{35}, \\ \text{г) } z^3 - \sqrt{2} + \sqrt{6}i = 0;$$

$$78. \text{a) } 3i, \text{ б) } \sqrt{3} + i, \text{ в) } \left(\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^4, \text{ г) } z^5 + 1 + i = 0;$$

$$79. \text{a) } -1,2, \text{ б) } -2i, \text{ в) } (2 - \sqrt{2}i)^2 + \frac{1+i}{i}, \text{ г) } z^4 - 1 + \sqrt{3}i = 0;$$

$$80. \text{a) } \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \text{ б) } 3 - 3i, \text{ в) } (i)^{17} + \frac{2i}{(3-i)}, \text{ г) } z^2 + 2 - 2i = 0;$$

$$81. \text{a) } -\sqrt{2} - \sqrt{6}i, \text{ б) } -3i, \text{ в) } \frac{(2-i)}{3+i} \cdot (1+i^6) + (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^2, \text{ г) } z^3 - \frac{i}{8} = 0.;$$

$$82. \text{a) } \sqrt{3} - i, \text{ б) } 2 + 2i, \text{ в) } \frac{(i)^{13} \cdot (i-1)}{2+i} + 1, \text{ г) } z^3 - 8i = 0;$$

$$83. \text{a) } -\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i, \text{ б) } 2 - 2\sqrt{3}i, \text{ в) } (1 + 2i) \cdot (i)^{21} + \frac{5-i}{i}, \text{ г) } z^3 - i = 0;$$

$$84. \text{a) } -5i, \text{ б) } 3 - 3\sqrt{3}i, \text{ в) } (i)^{23} - \frac{17-6i}{3-4i}, \text{ г) } z^4 - \sqrt{3} + i = 0;$$

$$85. \text{a) } 3 - 3\sqrt{3}i, \text{ б) } 2 - 2i, \text{ в) } -\frac{12}{5}i + i(2+i)^2, \text{ г) } z^3 - \sqrt{3}i - 3 = 0;$$

$$86. \text{a) } 1 + \sqrt{3}i, \text{ б) } \frac{7}{2} + \frac{7}{2\sqrt{3}}i, \text{ в) } \frac{1+i}{1-i} + (i)^4, \text{ г) } z^3 - \sqrt{6} + \sqrt{2}i = 0;$$

$$87. \text{a) } -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i, \text{ б) } -5 + 5i, \text{ в) } \frac{5}{1+2i} + (i)^{18}, \text{ г) } z^3 + 1 + \sqrt{3}i = 0;$$

$$88. \text{a) } -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \text{ б) } \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ в) } \frac{7-2i}{2+i} + (i)^{11}, \text{ г) } z^4 - \sqrt{3}i + 1 = 0;$$

$$89. \text{a) } -8i, \text{ б) } -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \text{ в) } \frac{7-5i}{1-2i} + i(1-i), \text{ г) } z^3 - \sqrt{2} - \sqrt{6}i = 0;$$

$$90. \text{a) } -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \text{ б) } 1 + \sqrt{3}i, \text{ в) } (i)^{22} + \frac{7+5i}{1-2i}, \text{ г) } z^3 + 3i - \sqrt{3} = 0.$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задачи № 91-120. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка

$$91. \quad y' + \frac{y}{x} - x = 0.$$

$$92. \quad (x^2 + y^2)dy = 2xydx.$$

$$93. \quad y' + ay = e^{mx}.$$

$$94. \quad ydy + (x - 2y)dx = 0.$$

$$95. \quad xdy = (x + y)dx.$$

$$96. \quad y - x \cdot y' = y \ln \frac{x}{y}.$$

$$97. \quad (1 - x^2)y' - xy = 1.$$

$$98. \quad y - x \cdot y' = x + yy'.$$

$$99. \quad xdy - ydx = ydy.$$

$$100. \quad \frac{dx}{dy} - x + y = 0.$$

$$101. \quad (x - y)y - x^2y' = 0.$$

$$102. \quad xdy - 2ydx = ydy.$$

$$103. \quad y' + 3y + x = 0.$$

$$104. \quad (y^2 - 3x^2)dx + 2xydy = 0.$$

$$105. \quad y' + 2y = e^{-x}.$$

$$106. \quad y^2 + x^2 \cdot y' = xy y'.$$

$$107. \quad y' - \frac{1 + 2x}{x^2}y = 1.$$

$$108. \quad xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$$

$$109. \quad y' + 2xy - x^3 = 0.$$

$$110. \quad (y - x)dx = (x + y)dy.$$

$$111. \quad y' - y = xe^x.$$

$$112. \quad ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0.$$

$$113.$$

$$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$$

$$114. \quad y' = \operatorname{tg} \frac{y}{x} + \frac{y}{x}.$$

$$115. \quad (x + 2y)ydx = x^2dy.$$

$$116. \quad y' - x = y.$$

$$117. \quad y' \cdot \ln x + \frac{y}{x} = x.$$

$$118. \quad y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x = x.$$

$$119. \quad y' \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{y}{1 + x^2} = 2x.$$

$$120. \quad 2xy' - yy' = y.$$

Задачи № 121-150. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

121. $y'' + 9y = \cos 3x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
122. $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
123. $y'' - 2y' + y = xe^x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 3$.
124. $y'' + y' = x^2 - 5$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
125. $y'' + 4y' + 29y = x^2 - x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$.
126. $y'' + 3y' + 2y = 3e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.
127. $y'' + 2y' = x^2 + 3x + 4$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 4$.
128. $y'' - y' - 6y = -2e^{3x}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$.
129. $y'' + y' - 2y = (x - 2)e^x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
130. $y'' + y = 6\cos 2x - \sin 2x$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 1$.
131. $y'' - 4y' + 13y = \sin 3x$, $y(0) = \frac{5}{7}$, $y'(0) = \frac{1}{7}$.
132. $2y'' + 5y' = 30x^2 - 4$, $y(0) = 4$, $y'(0) = \frac{5}{2}$.
133. $y'' - y' = e^{2x}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$.
134. $y'' + 2y' + 5y = x^2 - 3x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$.
135. $y'' - 3y' = -3e^{3x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 6$.
136. $y'' + 4y' + 4y = 15e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
137. $y'' + y' - 2y = 2e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$.
138. $y'' - 5y' + 6y = -3e^{-x}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.
139. $4y'' + 4y' + y = x^2 + x - 1$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 0,5$.
140. $y'' + 2y' + 2y = 2e^{2x}$, $y(\pi) = -3$, $y'(\pi) = 4$.
141. $y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.
142. $y'' - 4y = 4x^2 + x - 8$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.
143. $y'' - y = 6e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.
144. $y'' + 5y' + 6y = 10e^{2x}$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -2$.
145. $y'' - 8y' + 7y = 6xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 7$.

$$146. y'' - 6y' + 13y = x^2 - x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0.$$

$$147. y'' - y = 8e^{3x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2.$$

$$148. y'' - 2y' = 6x^2 - 3, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4.$$

$$149. y'' + 4y = x^2 - x + 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'(\pi) = 4.$$

$$150. y'' + 6y' + 10y = 2e^{-3x}, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1.$$

Список рекомендуемой литературы

Основная литература.

1. Лунгу К. Н., Макаров Е. В. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 1. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.; ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 216 с.
2. Лунгу К. Н., Макаров Е. В. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2. – М.; ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 384 с.
3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. – 6-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 509 с.
4. Малахов А. Н., Максюков Н. И., Никишкин В. А. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА: Учебно-методический комплекс. – М.: Изд. центр ЕАОИ. 2008. – 315 с.

Дополнительная литература.

5. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной : учеб. пособие для студентов техн. специальностей вузов / под общ. ред. А. П. Рябушко. - Минск: Высшэйшая школа, 2007. - 304 с.
6. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч. Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студентов

технич. специальностей вузов / под общ. ред. А. П. Рябушко. - Минск: Вышэйшая школа, 2007. - 396 с.

7. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч. Ч. 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: учеб. пособие для студентов техн. специальностей вузов / под общ. ред. А. П. Рябушко. - Минск: Вышэйшая школа, 2009. - 367 с.
8. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие. - СПб: Лань, 2005. - 240 с.
9. Шипачев В.И. Высшая математика: учебник для вузов. - М.: Высшая школа, 2005. - 479 с.
10. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч.1: учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - М.: ОНИКС, 2006. - 304 с.
11. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч.2: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. // П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - М.: ОНИКС: Мир и образование, 2006.- 416 с.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. Т. 1. учеб. пособие для втузов. - М.: Интеграл-Пресс, 2008. - 416 с.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. Т. 2. учеб. пособие для студентов втузов. - М.: Интеграл-Пресс, 2006. - 544 с.

Составители
Анатолий Иванович Бабин
Екатерина Анатольевна Волкова
Елена Валерьевна Прейс

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольная работа № 2
для студентов 1 курса (2 семестр) специальности 130400.65 «Горное дело»,
специализаций 130401.65, 130403.65, 130404.65, 130405.65, 130406.65
заочной формы обучения

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 14.11.2012. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Отпечатано на ризографе.
Уч-изд. л. 1,1. Тираж 110 экз. Заказ
КузГТУ. 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28.
Типография КузГТУ. 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4а.