МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДЕПАРТАМЕНТ КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ

ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРОИНЖЕНЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

кафедра высшей математики

Высшая математика

Программа, методические указания и контрольные задания

для студентов – заочников специальности «Экономика и управление АПК»

Челябинск
2005

Программа, методические указания и контрольные задания по курсу учебной дисциплины «Математика» федерального компонента цикла ЕН. Ф. 01 для студентов заочного отделения экономических специальностей сельскохозяйственных ВУЗов. Содержат контрольные задания, примеры решения типовых задач, вопросы и задачи для самостоятельной подготовки к экзамену.

Составители
К.Н.Кудрявцев - ст.преподаватель (ЧГАУ)
А.Б.Самаров - к.ф.- м.н., доцент, (ЮУрГУ)
С.А.Скрипка - ст. преподаватель (ЧГАУ)

Рецензенты
А.А.Копченов - к.т.н., доцент (ЧГАУ)
Е.А.Резников - к.ф.- м.н., доцент кафедры математического анализа ЮурГУ

Ответственный за выпуск: С.А.Скрипка – зав. кафедрой высшей математики, ЧГАУ

Печатаются по решению методической комиссии факультета ЭАСХП.

Подписано к печати 11.04.05. Формат 60х84/16.

Уч.- изд.л. 6 Заказ Тираж 200

РИО ЧГАУ

454080, Челябинск, пр. Ленина, 75

ООП ЧГАУ.

Высшая математика

Программа, методические указания
и контрольные задания

для студентов – заочников
специальности «Экономика и управление АПК»

В соответствии с учебным планом студенты-заочники специальности «Экономика и управление в АПК» выполняют по курсу высшей математики четыре контрольных работы.

При выполнении контрольной работы необходимо строго придерживаться следующих правил:

1. Студент обязан делать работу только своего варианта и отсылать ее на рецензирование в сроки, предусмотренные графиком.
2. Контрольные работы следует выполнять в ученической тетради пастой любого цвета, кроме красного, оставляя поля (3-4 см) для замечаний рецензента. Рекомендуется оставлять после выполненной работы несколько чистых страниц для работы над ошибками в соответствии с указаниями рецензента.
3. На обложке тетради студент обязан указать свою фамилию, имя, отчество, номер зачетной книжки, домашний адрес и дату отправки, а также номер работы, курс и специальность.
4. Перед решением задачи нужно полностью выписать ее условие. Если несколько задач имеют общую формулировку, переписать следует только **условие задачи нужного варианта**. Решение каждой задачи студент должен сопровождать подробными объяснениями и ссылками на соответствующие формулы, теоремы и правила.
5. После получения отрецензированной работы студенту необходимо исправить все ошибки. Переделанная работа высылается на повторное рецензирование. Работа над ошибками проводится в той же тетради, где работа была выполнена первоначально, на чистых листах.

Работы, выполненные без соблюдения этих правил, к проверке не принимаются и возвращаются без рецензирования для переработки. На зачет или экзамен студент должен явиться с зачтенными контрольными работами.

Каждому студенту предлагается индивидуальное задание. Перед каждой контрольной работой в методических указаниях помещена таблица. Номера задач контрольных работ определяются с помощью двух последних цифр номера зачетной книжки студента. В таблице по горизонтали указывается последняя цифра номера зачетной книжки, а по вертикали – предпоследняя цифра номера зачетной книжки.

Контрольная работа № 1

Для определения индивидуальных заданий к контрольной работе №1 используйте таблицу №1.

Таблица №1

		Последняя цифра номера зачетной книжки				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	**1**	1, 31, 61, 91, 12, 151	2, 32, 62, 92, 122, 152	3, 33, 63, 93, 123, 153	4, 34, 64, 94, 124, 154	5, 35, 65, 95, 125, 155
	2	11, 41, 71, 101, 131, 161	12, 42, 72, 102, 132, 162	13, 43, 73, 103, 133, 163	14, 44, 74, 104, 134, 164	15, 45, 75, 105, 135, 165
	3	21, 51, 81, 111, 141, 171	22, 52, 82, 112, 142, 172	23, 53, 83, 113, 143, 173	24, 54, 84, 114, 144, 174	25, 55, 85, 115, 145, 175
	4	20, 41, 80, 101, 131, 161	19, 40, 79, 100, 130, 162	18, 39, 78, 99, 129, 163	17, 38, 77, 98, 128, 164	16, 37, 76, 97, 127, 165
	5	10, 31, 70, 91, 121, 171	9, 51, 69, 111, 141, 172	8, 52, 68, 112, 142, 173	7, 53, 67, 113, 143, 174	6, 54, 66, 114, 144, 175
	6	30, 60, 90, 120, 150, 151	29, 40, 89, 100, 130, 152	28, 41, 88, 101, 131, 153	27, 42, 87, 102, 132, 154	26, 43, 86, 103, 133, 155
	7	2, 49, 62, 109, 139, 161	3, 50, 63, 110, 140, 162	4, 51, 64, 111, 141, 163	5, 52, 65, 112, 142, 164	6, 53, 64, 113, 143, 165
	8	12, 59, 72, 119, 149, 171	13, 60, 73, 120, 150, 172	14, 31, 74, 91, 121, 173	15, 32, 75, 92, 122, 174	16, 33, 76, 93, 123, 175
	9	22, 39, 82, 99, 129, 161	23, 40, 83, 100, 130, 159	24, 41, 84, 101, 131, 158	25, 42, 85, 102, 132, 157	26, 43, 86, 103, 133, 156
	0	15, 49, 75, 109, 139, 171	14, 50, 74, 110, 140, 172	13, 51, 73, 111, 141, 173	12, 52, 72, 112, 142, 174	11, 53, 71, 113, 143, 175

Продолжение таблицы №1

		Последняя цифра номера зачетной книжки				
		6	**7**	**8**	**9**	**0**
Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	**1**	6, 36, 66, 96, 126, 156	7, 37, 67, 97, 127, 157	8, 38, 68, 98, 128, 158	9, 39, 69, 99, 129, 159	10, 40, 70, 100, 130, 160
	2	16, 46, 76, 106, 136, 166	17, 47, 77, 107, 137, 167	18, 48, 78, 108, 138, 168	19, 49, 79, 109, 139, 169	20, 50, 80, 110, 140, 170
	3	26, 56, 86, 116, 146, 176	27, 57, 87, 117, 147, 177	28, 58, 88, 118, 148, 178	29, 59, 89, 119, 149, 179	30, 60, 90, 120, 150, 180
	4	15, 36, 75, 96, 126, 166	14, 35, 74, 95, 125, 167	13, 34, 73, 94, 124, 168	12, 33, 72, 93, 123, 169	11, 32, 71, 92, 122, 170
	5	5, 55, 65, 115, 145, 176	4, 56, 64, 116, 146, 177	3, 57, 63, 117, 147, 178	2, 58, 62, 118, 148, 179	1, 59, 61, 119, 149, 180
	6	25, 44, 85, 104, 134, 156	24, 45, 84, 105, 135, 157	23, 46, 83, 106, 136, 158	22, 47, 82, 107, 137, 159	21, 48, 81, 108, 138, 160
	7	7, 54, 67, 114, 144, 166	8, 55, 68, 115, 145, 167	9, 56, 69, 116, 146, 168	10, 57, 70, 117, 147, 169	11, 58, 71, 118, 148, 170
	8	17, 34, 77, 94, 124, 176	18, 35, 78, 95, 125, 177	19, 36, 79, 96, 124, 178	20, 37, 80, 97, 127, 179	21, 38, 81, 98, 128, 180
	9	27, 44, 87, 104, 134, 155	28, 45, 88, 105, 135, 154	29, 46, 89, 106, 136, 153	30, 47, 90, 107, 137, 152	1, 48, 61, 108, 138, 151
	0	10, 54, 70, 114, 144, 176	9, 55, 69, 115, 145, 177	8, 56, 68, 116, 146, 178	7, 57, 67, 117, 147, 179	6, 58, 66, 118, 148, 180

Программа

1. Линии на плоскости и их уравнения. Прямая на плоскости. Виды уравнения прямой. Угол между прямыми.
2. Определители. Свойства определителей. Системы линейных алгебраических уравнений. Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера.
3. Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц.
4. Обратная матрица. Нахождение обратной матрицы. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом.
5. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.
6. Ранг матрицы. Теорема Кронекера - Капелли. Исследование систем линейных алгебраических уравнений. Решение произвольных систем линейных алгебраических уравнений.

Вопросы для самостоятельного изучения

1. Векторы. Основные понятия. Линейные операции над векторами.
2. Разложение вектора на компоненты. Координаты вектора. Линейные операции над векторами в координатной форме.
3. Скалярное произведение и его свойства. Скалярное произведение в координатной форме.
4. Длина вектора, угол между векторами. Направляющие косинусы.
5. Понятие о n – мерном векторе. n – мерное векторное пространство. Базис, размерность.
6. Плоскость в пространстве. Виды уравнений плоскости. Угол между двумя плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
7. Прямая в пространстве. Виды уравнения прямой. Угол между двумя прямыми, условия их параллельности и перпендикулярности.

8. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Их канонические уравнения и свойства. Эксцентриситет, асимптоты.

Вопросы для самопроверки

1. Как построить точку по заданным декартовым координатам? Какие значения имеют координаты точек в различных четвертях?
2. Чем отличаются друг от друга декартовы координаты двух точек, симметричных относительно оси абсцисс, оси ординат, начала координат?
3. Как найти расстояние между двумя точками? Какой вид примет формула расстояния между точками, если:
   а) точки имеют одинаковые абсциссы, но различные ординаты;
   б) точки имеют одинаковые ординаты, но различные абсциссы;
   в) одна из точек является началом координат?
4. Как найти координаты точки, делящей отрезок в данном отношении через координаты его концов? Координаты середины отрезка?
5. Что называется уравнением линии на плоскости? Как проверить, проходит ли линия через точку?
6. Как найти точку пересечения двух линий, заданных своими уравнениями?
7. Чем отличается уравнение прямой линии в декартовой системе координат от уравнений других линий?
8. Как расположена прямая относительно осей координат, если в ее уравнении отсутствует свободный член? Одна из координат? Напишите уравнения осей координат.
9. Как вычислить угол между прямыми? Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых?
10. Как найти угловой коэффициент прямой по ее общему уравнении?
11. Как найти расстояние от точки до прямой?
12. Сформулируйте правила вычисления определителей второго и третьего порядков.

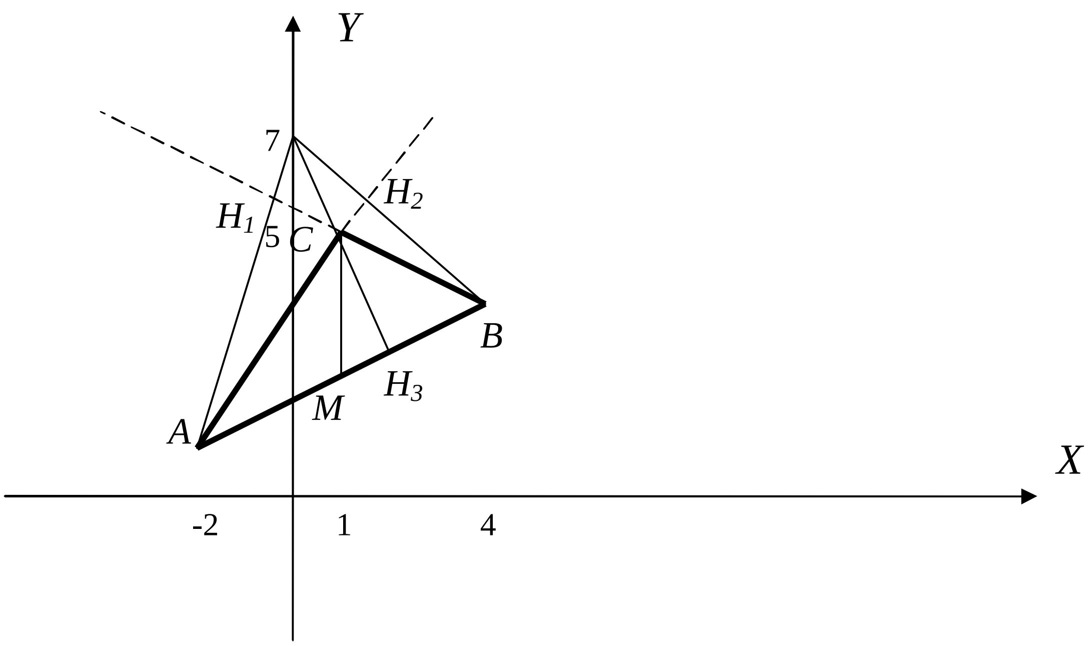
13. Что такое матрица? Что такое квадратная матрица? Что такое единичная матрица?
14. Как получить матрицу, транспонированную по отношению к данной матрице?
15. Что такое обратная матрица? Как ее найти? Существует ли обратная матрица по отношению к матрице размера 4×5?
16. Что называется решением системы линейных алгебраических уравнений?
17. Чем отличается несовместная система уравнений от неопределенной?
18. Какие системы уравнений называются равносильными?
19. Что такое ранг матрицы?

Задача №1

Даны координаты вершин треугольника: $A(-2;1)$, $B(4;4)$, $C(1;5)$. Найти длину стороны AC, уравнение медианы CM, координаты точки пересечения высот Z, внутренний угол A. Сделать чертеж.

Решение:

Выполним чертеж.



Расстояние между точками P_1 $(x_1; y_1)$ и P_2 $(x_2; y_2)$ можно вычислить с помощью формулы

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Тогда

$$|AC| = \sqrt{(1+2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Найдем координаты середины M стороны AB как полусумму соответствующих координат точек A и B:

$$x_M = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad y_M = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}; \quad M\left(1; \frac{5}{2}\right).$$

Медиана CM перпендикулярна оси абсцисс, так как абсциссы точек C и M совпадают. Поэтому уравнение медианы CM имеет вид:

$$x = 1.$$

Запишем уравнение каждой стороны треугольника как уравнения прямой, проходящей через две точки.

Уравнение AB:

$$\frac{x+2}{4+2} = \frac{y-1}{4-1} \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Уравнение BC:

$$\frac{x-4}{1-4} = \frac{y-4}{5-4} \quad \text{или} \quad y = -\frac{1}{3}x + 5\frac{1}{3}.$$

Уравнение AC:

$$\frac{x+2}{1+2} = \frac{y-1}{5-1} \quad \text{или} \quad y = -\frac{4}{3}x + 3\frac{2}{3}.$$

Так как высота AH_1 перпендикулярна стороне BC, то

$$k_{AH_1} = -\frac{1}{k_{BC}} = 3.$$

Уравнение высоты AH_1:

$$y - 1 = 3\cdot(x+2), \quad \text{или} \quad y = 3x + 7.$$

Аналогично получим уравнение высоты BH_2:

$$k_{BH_2} = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{3}{4}.$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}\cdot(x-4) \quad \text{или} \quad y = -\frac{3}{4}x + 7.$$

Уравнение высоты CH_3:

$$k_{CH_3} = -\frac{1}{k_{AB}} = -2.$$

$$y-5=-2\cdot(x-1) \quad \text{или} \quad y=-2x+7.$$

Координаты точки пересечения высот Z являются решением системы, состоящей из уравнений двух любых высот, например, AH_1 и BH_2:

$$\begin{cases} y=3x+7 \\ y=\frac{3}{4}x+7 \end{cases}$$

Откуда $x=0$, $y=7$. Значит, точка $Z\,(0;7)$.

Вычислить тангенс угла φ, отсчитанного против часовой стрелки от прямой, заданной уравнением $y=k_1x+b_1$, до прямой, заданной уравнением $y=k_2x+b_2$, позволяет формула:

$$tg\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}.$$

В соответствии с этой формулой:

$$tgA = \frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}\cdot k_{AB}} = \frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}.$$

По таблице находим угол $A \approx 0{,}46$ радиан, что составляет приблизительно 27°.

Задача №2

Решить систему уравнений, пользуясь формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1+2x_3+x_4=8 \\ 3x_2-x_3=-10 \\ 2x_1+x_4=8 \\ -2x_2+3x_4=18 \end{cases}$$

Решение:

Запишем и вычислим определитель системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

По теореме Лапласа

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + a_{41} \cdot A_{41}.$$

Мы разложим определитель $|A|$ по первому столбцу, так как в нем два элемента a_{21} и a_{41} равны нулю.

Следовательно,

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{31} \cdot A_{31}.$$

Найдем теперь значения алгебраических дополнений A_{11} и A_{31}, пользуясь правилом треугольника.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot (-2) - 0 \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot (-1) \cdot 3 = 2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot (-2) +$$

$$+ 3 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot (-2) - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = -20.$$

Итак,

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{31} \cdot A_{31} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-20) = 2 - 40 = -38 \neq 0.$$

По теореме Крамера система линейных уравнений является определенной и ее единственное решение находится по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad (i = 1,2,3,4),$$

где $|A_i|$ - определитель, получающийся из определителя $|A|$ заменой столбца коэффициентов при x_i столбцом свободных членов.

Найдем теперь определители $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$, $|A_4|$:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 2 & 1 \\ -10 & 3 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \\ 18 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -10 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ 18 & -2 & 3 \end{vmatrix} - (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \\ 18 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot [(-10) \cdot 0 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 18 + 8 \cdot (-2) \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 18 - 1 \cdot (-2) \cdot (-10) -$$
$$- 3 \cdot 8 \cdot 3] - 0 = -76.$$

Определитель $\begin{vmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \\ 18 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, так как в нем две равные строки.

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & -10 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 18 & 0 & 3 \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \\ 0 & 18 & 3 \end{vmatrix} - (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 0 & 18 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot [0 \cdot 8 \cdot 3 + (-10) \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 18 \cdot 0 - 0 \cdot 8 \cdot 0 - 1 \cdot 18 \cdot 0 - 2 \cdot (-10) \cdot 3] +$$
$$+ [1 \cdot 8 \cdot 3 + 8 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 18 \cdot 1 - 1 \cdot 8 \cdot 0 - 1 \cdot 18 \cdot 1 - 8 \cdot 2 \cdot 3] =$$
$$= 2 \cdot [0 + 0 + 0 - 0 - 0 + 60] + [24 + 0 + 36 - 0 - 18 - 48] = 114.$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & -2 & 18 & 3 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + a_{41} \cdot A_{41} =$$

$$= A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 2 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} =$$

$$
=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -10 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ -2 & 18 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 3 & -10 & 0 \\ -2 & 18 & 3 \end{vmatrix} =
$$

$$
=[3\cdot 8\cdot 3+(-10)\cdot 1\cdot(-2)+0\cdot 18\cdot 0-0\cdot 8\cdot(-2)-1\cdot 18\cdot 3-(-10)\cdot 0\cdot 3]+
$$
$$
+2\cdot[0\cdot(-10)\cdot 3+8\cdot 0\cdot(-2)+3\cdot 18\cdot 1-1\cdot(-10)\cdot(-2)-0\cdot 18\cdot 0-
$$
$$
-8\cdot 3\cdot 3]=[72+20+0-0-54-0]+2\cdot[0+0+54-20-0-72]=-38.
$$

$$
|A_4|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & 18 \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{31}\cdot A_{31}+a_{41}\cdot A_{41} =
$$

$$
=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 8 \\ -2 & 0 & 18 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & -10 \\ -2 & 0 & 18 \end{vmatrix} =
$$

$$
=[3\cdot 0\cdot 18+(-1)\cdot 8\cdot(-2)+0\cdot 0\cdot(-10)-(-10)\cdot 0\cdot(-2)-8\cdot 0\cdot 3-
$$
$$
-(-1)\cdot 0\cdot 18]+2\cdot[0\cdot(-1)\cdot 18+2\cdot(-10)\cdot(-2)+8\cdot 3\cdot 0-
$$
$$
-8\cdot(-1)\cdot(-2)-(-10)\cdot 0\cdot 0-2\cdot 3\cdot 18]=
$$
$$
[0+16+0-0-0-0]+2\cdot[0+40+0-16-0-108]=-152.
$$

Итак, $|A|=-38$, $|A_1|=-76$, $|A_2|=114$, $|A_3|=-38$, $|A|=-152$.
Следовательно, по формулам Крамера:

$$
x_1=\frac{-76}{-38}=2,\ x_2=\frac{114}{-38}=-3,\ x_3=\frac{-38}{-38}=1,\ x_4=\frac{-152}{-38}=4.
$$

Перед выписыванием ответа сделаем проверку, подставив найденное решение в каждое уравнение системы.

Проверка:

$$
\begin{cases} 2+2\cdot 1+4=8 \\ 3\cdot(-3)-1=-10 \\ 2\cdot 2+4=8 \\ -2\cdot(-3)+3\cdot 4=18 \end{cases}
$$

Итак, мы видим, что после подстановки решения в систему каждое уравнение обратилось в числовое тождество.

Ответ:

$$x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = 4.$$

Задача №3

Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Для нахождения матрицы A^{-1}, обратной матрице A, прежде всего, нужно вычислить определитель det A (или $|A|$) матрицы A.

Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{21} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то по теореме Лапласа $|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$, где A_{11}, A_{12}, A_{13} - алгебраические дополнения элементов a_{11}, a_{12}, a_{13}. То есть

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 2 = -11;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(3 + 2) = -5;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2.$$

Следовательно,

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = 2 \cdot (-11) + (-4) \cdot (-5) + 0 \cdot (-2) =$$
$$= -22 + 20 + 0 = -2.$$

Так как определитель $|A|$ не равен нулю, то для матрицы A существует обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\overline{A},$$

где $\overline{A}$ - матрица, присоединенная к матрице A, т.е. матрица, состоящая из алгебраических дополнений к элементам матрицы A.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-11;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-12;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=8;\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-6;\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=4;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2;\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2.$$

Таким образом присоединенная матрица:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} -11 & -12 & 8 \\ -5 & -6 & 4 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\overline{A}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -11 & -12 & 8 \\ -5 & -6 & 4 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 6 & -4 \\ \frac{5}{2} & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5{,}5 & 6 & -4 \\ 2{,}5 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-4&0\\-1&3&-2\\1&-1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5{,}5&6&-4\\2{,}5&3&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

Задача №4

Записать систему уравнений

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=7\\4x_1-x_2+3x_3=1\\8x_1-3x_2+6x_3=-2\end{cases}\qquad(1)$$

в матричной форме и решить ее с помощью обратной матрицы.

Решение:

Пусть A - матрица коэффициентов при неизвестных; X - вектор–столбец неизвестных x_1, x_2, x_3; H - вектор-столбец свободных членов:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&-1&3\\8&-3&6\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}7\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Левую часть системы (1) можно записать в виде произведения матриц AX, а правую – в виде вектор-столбца H. Следовательно, систему (1) можно записать в виде матричного уравнения

$$AX=H.\qquad(2)$$

Если определитель матрицы A отличен от нуля, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}. Умножив обе части равенства (2) слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1}AX=A^{-1}H.$$

Так как $A^{-1}A=E$, где E - единичная матрица, а $EX=X$, то

$$X=A^{-1}H.\qquad(3)$$

Формулу (3) называют матричной записью решения системы линейных уравнений. Чтобы воспользоваться формулой (3), необходимо сначала найти обратную матрицу A^{-1}:

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 3\\ 8 & -3 & 6\end{vmatrix}=2; \qquad A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3 & -9 & 4\\ 0 & 4 & -20\\ -4 & 14 & -6\end{pmatrix}.$$

Заменив (3) соответствующими матрицами, имеем

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5 & -4{,}5 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\ 1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10{,}5-4{,}5-4\\ 0+2+2\\ -14+7+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ -1\end{pmatrix}.$$

Откуда $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=-1$.

Сделаем проверку, подставив найденное решение в каждое уравнение системы.

Проверка:

$$\begin{cases}2\cdot 2+4+(-1)=7\\ 4\cdot 2-4+3\cdot(-1)=1\\ 8\cdot 2-3\cdot 4+6\cdot(-1)=-2\end{cases}$$

Мы видим, что после подстановки решения в систему каждое уравнение обратилось в числовое тождество.

Ответ:

$$x_1=2,\ x_2=4,\ x_3=-1.$$

Задача №5

Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2\\ 5x_1 & - & 8x_2 & + & 2x_3 & = & -12\\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 4\end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение:

Исключим из последних двух уравнений x_1. Для этого умножим первое уравнение на -5 и результаты прибавим ко второму уравнению, затем обе части первого уравнения умножим на -3 и результаты прибавим соответственно к третьему уравнению. В результате получим систему, эквивалентную данной:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ \phantom{x_1 -{}} 2x_2 - 8x_3 = -22 \\ \phantom{x_1 -{}} 7x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases} \quad (1)$$

Разделив обе части второго уравнения системы (1) на 2, получим систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ \phantom{x_1 -{}} x_2 - 4x_3 = -11 \\ \phantom{x_1 -{}} 7x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases} \quad (2)$$

Теперь исключим из третьего уравнения системы (2) переменную x_2. Для этого обе части второго уравнения этой системы умножим на -7 и результаты прибавим к третьему уравнению. В результате получим систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ \phantom{x_1 -{}} x_2 - 4x_3 = -11 \\ \phantom{x_1 - x_2 -{}} 25x_3 = 75 \end{cases} \quad (3)$$

Откуда $x_3 = 3$, $x_2 = 1$, $x_1 = -2$.

Приведение данной системы к ступенчатому виду (3) практически более удобно, если использовать преобразования расширенной матрицы данной системы.

Пусть A - матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных. Она называется **матрицей системы**. Если к матрице A присоединить столбец свободных членов, то полученная матрица B называется **расширенной матрицей системы**.

Для удобства столбец свободных членов расширенной матрицей системы отделим вертикальной чертой. Расширенная матрица данной системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 5 & -8 & 2 & -12 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на -5, а к третьей строке прибавим первую, умноженную на -3. Получим эквивалентную исходной матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -22 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{array}\right).$$

Разделив элементы второй строки на 2, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{array}\right).$$

Прибавив к третьей строке вторую, умноженную на -7, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 25 & 75 \end{array}\right),$$

которая соответствует виду (3) данной системы.

Задача №6

Исследовать данную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 4 \\ 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 30x_4 = 5 \end{cases}$$

на совместность и решить ее, если она совместна.

Решение:

При исследовании системы линейных уравнений используем теорему Кронекера-Капелли: **для того чтобы система линейных**

уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы. При этом если ранг матрицы A равен рангу матрицы B и равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. Если же ранг матрицы A равен рангу матрицы B, но меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное число решений. Если ранг матрицы A меньше ранга матрицы B, то система несовместна и решения не существует.

Составим расширенную матрицу системы

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 2 & 6\\ 3 & -5 & -2 & 7 & 4\\ 5 & -2 & 7 & 30 & 5\end{array}\right).$$

Чтобы определить ранг матрицы, преобразуем ее к ступенчатому виду. Матрицы, получаемые после преобразований, являются эквивалентными. Будем соединять их знаком $\approx$.

Прибавим сначала ко второй строке первую, умноженную на -3, а затем к третьей - первую, умноженную на -5:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 2 & 6\\ 3 & -5 & -2 & 7 & 4\\ 5 & -2 & 7 & 30 & 5\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 2 & 6\\ 0 & -8 & -5 & 1 & -14\\ 5 & -2 & 7 & 30 & 5\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 2 & 6\\ 0 & -8 & -5 & 1 & -14\\ 0 & -7 & 2 & 20 & -25\end{array}\right).$$

Прибавим ко второй строке третью, умноженную на -1, а затем умножим вторую строку на -1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 2 & 6\\ 0 & -8 & -5 & 1 & -14\\ 0 & -7 & 2 & 20 & -25\end{array}\right).\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 2 & 6\\ 0 & -1 & -7 & -19 & 11\\ 0 & -7 & 2 & 20 & -25\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 7 & 19 & -11\\ 0 & -7 & 2 & 20 & -25\end{array}\right).$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на 7, а затем поделим третью строку на 51:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 19 & -11 \\ 0 & -7 & 2 & 20 & -25 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 19 & -11 \\ 0 & 0 & 51 & 153 & -102 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 19 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен количеству «ступенек» в матрице. Ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы и равен 3, следовательно, система совместна и имеет решение. А так как ранг матрицы меньше чем количество неизвестных в системе, то система имеет бесконечно много решений. Чтобы найти их, прибавим ко второй строке третью, умноженную на -7, а затем к первой строке прибавим третью строку, умноженную на -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 19 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Прибавив к первой строке вторую, умноженную на -1, получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

После проведенных преобразований расширенной матрицы система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 5 \\ x_2 - 2x_4 = 3. \\ x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

Система имеет вид трапеции (но не треугольника), а значит является неопределенной. Выбираем одно из неизвестных в качестве свободного. Пусть это будет x_4. Полагаем $x_4 = c$, тогда $x_3 = -2 - 3c$, $x_2 = 3 + 2c$, $x_1 = 5 - c$.

Итак, решение системы имеет вид:

$$(5-c; \quad 3+2c; \quad -2-3c; \quad c), \ c \in R,$$

т.е. c - любое действительное число.

Задачи контрольной работы №1

Задачи №1-30:

Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти длину стороны AC, уравнение медианы CM, координаты точки пересечения высот Z, внутренний угол A. Сделать чертеж. Координаты вершин треугольника для соответствующих номеров задач следующие:

1. $A(0;0)$, $B(6;3)$, $C(3;4)$

2. $A(1;-1)$, $B(7;2)$, $C(4;3)$

3. $A(2;-2)$, $B(8;1)$, $C(5;2)$

4. $A(1;0)$, $B(7;3)$, $C(4;4)$

5. $A(2;-1)$, $B(8;2)$, $C(5;3)$

6. $A(3;-2)$, $B(9;1)$, $C(6;2)$

7. $A(1;1)$, $B(7;4)$, $C(4;5)$

8. $A(2;0)$, $B(8;3)$, $C(5;4)$

9. $A(3;-1)$, $B(9;2)$, $C(6;4)$

10. $A(4;-2)$, $B(10;1)$, $C(7;2)$

11. $A(0;2)$, $B(6;5)$, $C(3;6)$

12. $A(-1;3)$, $B(5;6)$, $C(2;7)$

13. $A(-2;4)$, $B(4;7)$, $C(1;8)$

14. $A(-3;5)$, $B(3;8)$, $C(0;9)$

15. $A(0;1)$, $B(6;4)$, $C(3;5)$

16. $A(-1;2)$, $B(5;5)$, $C(2;6)$

17. $A(-2;3)$, $B(4;6)$, $C(1;7)$

18. $A(-3;4)$, $B(3;7)$, $C(0;8)$

19. $A(-1;0)$, $B(5;3)$, $C(2;4)$

20. $A(-2;2)$, $B(4;5)$, $C(1;6)$

21. $A(3;-3)$, $B(9;0)$, $C(6;1)$

22. $A(4;-4)$, $B(10;-1)$, $C(7;0)$

23. $A(-4;5)$, $B(2;8)$, $C(-1;9)$

24. $A(-5;6)$, $B(1;9)$, $C(-2;10)$

25. $A(5;-3)$, $B(11;0)$, $C(8;3)$

26. $A(-4;6)$, $B(2;9)$, $C(-1;10)$

27. $A(2;2)$, $B(8;5)$, $C(5;6)$

28. $A(3;1)$, $B(9;4)$, $C(6;5)$

29. $A(1;3)$, $B(7;6)$, $C(4;7)$

30. $A(4;-1)$, $B(10;2)$, $C(7;3)$.

Задачи №31-60:

Пользуясь формулами Крамера, решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = b_1 \\ -x_2 + 4x_3 + 4x_4 = b_2 \\ 5x_1 + 6x_3 - 2x_4 = b_3 \\ 12x_2 + ax_4 = b_4 \end{cases}$$

Значения параметров даны в таблице:

№ задачи	a	b_1	b_2	b_3	b_4
31.	**5**	**0**	**10**	**-29**	**44**
32.	**11**	**1**	**5**	**40**	**-45**
33.	**6**	**-1**	**7**	**34**	**-42**
34.	**3**	**10**	**-8**	**-27**	**54**
35.	**9**	**-9**	**25**	**-11**	**24**
36.	**4**	**-5**	**15**	**-4**	**-20**
37.	**2**	**5**	**-3**	**38**	**-18**
38.	**7**	**4**	**2**	**-31**	**52**
39.	**1**	**-9**	**25**	**5**	**-10**
40.	**10**	**16**	**-20**	**-6**	**38**
41.	**12**	**14**	**-18**	**20**	**-12**
42.	**13**	**-11**	**27**	**-1**	**16**
43.	**20**	**6**	**0**	**-1**	**28**
44.	**-1**	**1**	**5**	**-16**	**-16**
45.	**23**	**16**	**-20**	**10**	**-21**

Продолжение таблицы					
№ задачи	a	b_1	b_2	b_3	b_4
46.	**17**	**4**	**2**	**25**	**-27**
47.	**25**	**0**	**10**	**11**	**-1**
48.	**-2**	**5**	**-3**	**-2**	**-16**
49.	**19**	**-1**	**7**	**10**	**2**
50.	**15**	**10**	**-8**	**10**	**2**
51.	**1**	**3**	**19**	**13**	**3**
52.	**-6**	**8**	**26**	**6**	**15**
53.	**-7**	**13**	**33**	**15**	**0**
54.	**-8**	**5**	**1**	**24**	**1**
55.	**1**	**4**	**2**	**-44**	**-4**
56.	**0**	**-5**	**-1**	**-31**	**28**
57.	**6**	**8**	**-6**	**44**	**-36**
58.	**-7**	**5**	**25**	**21**	**0**
59.	**-8**	**8**	**10**	**4**	**-1**
60.	**3**	**6**	**4**	**-1**	**0**

Задачи №61-90:

Дана невырожденная матрица A. Требуется:

а) найти обратную матрицу A^{-1};

б) пользуясь правилом умножения матриц, показать, что $A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица.

61. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ **62.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **63.** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

64. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **65.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **66.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

67. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

68. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

69. $A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

70. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

71. $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

72. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

73. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

74. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

75. $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

76. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

77. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

78. $A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

79. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

80. $A=\begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

81. $A=\begin{pmatrix} 5 & 11 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

82. $A=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

83. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

84. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

85. $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 3 & 11 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

86. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

87. $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

88. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

89. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 14 & 10 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

90. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Задачи №91-120:

Записать систему уравнений в матричной форме и решить ее с помощью обратной матрицы:

91. $$\begin{cases} 4x_1 + 5x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$$

92. $$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

93. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = 4 \\ 2x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$

94. $$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases}$$

95. $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

96. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

97. $$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \\ 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

98. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = -1 \\ 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

99. $$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$$

100. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 36 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

101. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

102. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

103. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

104. $$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ -3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

105. $$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

106. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

107. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$

108. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

109. $\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -7 \\ 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

110. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

111. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 12 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

112. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_3 = 13 \\ 6x_1 - 5x_3 = 35 \end{cases}$

113. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

114. $$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$$

115. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$$

116. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

117. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

118. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -2 \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -8 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

119. $$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ -5x_2 - 2x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$$

120. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$$

Задачи №121-150:

Пользуясь методом Гаусса, найти решение системы линейных уравнений:

121. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

122. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$

123. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

124. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

125. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

126. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

127. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

128. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = --7 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

129. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

130. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -7 \end{cases}$$

131. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

132. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

133. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

134. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

135. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

136. $$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

137. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

138. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

139. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

140. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

141. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

142. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 6 \end{cases}$$

143. $$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$$

144. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

145. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$

146. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$

147. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

148. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$

149. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$

150. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

Задачи №151-180:

Исследовать данную систему уравнений на совместность и решить ее, если она совместна:

151. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

152. $$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

153. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -4 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 7 \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

154. $$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

155. $$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \\ 8x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

156. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

157. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

158. $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 5 \\ 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

159. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

160. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ 5x_1 - 3x_3 = 2 \end{cases}$

161. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

162. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 2 \end{cases}$

163. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ -4x_1 + 11x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 18 \end{cases}$

164. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 8x_3 = 28 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = -24 \\ -3x_1 + x_2 - 12x_3 + 4x_4 = 20 \end{cases}$

165. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 22x_4 = -13 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$

166. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 13 \\ -2x_1 + x_2 - 9x_3 = -2 \end{cases}$

167. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 18x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

168. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 22x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_4 = 16 \end{cases}$$

169. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -5 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - 13x_4 = 13 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 8x_4 = -8 \end{cases}$$

170. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -4 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 12x_4 = -12 \end{cases}$$

171. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 11x_4 = -1 \end{cases}$$

172. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$$

173. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 1 \\ 4x_1 - 4x_3 + 8x_4 = 8 \end{cases}$$

174. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 3x_4 = 10 \\ -3x_1 - 6x_3 + 15x_4 = -9 \end{cases}$$

175. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -7 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 7x_4 = -11 \end{cases}$$

176. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 21x_4 = -12 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 10x_4 = -11 \end{cases}$$

177. $$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 + 6x_4 = -8 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases}$$

178. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_4 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases}$$

179. $$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -5 \\ -13x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 13 \\ 8x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

180. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 - 16x_3 + 4x_4 = 26 \\ -3x_1 + 2x_2 + 27x_3 - 7x_4 = -42 \end{cases}$$

Контрольная работа № 2

Для определения индивидуальных заданий к контрольной работе №2 используйте таблицу №2.

Таблица №2

		Последняя цифра номера зачетной книжки				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	**1**	1, 31, 61, 91, 12, 151, 181	2, 32, 62, 92, 122, 152, 182	3, 33, 63, 93, 123, 153, 183	4, 34, 64, 94, 124, 154, 184	5, 35, 65, 95, 125, 155, 185
	2	11, 41, 71, 101, 131, 161, 191	12, 42, 72, 102, 132, 162, 192	13, 43, 73, 103, 133, 163, 193	14, 44, 74, 104, 134, 164, 194	15, 45, 75, 105, 135, 165, 195
	3	21, 51, 81, 111, 141, 171, 201	22, 52, 82, 112, 142, 172, 202	23, 53, 83, 113, 143, 173, 203	24, 54, 84, 114, 144, 174, 204	25, 55, 85, 115, 145, 175, 205
	4	20, 41, 71, 101, 140, 161, 191	19, 40, 70, 102, 139, 160, 190	18, 39, 69, 103, 138, 159, 189	17, 38, 68, 104, 137, 158, 188	16, 37, 67, 105, 136, 157, 187
	5	10, 31, 61, 111, 130, 151, 181	9, 51, 81, 112, 129, 171, 201	8, 52, 82, 113, 128, 172, 202	7, 53, 83, 114, 127, 173, 203	6, 54, 84, 115, 126, 174, 204
	6	30, 60, 90, 91, 150, 180, 210	29, 40, 70, 92, 149, 160, 190	28, 41, 71, 93, 148, 161, 191	27, 42, 72, 94, 147, 162, 192	26, 43, 73, 95, 146, 163, 193
	7	2, 49, 79, 101, 122, 169, 199	3, 50, 80, 102, 123, 170, 200	4, 51, 81, 103, 124, 171, 201	5, 52, 82, 104, 125, 172, 202	6, 53, 83, 105, 126, 173, 203
	8	12, 59, 89, 111, 132, 179, 209	13, 60, 90, 112, 133, 180, 210	14, 31, 61, 113, 134, 151, 181	15, 32, 62, 114, 135, 152, 182	16, 33, 63, 115, 136, 153, 183
	9	22, 39, 69, 100, 142, 152, 189	23, 40, 70, 99, 143, 160, 190	24, 41, 71, 98, 144, 161, 191	25, 42, 72, 97, 145, 162, 192	26, 43, 73, 96, 146, 163, 193
	0	15, 49, 79, 111, 135, 169, 199	14, 50, 80, 112, 136, 170, 200	13, 51, 81, 113, 137, 171, 201	12, 52, 82, 114, 138, 172, 202	11, 53, 83, 115, 139, 173, 203

Продолжение таблицы №2

		Последняя цифра номера зачетной книжки				
		6	**7**	**8**	**9**	**0**
Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	**1**	6, 36, 66, 96, 126, 156, 186	7, 37, 67, 97, 127, 157, 187	8, 38, 68, 98, 128, 158, 188	9, 39, 69, 99, 129, 159, 189	10, 40, 70, 100, 130, 160, 190
	2	16, 46, 76, 106, 136, 166, 196	17, 47, 77, 107, 137, 167, 197	18, 48, 78, 108, 138, 168, 198	19, 49, 79, 109, 139, 169, 199	20, 50, 80, 110, 140, 170, 200
	3	26, 56, 86, 116, 146, 176, 206	27, 57, 87, 117, 147, 177, 207	28, 58, 88, 118, 148, 178, 208	29, 59, 89, 119, 149, 179, 209	30, 60, 90, 120, 150, 180, 210
	4	15, 36, 66, 106, 135, 156, 186	14, 35, 65, 107, 134, 155, 185	13, 34, 64, 108, 133, 154, 184	12, 33, 63, 109, 132, 153, 183	11, 32, 62, 110, 131, 152, 182
	5	5, 55, 85, 116, 125, 175, 205	4, 56, 86, 117, 124, 176, 206	3, 57, 87, 118, 123, 177, 207	2, 58, 88, 119, 122, 178, 208	1, 59, 89, 120, 121, 179, 209
	6	25, 44, 74, 96, 145, 164, 194	24, 45, 75, 97, 144, 165, 195	23, 46, 76, 98, 143, 166, 196	22, 47, 77, 99, 142, 167, 197	21, 48, 78, 100, 141, 168, 198
	7	7, 54, 84, 106, 127, 174, 204	8, 55, 85, 107, 128, 175, 205	9, 56, 86, 108, 129, 176, 206	10, 57, 87, 109, 130, 177, 207	11, 58, 88, 110, 131, 178, 208
	8	17, 34, 64, 116, 137, 154, 184	18, 35, 65, 117, 138, 155, 185	19, 36, 66, 118, 139, 156, 186	20, 37, 67, 119, 140, 157, 187	21, 38, 68, 120, 141, 158, 188
	9	27, 44, 74, 95, 147, 164, 194	28, 45, 75, 94, 148, 165, 195	29, 46, 76, 93, 149, 166, 196	30, 47, 77, 92, 150, 167, 197	1, 48, 78, 91, 121, 168, 198
	0	10, 54, 84, 116, 140, 174, 204	9, 55, 85, 117, 129, 175, 205	8, 56, 86, 118, 128, 176, 206	7, 57, 87, 119, 127, 177, 207	6, 58, 88, 120, 126, 178, 208

Программа

I. Введение в математический анализ

1. Понятие функции. Основные элементарные функции и их графики.
2. Предел числовой последовательности. Предел функции в точке. Замечательные пределы. Понятие о непрерывной функции. Непрерывность элементарных функций.
3. Бесконечно малые функции и их свойства. Бесконечно большие функции. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями.

II. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

4. Производная функции в точке, ее геометрический и механический смысл.
5. Производная «сложной» функции. Производная обратной функции.
6. Производные высших порядков.
7. Дифференциал и его геометрический смысл. Приложения дифференциала в приближенных вычислениях.
8. Теоремы Ролля и Лагранжа. Правило Лопиталя.
9. Формула Тейлора.

III. Исследование функций с помощью производных

10. Условия возрастания и убывания функции.
11. Точки экстремума. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Достаточные условия экстремума. Отыскание наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой функции на отрезке.
12. Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба.
13. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

IV. Интегральное исчисление

14. Первообразная функции. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных формул интегрирования.
15. Замена переменных и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
16. Интегрирование простейших рациональных, иррациональных и тригонометрических функций. Применение таблицы интегралов.
17. Определенный интеграл и его свойства. Вычисление определенных интегралов методом интегрирования по частям и заменой переменных.
18. Несобственные интегралы.
19. Геометрический смысл определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур.
20. Приближенное вычисление определенных интегралов.

Вопросы для самостоятельного изучения

1. Функции многих переменных. Определение. Геометрическая иллюстрация. Предел. Непрерывность. Линии уровня.
2. Частные производные. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
3. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется функцией? Каковы способы ее задания?
2. Что называется областью определения функции? Приведите пример функции, областью определения которой являются все действительные числа, за исключением чисел 2 и 5; все положительные числа, за исключением тех же 2 и 5.
3. Что называется графиком функции? Как пользуясь графиком функции $y = f(x)$, построить график функции $y = Af(cx+a)+B$?

4. Как определить предел переменной величины и предел функции при стремлении аргумента к конечному значению и к бесконечности?
5. Какие функции называются неявными, обратными, элементарными? Приведите примеры.
6. Как связаны понятия: «предел функции в точке» и «предел функции в точке слева и справа»?
7. Что такое бесконечно малая величина? Сформулируйте основные теоремы о бесконечно малых величинах.
8. Что такое бесконечно большая величина и как она связана с бесконечно малой?
9. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
10. Напишите первый и второй замечательные пределы. Какие теоремы о пределах используются при их доказательстве?
11. Дайте определение непрерывности функции в точке и на отрезке. В чем состоит различие утверждений «функция непрерывна в точке» и «функция имеет конечный предел в точке»?
12. Сформулируйте основные теоремы о непрерывных функциях.
13. Какие типы точек разрывов функции существуют? Приведите примеры.
14. Что называется производной? Найдите производную функции $y = \dfrac{x}{x-1}$, пользуясь определением.
15. Что называется касательной к кривой? Каков геометрический смысл производной? Как составить уравнение касательной?
16. Каков механический смысл производной?
17. Может ли функция иметь производную в точке разрыва?
18. Будет ли функция непрерывна в точке, если она в ней дифференцируема?
19. Перечислите правила дифференцирования, формулы дифференцирования основных элементарных функций.
20. Что называется дифференциалом функции? Что такое дифференциал независимой переменной величины?
21. Каков геометрический смысл дифференциала? Для каких функций дифференциал и приращение равны?
22. Сформулируйте теоремы Лагранжа и Ролля.

23. Сформулируйте правило Лопиталя.
24. Дайте определение возрастания (убывания) функции. В чем состоит необходимый и достаточный признак возрастания (убывания) функции?
25. Дайте определение максимума (минимума) функции. В чем состоит необходимый признак экстремума? Приведите пример, показывающий, что это признак не является достаточным.
26. Сформулируйте оба достаточных признака экстремума.
27. Как установить выпуклость (вогнутость) кривой?
28. Что называется точкой перегиба? Как ее найти?
29. Кратко изложите схему построения графика функции.
30. Дайте определение непрерывной функции нескольких (двух) переменных.
31. Дайте определение частных производных и полного дифференциала. Как они связаны?
32. Что называется градиентом функции нескольких переменных?
33. Дайте определение экстремума функции нескольких переменных и приведите необходимые условия экстремума.
34. Как определяются частные производные высших порядков и при каком условии равны смешанные производные?
35. Сформулируйте достаточный признак экстремума функции двух переменных.
36. Какая функция называется первообразной данной функции?
37. Что называется неопределенным интегралом от данной функции?
38. Запишите таблицу основных интегралов.
39. Как проводится замена переменной в неопределенном интеграле?
40. Назовите основные свойства неопределенного интеграла.
41. Что называется определенным интегралом от данной функции? Каков его геометрический смысл?
42. Как связаны между собой понятия определенного интеграла и неопределенного интеграла?
43. Сформулируйте теорему о производной определенного интеграла с переменным верхним пределом.

44. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
45. Дайте определение несобственных интегралов (с бесконечным пределом интегрирования и от разрывной функции).
46. Как вычисляется площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла?

Задача №1

Найти пределы (не применяя правило Лопиталя):

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{2x^2-3x-9}, \qquad 3)\ \lim_{x\to 0}(tg19x\cdot ctg5x),$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{10-x}-\sqrt{x+6}}{x-2}, \qquad 4)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{x}{3}-1}.$$

Решение:

1) Функция, предел которой при $x\to 3$ требуется найти, представляет собой частное двух функций. Теорему о пределе частного применить нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. Предел числителя при $x\to 3$ также равен нулю, имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Эту неопределенность можно раскрыть, разложив на множители квадратные трехчлены в числителе и знаменателе:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{2x^2-3x-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x-4)}{2\cdot(x-3)\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-4}{2x+3}=-\frac{1}{9}.$$

2) Для того, чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, домножим числитель и знаменатель на сопряженный к знаменателю множитель:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{10-x}-\sqrt{x+6}}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{10-x}-\sqrt{x+6}\right)\cdot\left(\sqrt{10-x}+\sqrt{x+6}\right)}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{10-x}+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(10-x)-(x+6)}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{10-x}+\sqrt{x+6}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{4-2x}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{10-x}+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{10-x}+\sqrt{x+6}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-2}{\sqrt{10-x}+\sqrt{x+6}}=$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{8}+\sqrt{8}}=\frac{-2}{2\sqrt{8}}=-\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

3) Для вычисления предела воспользуемся первым «замечательным» пределом $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$:

$$\lim_{x\to 0}(tg19x\cdot ctg5x)=\lim_{x\to 0}\frac{tg19x}{tg5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 19x}{\cos 19x}}{\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 19x}{\sin 5x}\cdot\frac{\cos 5x}{\cos 19x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 19x}{19x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{19}{5}\cdot\frac{\cos 5x}{\cos 19x}\right)=$$

$$=1\cdot 1\cdot\frac{19}{5}\cdot\frac{\cos 0}{\cos 0}=\frac{19}{5}.$$

3) В данном пределе для раскрытия неопределенности вида 1^{∞}, можно использовать второй «замечательный» предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{x}{3}-1}=\left[1^{\infty}\right].$$

По формуле $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, где $e\approx 2{,}7$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{x}{3}-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\left(\frac{x}{3}-1\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\left(\frac{x}{3}-1\right)\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x-3}{3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-3}{3x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{3+\frac{3}{x}}}=e^{\frac{1-0}{3+0}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}.$$

Задача №2

Найти производную функции:

$$y = x \cdot 3^{\cos x} + \ln[\cos(5x+3)] + 100.$$

Решение:

Функция представляет собой сумму трех слагаемых. Ее производная равна сумме производных слагаемых:

$$y' = \left(x \cdot 3^{\cos x}\right)' + (\ln[\cos(5x+3)])' + 100'.$$

Используем формулы $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$, $C' = 0$, где $C = const$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, и $(\cos x)' = -\sin x$, а также формулу дифференцирования сложной функции.

$$y' = x' \cdot 3^{\cos x} + x \cdot \left(3^{\cos x}\right)' + \frac{(\cos(5x+3))'}{\cos(5x+3)} + 0 =$$

$$= 3^{\cos x} + x \cdot 3^{\cos x} \cdot (\cos x)' \cdot \ln 3 + \frac{-\sin(5x+3) \cdot (5x+3)'}{\cos(5x+3)} =$$

$$= 3^{\cos x} + x \cdot 3^{\cos x} \cdot (-\sin x) \cdot \ln 3 + \frac{-5\sin(5x+3)}{\cos(5x+3)} =$$

$$= 3^{\cos x} - x \cdot \sin x \cdot 3^{\cos x} \cdot \ln 3 - 5tg(5x+3).$$

Задача №3

Вычислить приближенное значение функции $f(x) = \lg x$ в точке $x_1 = 10{,}5$, заменив приращение функции в точке $x_0 = 10$ ее дифференциалом.

Решение:

Если приращение аргумента $\Delta x = x_1 - x_0$ достаточно мало по абсолютной величине, то приращение функции $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ приближенно равно дифференциалу функции $d\,f$.

Поэтому справедлива формула:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Для вычисления приближенного значения функции $y = \lg x$ в точке $x_1 = 10{,}5$, вычислим производную этой функции в точке $x_0 = 10$:

$$f'(x) = (\lg x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 10}.$$

$$f'(x_0) = f'(10) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}0434.$$

(воспользовались таблицей логарифмов)

Подставив в формулу, получим:

$$\lg 10{,}5 \approx \lg 10 + 0{,}0434 \cdot 0{,}5 \approx 1{,}0217.$$

Сравнение полученного результата с табличным значением 1,212 говорит о хорошей точности.

Задача №4

Исследовать функцию $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ и построить ее график.

Решение:

Исследуемая функция представляет собой многочлен, ее область определения – множество всех действительных чисел.

Функция является непрерывной.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^4 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2}\right)\right) = +\infty.$$

Функция $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ четная, так как для любого x из области определения функции выполняется равенство

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - 2(-x)^2 = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x).$$

Это означает, что график функции симметричен относительно оси ординат.

Для нахождения точек пересечения графика функции с осями координат решим системы уравнений, в которых одно уравнение – уравнение данной линии, а другое – уравнение соответствующей координатной оси.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 \\ y = 0 \end{cases},$$

находим три точки пересечения графика функции с осью абсцисс:

$$x_1 = -2\sqrt{2} \approx -2{,}83;\ x_2 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83;\ x_3 = 0.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 \\ x = 0 \end{cases},$$

находим точку пересечения графика функции с осью ординат:

$$y = 0.$$

Таким образом, график заданной функции пересекается с осями координат в точках $A\left(-2\sqrt{2};0\right)$, $B\left(2\sqrt{2};0\right)$ и $O(0;0)$.

Полученные в результате данные будем отмечать на графике. Построим найденные точки.

Производная данной функции равна:

$$y' = x^3 - 4x = x \cdot \left(x^2 - 4\right).$$

Из уравнения $x \cdot \left(x^2 - 4\right) = 0$ находим критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$. Они разбивают ось абсцисс на четыре интервала $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$ знакопостоянства производной. Для определения знака производной в каждом интервале, определяем ее знак в произвольной точке этого интервала. Так как

$$f(-4) = -4 \cdot (16 - 4) < 0,$$
$$f(-1) = -1 \cdot (1 - 4) > 0,$$
$$f(1) = 1 \cdot (1 - 4) < 0,$$
$$f(3) = 3 \cdot (9 - 4) > 0,$$

то функция убывает на интервалах $(-\infty;-2)$ и $(0;2)$, возрастает на интервалах $(-2;0)$ и $(2;+\infty)$.

Производная данной функции равна нулю в точке $x = 0$ и меняет знак с плюса на минус при переходе через это значение. Поэтому при $x = 0$ функция имеет максимум. Производная функции равна нулю при $x = -2$ и $x = 2$. При этом она меняет знак с минуса на плюс при переходе через эти точки. Поэтому при $x = -2$ и $x = 2$ функция имеет минимумы.

Определим ординаты точек экстремумов:

$$f(-2)=f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^4-2\cdot 2^2=-4, \quad f(0)=0.$$

Отметим на графике точку максимума $(0;0)$ и точки минимумов $(-2;-4)$ и $(2;-4)$.

Для исследования функции на выпуклость и вогнутость, а также определения точек перегиба найдем производную второго порядка заданной функции:

$$y''=3x^2-4.$$

Она обращается в нуль в двух точках:

$$x_1=-\frac{2}{\sqrt{3}}\approx -1{,}15 \text{ и } x_2=\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 1{,}15.$$

Эти точки разбивают числовую ось на три интервала знакопостоянства второй производной:

$$\left(-\infty;-\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right).$$

Для определения знака второй производной в каждом из этих интервалов определяем ее знак в какой-нибудь точке каждого интервала:

$$f''(-2)>0, \quad f''(0)<0, \quad f''(2)>0,$$

поэтому кривая вогнута на интервалах $\left(-\infty;-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$, а выпукла на интервале $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

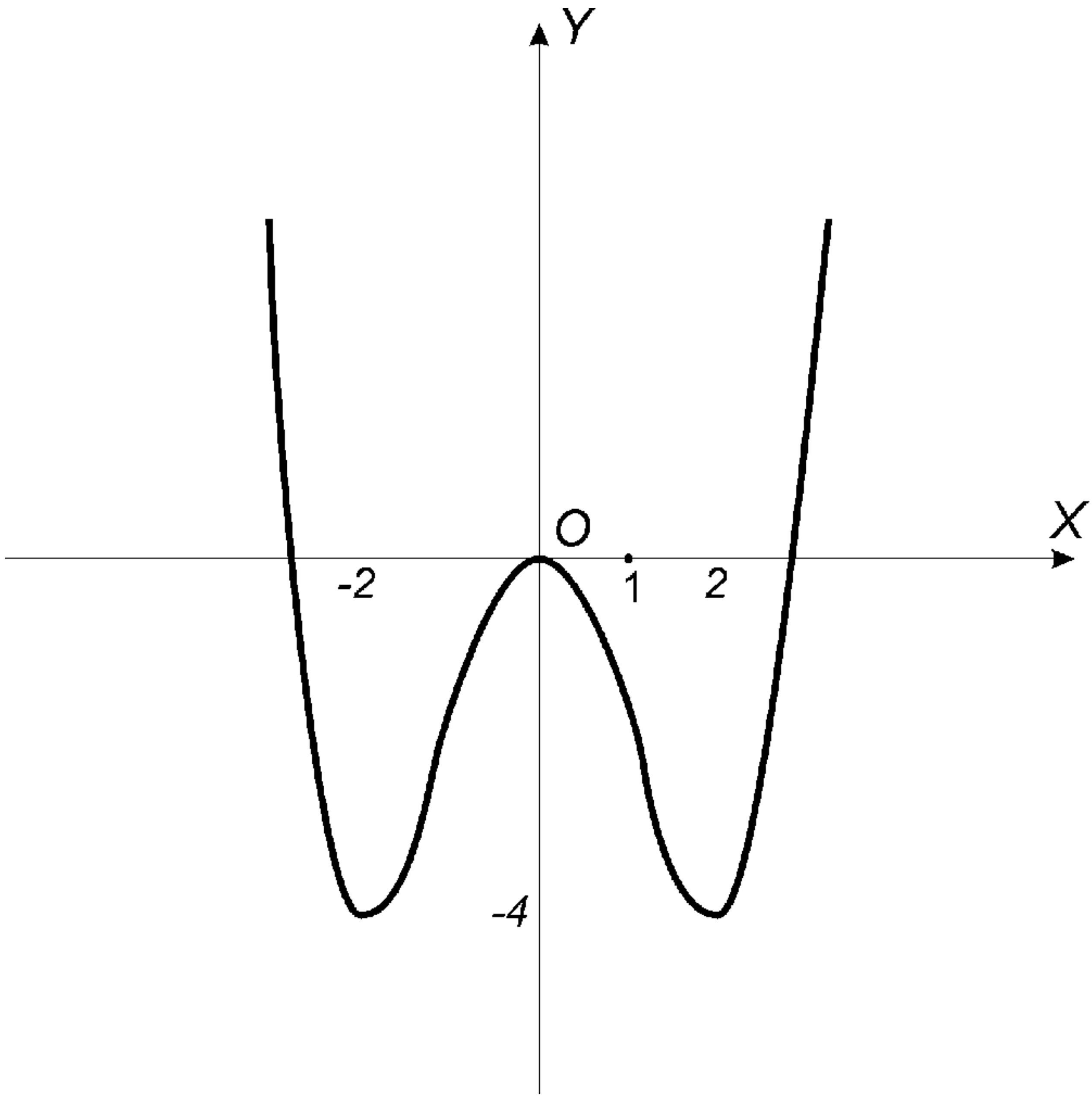
Вторая производная функции равна нулю в точках x_1 и x_2, и меняет знак при переходе через эти точки, значит, x_1 и x_2 являются точками перегиба.

Вычислим ординаты точек перегиба:

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4-2\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=-\frac{20}{9}\approx -2{,}22.$$

Отметим их на графике.

Учитывая результаты исследования, соединим плавной кривой полученные точки.



Задача №5

Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных $z = \ln\left(x^3 + 3y^2\right)$.

Решение:

При вычислении частной производной по «x», «y» считаем постоянной. Аналогично, при нахождении частной производной по «y», считаем постоянной «x».

Сначала вычислим частные производные первого порядка:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(x^3 + 3y^2\right)\right) = \frac{1}{x^3 + 3y^2} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3 + 3y^2}.$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(x^3 + 3y^2\right)\right) = \frac{1}{x^3 + 3y^2} \cdot 6y = \frac{6y}{x^3 + 3y^2}.$$

Затем найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(z'_x\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3x^2}{x^3 + 3y^2}\right) = \frac{6x \cdot \left(x^3 + 3y^2\right) - 3x^2 \cdot 3x^2}{\left(x^3 + 3y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{18xy^2 - 3x^4}{\left(x^3 + 3y^2\right)^2}.$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(z'_x\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x^2}{x^3 + 3y^2}\right) = \frac{-3x^2 \cdot 6y}{\left(x^3 + 3y^2\right)^2} = -\frac{18x^2 y}{\left(x^3 + 3y^2\right)^2}.$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(z'_y\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{6y}{x^3 + 3y^2}\right) = -\frac{6y \cdot 3x^2}{\left(x^3 + 3y^2\right)^2} = -\frac{18x^2 y}{\left(x^3 + 3y^2\right)^2}.$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(z'_y\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{6y}{x^3 + 3y^2}\right) = \frac{6 \cdot \left(x^3 + 3y^2\right) - 6y \cdot 6y}{\left(x^3 + 3y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{6x^3 - 18y^2}{\left(x^3 + 3y^2\right)^2}.$$

Смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx} равны.

Задача №6

Найти неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{5\sqrt{x} + 3x - x^3}{x^2} dx; \text{ б) } \int x^3 \sqrt{x^4 - 5} dx;$$

$$\text{в) } \int \sin 5x \cos 3x dx; \text{ г) } \int (2x - 1) \ln x dx.$$

Решение:

а) Чтобы вычислить интеграл, необходимо разбить его на три интеграла, разделив каждое слагаемое на x^2.

$$\int \frac{5\sqrt{x}+3x-x^3}{x^2}dx=\int\left(\frac{5\sqrt{x}}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{x^3}{x^2}\right)dx=\int\left(5x^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{x}-x\right)dx=$$

$$=\int 5x^{-\frac{3}{2}}dx+\int\frac{3}{x}dx-\int xdx=5\cdot\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+3\ln|x|-\frac{x^2}{2}+C=$$

$$=-\frac{10}{\sqrt{x}}+3\ln|x|-\frac{x^2}{2}+C.$$

б) Можно использовать замену переменной $u=x^4-5$. Тогда $du=d\left(x^4-5\right)=\left(x^4-5\right)'dx=4x^3dx$. Отсюда $x^3dx=\frac{du}{4}$.

Подставляя новую переменную, получим:

$$\int x^3\sqrt{x^4-5}dx=\int\left(x^4-5\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x^3dx=\int u^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{du}{4}=$$

$$=\frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{4}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{6}\sqrt{\left(x^4-5\right)^3}+C.$$

в) Для нахождения интеграла воспользуемся формулой

$$\sin mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right).$$

Следовательно, $\sin 5x\cdot\cos 3x=\frac{1}{2}\left(\sin 8x+\sin 2x\right)$.

Значит,

$$\int\sin 5x\cos 3xdx=\int\frac{1}{2}\left(\sin 8x+\sin 2x\right)dx=\frac{1}{2}\int\sin 8xdx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\sin 2xdx=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos 8x}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos 2x}{2}+C=$$

$$=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

г) Применив метод интегрирования по частям, получим:

$$\int(2x-1)\ln xdx=\left|\int udv=u\cdot v-\int vdu\right|=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=\ln x & du=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx\\ dv=(2x-1)dx & v=\int(2x-1)dx=x^2-x\end{matrix}\right|=$$

$$= \left(x^2 - x\right) \cdot \ln x - \int \left(x^2 - x\right) \cdot \frac{1}{x} dx = \left(x^2 - x\right) \cdot \ln x - \int (x-1) dx =$$

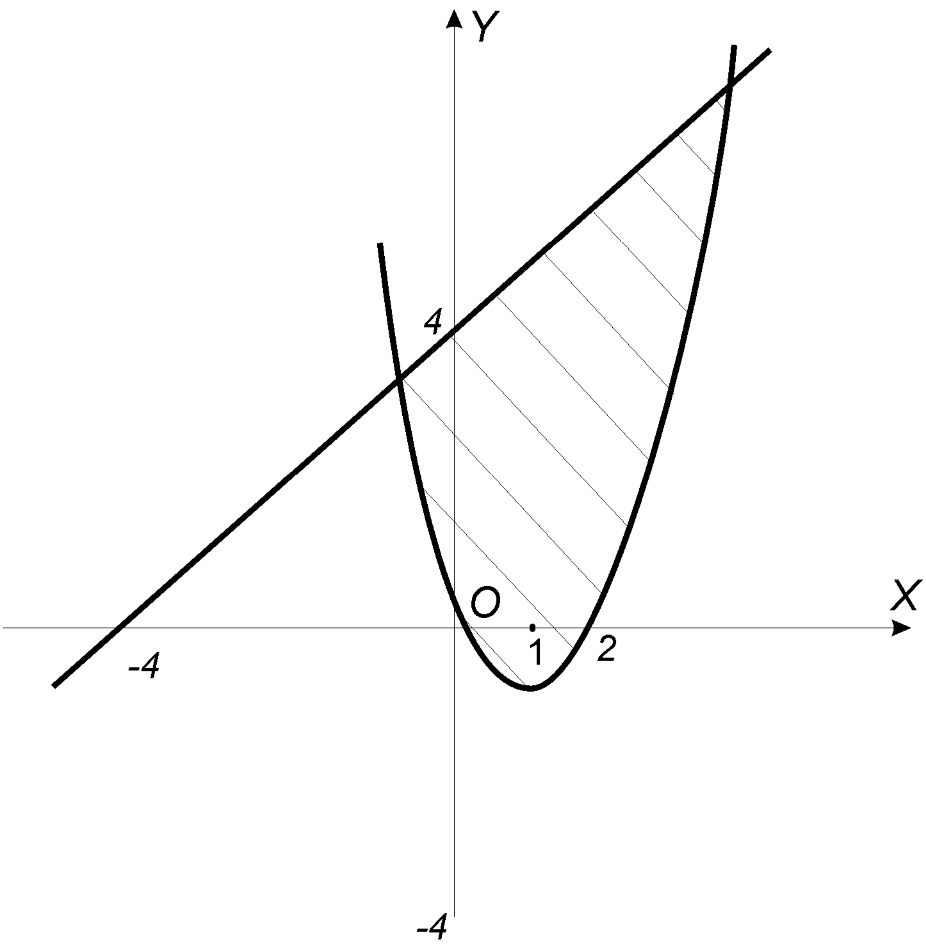
$$= \left(x^2 - x\right) \cdot \ln x - \frac{(x-1)^2}{2} + C.$$

Задача №7

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x$ и $y = x + 4$.

Решение:

Построим область, ограниченную этими линиями: параболой и прямой.



Найдем точки пересечения прямой и параболы, для чего решим систему:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x = x + 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Площадь фигуры, ограниченной двумя кривыми, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx,$$

где $y_1 = f(x_1)$ - функция, график которой находится сверху, а $y_2 = f(x_2)$ - функция, график которой находится снизу.

В нашем случае пределы интегрирования равны:

$$a = x_1 = -1, \quad b = x_2 = 4.$$

Таким образом,

$$S = \int_{-1}^{4} \left((x+4) - \left(x^2 - 2x\right) \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{4} \left(4 + 3x - x^2\right) dx = \left(4x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= 16 + 24 - \frac{64}{3} + 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = 20\frac{5}{6}\,\text{ед}^2.$$

Задачи контрольной работы №2

Задачи №1-30:

Найти пределы (не применяя правило Лопиталя):

1. $a)\lim\limits_{x\to 4}\frac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$, $\quad б)\lim\limits_{x\to 0}(tg2x\cdot ctg3x)$,

$в)\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$, $\quad г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+2}\right)^{\frac{x}{3}+1}$.

2. $a)\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$, $\quad б)\lim\limits_{x\to 0}\frac{ctg3x}{ctg5x}$,

$в)\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5}$, $\quad г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-6}{x+4}\right)^{7x+4}$.

3. $a)\lim\limits_{x\to -4}\frac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$, $\quad б)\lim\limits_{x\to 0}(tg3x\cdot ctg5x)$,

$в)\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}{x-2}$, $\quad г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x}\right)^{5x-3}$.

4. $a)\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$, $\quad б)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg2x}$,

$в)\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$, $\quad г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{2x+1}$.

5. $a)\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$, $\quad б)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg3x}$,

$в)\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$, $\quad г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^{4x-1}$.

6. $a)\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$, $\quad б)\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{tg4x}$,

$в)\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$, $\quad г)\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

7. $a)\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$, $\quad б)\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 5x}$,

$в)\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$, $\quad г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3+x}\right)^{2x}$.

8. $a)\ \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$, $б)\ \lim\limits_{x\to 0}(tg5x\cdot ctg7x)$,

$в)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}$, $г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+6}\right)^{x-1}$.

9. $a)\ \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$, $б)\ \lim\limits_{x\to 0}(\sin 6x\cdot ctg21x)$,

$в)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$, $г)\ \lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2-x}{x}}$.

10. $a)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$, $б)\ \lim\limits_{x\to 0}(\sin 6x\cdot ctg8x)$,

$в)\ \lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-3-\sqrt{9-x}}}{x-6}$, $г)\ \lim\limits_{x\to 0}(1+8x)^{\frac{5-x}{x}}$.

11. $a)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{5x^2-16x+3}$, $б)\ \lim\limits_{x\to 0}(tgx\cdot ctg7x)$,

$в)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^2}-2}{1-x}$, $г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{2x+4}$.

12. $a)\ \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-16x+5}{5x^2-26x+5}$, $б)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg5x}{ctg4x}$,

$в)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+21-5}}{x-2}$, $г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^{3x+1}$.

13. $a)\ \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{3x^2-13x+4}$, $б)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{tg2x}$,

$в)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{10-x^2}-1}{3-x}$, $г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{4x+3}$.

14. $a)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$, $б)\ \lim\limits_{x\to 0}(tg5x\cdot ctg2x)$,

$в)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6-3}}{x-3}$, $г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+4}\right)^{5x+2}$.

15. $a)\ \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{2x^2+3x-2}$, $б)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{tg7x}$,

$в)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$, $г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x+4}\right)^{\frac{x}{2}+1}$.

16. $а)\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5x^2+14x-3}{3x^2+8x-3},\quad б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{\sin 2x},$

$в)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+20}-6}{x-4},\quad г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+9}{x+8}\right)^{3x+2}.$

17. $а)\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{4x^2+15x-4}{2x^2+7x-4},\quad б)\lim\limits_{x\to 0}(\sin 4x\cdot ctg9x),$

$в)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2},\quad г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+10}{x+6}\right)^{2x-1}.$

18. $а)\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{5x^2+24x-5}{2x^2+9x-5},\quad б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg16x}{\sin 3x},$

$в)\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{29-x^2}-2}{5-x},\quad г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+11}{x+6}\right)^{5x+2}.$

19. $а)\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{6x^2-37x+6}{2x^2-13x+6},\quad б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg12x}{\sin 5x},$

$в)\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x^2-13}-6}{x-7},\quad г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+12}{x+10}\right)^{6x+1}.$

20. $а)\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{2x^2+11x-6}{3x^2+17x-6},\quad б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{tg14x},$

$в)\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{7+x^2}-4}{x+3},\quad г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+13}{x+12}\right)^{8x+2}.$

21. $а)\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-3x-4},\quad б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 3x},$

$в)\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}},\quad г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}.$

22. $а)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x-3x^2},\quad б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x\cdot\cos 3x},$

$в)\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{2x-1}-3},\quad г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}.$

23. $а)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-x-10}{x^2+3x+2},\quad б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg3x}{\sin^2 2x},$

$в)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3},\quad г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}.$

24. $a)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{14-x-3x^2}$, $б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot tg3x}{x^2}$,

$в)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$, $г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$.

25. $a)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2-3x+5}$, $б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{tg2x}$,

$в)\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+7}-2}$, $г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$.

26. $a)\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-5x+1}{2x^2-3x+5}$, $б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot\cos 5x}{\sin 3x}$,

$в)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}$, $г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+1}$.

27. $a)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{3x^2-x-14}$, $б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot tg4x}{\sin^2 6x}$,

$в)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$, $г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x}$.

28. $a)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{6-x-x^2}$, $б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot tg4x}{x^2}$,

$в)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$, $г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$.

29. $a)\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-6x-7}{3x^2+x-2}$, $б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{tg5x}$,

$в)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, $г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$.

30. $a)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{4x-x^2-3}$, $б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cdot\cos 7x}{\sin 2x}$,

$в)\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$, $г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$.

Задачи №31-60:

Найти производные данных функций:

31. $a)\ y = 2^x \cdot \sin^2 x,$ $\quad б)\ y = \dfrac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{25 - x^2} + 25\arcsin\dfrac{x}{5}\right),$

$в)\ y = \left(5x^6 - \dfrac{3}{x^2 \cdot \sqrt{2}} + 8\right)^{12},$ $\quad г)\ y = \dfrac{3 + 6x^{\frac{1}{3}}}{e^x}.$

32. $a)\ y = tg\left(x^3 + 2x^2 + 4\right) - 14,$ $\quad б)\ y = 3^x \cdot \cos^2 x,$

$в)\ y = \left(3x^8 - \dfrac{3}{4x \cdot \sqrt[3]{x}} + 9\right)^{11},$ $\quad г)\ y = \dfrac{\ln x}{10^x}.$

33. $a)\ y = 3\sin\left(2x^3 + 1 - \ln x\right),$ $\quad б)\ y = 5^x \cdot tg^2 x,$

$в)\ y = \left(7x^5 - \dfrac{4}{5x \cdot \sqrt[4]{x}} - 20\right)^{12},$ $\quad г)\ y = \dfrac{x^8}{8^x}.$

34. $a)\ y = 6\cos\left(12 - \sqrt[4]{x}\right) + 8,$ $\quad б)\ y = 4^x \cdot ctg^2 x,$

$в)\ y = \left(4x^9 - \dfrac{2}{7x^3 \cdot \sqrt{x}} + 15\right)^{10},$ $\quad г)\ y = \dfrac{x^7}{arctgx}.$

35. $a)\ y = 2\cos^3\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - 13,$ $\quad б)\ y = x^3 \cdot \arcsin\sqrt{x},$

$в)\ y = \left(6x^{10} - \dfrac{3}{5x \cdot \sqrt[3]{x^2}} + 11\right)^{13},$ $\quad г)\ y = \dfrac{\ln x}{ctgx}.$

36. $a)\ y = 10\ln\left(x^2 + \sin x\right) + 7,$ $\quad б)\ y = x^4 \cdot \arccos\sqrt{x},$

$в)\ y = \left(8x^{\frac{1}{8}} - \dfrac{2}{7x^2 \cdot \sqrt{x^3}} - 19\right)^{8},$ $\quad г)\ y = \dfrac{(x+1)^3}{5^x}.$

37. $a)\ y = \dfrac{x}{2} \cdot (\cos\ln x + \sin\ln x) - \pi,$ $\quad б)\ y = x^{15} \cdot arctg\sqrt{x},$

$в)\ y = \left(10x^{\frac{1}{5}} - \dfrac{5}{6x \cdot \sqrt[5]{x}} - 18\right)^{11},$ $\quad г)\ y = \dfrac{(x+1)^4}{2^x}.$

38. $a)\ y = x \cdot \left[(1 - \ln x)^4 - 1\right] + e^2,$ $\quad б)\ y = x^6 \cdot arctg\sqrt{x},$

$в)\ y = \left(9x^{\frac{1}{9}} - \dfrac{5}{8x \cdot \sqrt[5]{x}} - 17\right)^{14},$ $\quad г)\ y = \dfrac{6^x}{\arccos x}.$

39. $a)\ y=1+2\cos^3(1+\arcsin x)$, $\quad б)\ y=\sin 2x\cdot\ln x$,

$в)\ y=\left(20x^{\frac{1}{4}}-\dfrac{5}{7x\cdot\sqrt[5]{x^2}}-14\right)^{17}$, $\quad г)\ y=\dfrac{\sqrt{x}}{6^x}$.

40. $a)\ y=4\arccos(\pi+\sin x)-1$, $\quad б)\ y=\sqrt{x}\cdot\cos 3x$,

$в)\ y=\left(12x^{\frac{1}{6}}-\dfrac{2}{9x^2\cdot\sqrt{x^5}}+13\right)^{16}$, $\quad г)\ y=\dfrac{\ln 2x}{3^x}$.

41. $a)\ y=\pi\ln(x-\sin x)+7$, $\quad б)\ y=e^{\sqrt{x}}\cdot\arcsin e^x$,

$в)\ y=\left(14x^{\frac{1}{7}}-\dfrac{4}{x^2\cdot\sqrt[4]{x}}-18\right)^{18}$, $\quad г)\ y=\dfrac{\ln x}{tg 3x}$.

42. $a)\ y=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln x-\dfrac{2}{3}\right)+\sqrt{6}$, $\quad б)\ y=x^2\cdot e^{-\sin x}$,

$в)\ y=\left(16x^{\frac{1}{8}}-\dfrac{5}{9x\cdot\sqrt[5]{x^4}}+20\right)^{20}$, $\quad г)\ y=\dfrac{7^x}{\arccos x}$.

43. $a)\ y=\cos 3x\cdot e^{\sin x}$, $\quad б)\ y=\dfrac{\arcsin 3x}{1-8x^2}$,

$в)\ y=\left(3x^3-2\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2$, $\quad г)\ y=\cos\ln 5x$.

44. $a)\ y=x\cdot tgx+\ln\cos x+e^5$, $\quad б)\ y=x^3\cdot e^{\cos x}$,

$в)\ y=\left(x^{\pi}-\dfrac{3}{8}x\cdot\sqrt[3]{x^5}+22\right)^{19}$, $\quad г)\ y=\dfrac{8^x}{arctgx}$.

45. $a)\ y=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+e^3$, $\quad б)\ y=3^{4x-1}\cdot\sin(2x+1)$,

$в)\ y=\left(18x^{\frac{1}{9}}-\dfrac{3}{7}x\cdot\sqrt[3]{x^4}+25\right)^{24}$, $\quad г)\ y=\dfrac{\ln x}{arcctgx}$.

46. $a)\ y=4\arccos(\pi+\sin^2 x)-1$, $\quad б)\ y=2^{1-5x}\cdot\cos(3x-1)$,

$в)\ y=\left(e^{x^2}-e^{2+}\dfrac{7}{8}x\cdot\sqrt[7]{x}\right)^{28}$, $\quad г)\ y=\dfrac{tg 2x}{\ln x}$.

47. $a)\ y=\dfrac{1}{3}arctg^3(4-2x-\sin x)+6$, $\quad б)\ y=5^{2x-1}\cdot tg(1+4x)$,

$в)\ y=\left(\pi^2+x^e-\dfrac{2}{13}x^5\cdot\sqrt{x^3}\right)^{26}$, $\quad г)\ y=\dfrac{\arcsin x}{\ln 3x}$.

48. $a)\ y=\dfrac{1+x^2}{2}\cdot arctgx-\dfrac{x}{2}+\sqrt{8}$, $б)\ y=10^{3-2x}\cdot ctg(2-3x)$,

$в)\ y=\left(x^{\pi}+e^{\pi}-\dfrac{7}{9}x\cdot\sqrt[7]{x^2}\right)^{27}$, $г)\ y=\dfrac{\sin 3x}{\ln^2 x}$.

49. $a)\ y=x\cdot\ln\left(1+x^2\right)+2arctgx$, $б)\ y=(4x+2)^6\cdot\arcsin\sqrt{x}$,

$в)\ y=\left(\sqrt{21}-\pi^{x}-\dfrac{3}{7}x^2\cdot\sqrt[3]{x}+25\right)^{23}$, $г)\ y=\dfrac{\cos 5x}{e^{2x}}$.

50. $a)\ y=\dfrac{1}{2}\arcsin^2(8+2\ln x)$, $б)\ y=(1+5x)^4\cdot\arccos\sqrt{x}$,

$в)\ y=\left(4\pi^2+\pi^{-x}-\dfrac{2}{9}x^3\cdot\sqrt{x^3}\right)^{30}$, $г)\ y=\dfrac{21x+7}{7^x}$.

51. $a)\ y=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\dfrac{x}{4}\right)$, $б)\ y=(8-9x)^5\cdot\ln(3x+4)$,

$в)\ y=\left(\sqrt{\pi}+tg(2x+1)+\dfrac{2}{11}x^2\cdot\sqrt{x^7}\right)^{29}$, $г)\ y=\dfrac{\sqrt{5x}}{6^x}$.

52. $a)\ y=2^{3x}\cdot tg2x$, $б)\ y=\dfrac{4x+tgx}{\sqrt{1+9x^2}}$,

$в)\ y=\left(3x-4\sqrt[3]{x}+2\right)^4$, $г)\ y=\ln arctg2x$.

53. $a)\ y=2^{8x}\cdot tg3x$, $б)\ y=\dfrac{\sin 2x}{\cos 5x}$,

$в)\ y=\left(4x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+4\right)^3$, $г)\ y=\arcsin\ln 4x$.

54. $a)\ y=e^{ctgx}\cdot\sin 4x$, $б)\ y=\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+tgx}$,

$в)\ y=\left(x^5-\sqrt[3]{x}+1\right)^5$, $г)\ y=\sin\ln 5x$.

55. $a)\ y=3^{tgx}\cdot\arcsin\left(x^2\right)$, $б)\ y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$,

$в)\ y=\left(6x^2-\dfrac{2}{x^4}+5\right)^2$, $г)\ y=\ln\sin 6x$.

56. $a)\ y=e^{ctgx}\cdot\cos 6x$, $б)\ y=\dfrac{arctg7x}{2-9x^2}$,

$в)\ y=\left(x^3-4\sqrt[4]{x^3}+2\right)^3$, $г)\ y=\sin\ln 2x$.

57. $а)\ y = 4^{\cos x} \cdot arctg2x,\qquad б)\ y = \dfrac{x^3 + e^x}{\sqrt{4 - 9x^5}},$

$в)\ y = \left(x^2 - 2 \cdot \sqrt[5]{x} + 4\right)^4,\quad г)\ y = \ln\cos 5x.$

58. $а)\ y = e^{x^3} \cdot tg7x,\qquad б)\ y = \dfrac{\cos 6x}{\sin 3x},$

$в)\ y = \left(3x^5 - \dfrac{5}{x^3} - 2\right)^5,\quad г)\ y = \arcsin\ln 2x.$

59. $а)\ y = 2^{\sin x} \cdot \arcsin 2x,\qquad б)\ y = \dfrac{\sqrt{3 - 5x^3}}{e^x - ctgx},$

$в)\ y = \left(x^4 + 2 \cdot \sqrt[3]{x} + 1\right)^2,\quad г)\ y = \ln\cos 7x.$

60. $а)\ y = e^{tgx} \cdot \ln 2x,\qquad б)\ y = \dfrac{\arcsin 7x}{x^4 + e^x},$

$в)\ y = \left(x^2 - \dfrac{1}{x^3} + 5 \cdot \sqrt{x}\right)^4,\quad г)\ y = \cos\sqrt{x^2 + 3}.$

Задачи №61-90:

Вычислить приближенное значение функции $y = f(x)$ в точке x_1, заменив приращение функции в точке x_0 ее дифференциалом:

61.	$f(x) = \sqrt[3]{x}$,	$x_1 = 502$,	$x_0 = 512$;
62.	$f(x) = \sqrt{4 + 3x}$,	$x_1 = 0{,}05$,	$x_0 = 0$;
63.	$f(x) = \sqrt{x + 8}$,	$x_1 = 1{,}2$,	$x_0 = 1$;
64.	$f(x) = \sqrt{3x + 1}$,	$x_1 = 1{,}04$,	$x_0 = 1$;
65.	$f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$,	$x_1 = 0{,}49$,	$x_0 = 0{,}5$;
66.	$f(x) = \ln x$,	$x_1 = 1{,}2$,	$x_0 = 1$;
67.	$f(x) = e^{x-1}$,	$x_1 = 1{,}1$,	$x_0 = 1$;
68.	$f(x) = \sqrt[4]{x}$,	$x_1 = 17$,	$x_0 = 16$;
69.	$f(x) = \sqrt[10]{x}$,	$x_1 = 1025$,	$x_0 = 1024$;
70.	$f(x) = \sqrt[5]{x}$,	$x_1 = 242$,	$x_0 = 243$;
71.	$f(x) = \sqrt{9 + 2x}$,	$x_1 = 0{,}06$,	$x_0 = 0$;

72. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_1=346$, $x_0=343$;

73. $f(x)=\sqrt{15+x}$, $x_1=1{,}8$, $x_0=1$;

74. $f(x)=arctgx$, $x_1=1{,}02$, $x_0=1$;

75. $f(x)=arcctgx$, $x_1=1{,}02$, $x_0=1$;

76. $f(x)=\arcsin x$, $x_1=0{,}1$, $x_0=0$;

77. $f(x)=\arccos x$, $x_1=0{,}1$, $x_0=0$;

78. $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{2-x}{2+x}}$, $x_1=0{,}15$, $x_0=0$;

79. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2+x}{2-x}}$, $x_1=0{,}15$, $x_0=0$;

80. $f(x)=\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}$, $x_1=0{,}15$, $x_0=0$;

81. $f(x)=\sqrt[3]{3x^2+8x-16}$, $x_1=3{,}94$, $x_0=4$;

82. $f(x)=\sqrt{5x^2+4x-1}$, $x_1=5{,}08$, $x_0=5$;

83. $f(x)=\cos x$, $x_1=63°$, $x_0=60°$;

84. $f(x)=tgx$, $x_1=46°$, $x_0=45°$;

85. $f(x)=\sqrt[4]{8x^2+6x-9}$, $x_1=2{,}88$, $x_0=3$;

86. $f(x)=arctgx$, $x_1=0{,}97$, $x_0=1$;

87. $f(x)=\arcsin x$, $x_1=0{,}4983$, $x_0=0{,}5$;

88. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+5}}$, $x_1=2{,}037$, $x_0=2$;

89. $f(x)=\cos x$, $x_1=58°$, $x_0=60°$;

90. $f(x)=\sqrt[5]{x^2-2x+8}$, $x_1=5{,}84$, $x_0=6$.

Задачи №91-120:

Исследовать функцию $y=f(x)$ и построить ее график:

91. $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2$;

92. $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$;

93. $y=\dfrac{1}{3}x^3+2x^2$;

94. $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2$;

95. $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2$; **96.** $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2$;

97. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$; **98.** $y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2$;

99. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$; **100.** $y = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2$;

101. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2$; **102.** $y = -\frac{1}{3}x^3 - 3x^2$;

103. $y = \frac{1}{9}x^3 + x^2$; **104.** $y = -\frac{1}{9}x^3 + x^2$;

105. $y = -\frac{1}{9}x^3 + -x^2$; **106.** $y = \frac{1}{9}x^3 - x^2$;

107. $y = \frac{1}{4}x^4 + x^3$; **108.** $y = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$;

109. $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3$; **110.** $y = -\frac{1}{4}x^4 - x^3$;

111. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$; **112.** $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$;

113. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$; **114.** $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 10$;

115. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$; **116.** $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$;

117. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$; **118.** $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$;

119. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$; **120.** $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$.

Задачи №121-150:

Найти частные производные I и II порядков:

121. $z = \sin(ax - by)$; **122.** $z = \cos(ax + by)$;

123. $z = \frac{x^2}{y^2}$; **124.** $z = \ln(x - 2y)$;

125. $z = \ln(y + 3x)$; **126.** $z = \frac{x^3}{2y^2}$;

127. $z = e^{ax - by}$; **128.** $z = e^{\frac{x}{y^2}}$;

129. $z = x \cdot \ln(2 + y)$; **130.** $z = ae^{xy}$;

131. $z = 3 + 3xy^5$;

132. $z = \dfrac{x^2}{1+2y}$;

133. $z = \ln(x^2 - 3y)$;

134. $z = e^{\frac{x}{y}}$;

135. $z = e^{\frac{x^2}{y}}$;

136. $z = e^{x^2 y}$;

137. $z = \ln(x + y^2)$;

138. $z = a^{ax+by}$;

139. $z = a^{ax-by}$;

140. $z = \ln(x^2 + y^3)$;

141. $z = \ln(5x - y^2)$;

142. $z = \dfrac{x}{y^2}$;

143. $z = y \cdot \ln(x-3)$;

144. $z = e^{xy^2}$;

145. $z = a^{5x-y^2}$;

146. $z = e^{\frac{x^4}{y}}$;

147. $z = 7e^{x^2+y}$;

148. $z = 8x^2y + 9y^2$;

149. $z = \ln(6x + 8y)$;

150. $z = \sin(x^2 + y)$.

Задачи №151-180:

Найти неопределенные интегралы:

151.

$a)\ \int\left(x^3 + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{0{,}5}{\sqrt{x}}\right)dx,$ $\quad в)\ \int \sin 5x \cdot \cos 2x dx,$

$б)\ \int \dfrac{xdx}{(x^2-1)^{-1}},$ $\quad г)\ \int x \cdot \ln(x+1)dx.$

152.

$a)\ \int\left(\sqrt{2}x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^{-2}} - \dfrac{1}{x} + 2\right)dx,$ $\quad в)\ \int \cos 3x \cdot \cos x dx,$

$б)\ \int \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}},$ $\quad г)\ \int x \cdot e^{-x} dx.$

153.

$a)\ \int \dfrac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{\sqrt{x}} dx,$ $\quad в)\ \int \sin 5x \cdot \sin 3x dx,$

$б)\ \int (x^3-1)^{\frac{1}{3}} \cdot x^2 dx,$ $\quad г)\ \int x \cdot \sin x dx.$

154. а) $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx,$ в) $\int \cos 7x \cdot \cos 3x dx,$

б) $\int x \cdot \sqrt{1-x^2}dx,$ г) $\int x \cdot \cos x dx.$

155. а) $\int \frac{3 \cdot (x-1)^3}{x^2}dx,$ в) $\int \sin 2x \cdot \sin x dx,$

б) $\int \frac{2x dx}{x^2+3},$ г) $\int x \cdot \cos 3x dx.$

156. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx,$ в) $\int \sin 4x \cdot \cos 2x dx,$

б) $\int \frac{4x dx}{\sqrt[3]{8-x^2}},$ г) $\int x \cdot \sin 3x dx.$

157. а) $\int \frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x-\sqrt{2}}dx,$ в) $\int \sin 6x \cdot \sin 3x dx,$

б) $\int x \cdot \sqrt{2-x^2}dx,$ г) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$

158. а) $\int \frac{x^3+2x-1}{1-x}dx,$ в) $\int \cos 3x \cdot \cos 2x dx,$

б) $\int \frac{x dx}{5+3x^2},$ г) $\int (2+3x) \cdot e^{\frac{x}{3}}dx.$

159. а) $\int \frac{2+x^2-2x^3}{1-x}dx,$ в) $\int \sin 5x \cdot \cos x dx,$

б) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+3},$ г) $\int \sqrt[4]{x} \cdot \ln x dx.$

160. а) $\int \frac{x^2-2\sqrt{x}+2}{x^3}dx,$ в) $\int \cos 5x \cdot \cos x dx,$

б) $\int 2x^2 \cdot \sqrt{x^3+1}dx,$ г) $\int x \cdot \cos 5 dx.$

161. а) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx,$ в) $\int \sin 3x \cdot \sin 2x dx,$

б) $\int x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3+2}dx,$ г) $\int x \cdot e^{-2x}dx.$

162. а) $\int \frac{(x+2)^2}{\sqrt[3]{x}}dx,$ в) $\int \sin 4x \cdot \cos 3x dx,$

б) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx,$ г) $\int x \cdot e^{3x}dx.$

163. а) $\int \frac{(x+1)^3}{x}dx$, в) $\int \cos 5x \cdot \sin 2x dx$,

б) $\int \frac{dx}{2-3x}$, г) $\int x \cdot \sin 2x dx$.

164. а) $\int \frac{2x^4 - 3x^3 + 2x - 1}{x^2}dx$, в) $\int \cos 8x \cdot \cos x dx$,

б) $\int \frac{5x^3 dx}{1-x^4}$, г) $\int x \cdot \ln x dx$.

165. а) $\int \frac{x^4 - 3x + 1}{x-1}dx$, в) $\int \sin 7x \cdot \sin 2x dx$,

б) $\int \frac{2x^2 dx}{3x^3 + 1}$, г) $\int x \cdot \ln 3x dx$.

166. а) $\int \frac{x^3}{x-1}dx$, в) $\int \sin 2x \cdot \cos x dx$,

б) $\int \frac{3x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3 + 2}}$, г) $\int x^2 \cdot \ln x dx$.

167. а) $\int \frac{x^2 - 4x + 1}{x-1}dx$, в) $\int \cos 8x \cdot \cos 5x dx$,

б) $\int \sqrt{x^3 + 3} \cdot x^2 dx$, г) $\int x^3 \cdot \ln x dx$.

168. а) $\int \frac{x^3 - 3x + 1}{x+2}dx$, в) $\int \sin 7x \cdot \sin 5x dx$,

б) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 3}$, г) $\int x \cdot \sin 9x dx$.

169. а) $\int \frac{x^8 - 4x^7}{x^7 - 6x^6}dx$, в) $\int \sin 6x \cdot \cos 2x dx$,

б) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x^3 + 1}}$, г) $\int x \cdot \ln(x-1) dx$.

170. а) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$, в) $\int \cos 5x \cdot \cos 3x dx$,

б) $\int \sqrt[3]{x^3 - 1} \cdot x^2 dx$, г) $\int x \cdot \cos 6x dx$.

171. а) $\int \left(4x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^{-3}} + \frac{1}{5x} + 1\right)dx$, в) $\int \sin 7x \cdot \cos 2x dx$,

б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 - 5}}$, г) $\int \frac{\ln x}{x}dx$.

172. $a)\ \int \frac{\sqrt[4]{x}-6\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx,$ $\quad$ $в)\ \int \cos 5x\cdot\cos 9x dx,$

$б)\ \int 5x\cdot\sqrt[3]{x^2-6}dx,$ $\quad$ $г)\ \int x\cdot\sin 7x dx.$

173. $a)\ \int \frac{x^4-1}{x+1}dx,$ $\quad$ $в)\ \int \sin 2x\cdot\cos x dx,$

$б)\ \int x^3\cdot\sqrt{x^4+9}dx,$ $\quad$ $г)\ \int (x+1)\cdot\sin 2x dx.$

174. $a)\ \int \frac{\sqrt{x}+3x+1}{\sqrt[3]{x}}dx,$ $\quad$ $в)\ \int \cos 5x\cdot\cos 11x dx,$

$б)\ \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2-5}},$ $\quad$ $г)\ \int (2-x)\cdot\cos x dx.$

175. $a)\ \int \frac{\sqrt[3]{x}-x^2+5}{x^{-2}}dx,$ $\quad$ $в)\ \int \sin 3x\cdot\cos 7x dx,$

$б)\ \int \frac{2x^3+x-1}{x-1}dx,$ $\quad$ $г)\ \int x\cdot\cos(2+x)dx.$

176. $a)\ \int \frac{(x-3)^3}{3x^2}dx,$ $\quad$ $в)\ \int \sin x\cdot\cos 13x dx,$

$б)\ \int x^4\cdot\sqrt[3]{x^5-7}dx,$ $\quad$ $г)\ \int x\cdot\cos(7x+1)dx.$

177. $a)\ \int \frac{(x+2)^2}{4\sqrt{x}}dx,$ $\quad$ $в)\ \int \sin 13x\cdot\cos x dx,$

$б)\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{x^3-7}},$ $\quad$ $г)\ \int (x+2)\cdot\ln x dx.$

178. $a)\ \int \frac{(x+2)^3}{x-1}dx,$ $\quad$ $в)\ \int \sin 2x\cdot\cos 8x dx,$

$б)\ \int \frac{4xdx}{\sqrt[4]{x^2-5}},$ $\quad$ $г)\ \int (2x+3)\cdot\cos 6x dx.$

179. $a)\ \int \frac{(x+3)^2}{\sqrt[3]{x}}dx,$ $\quad$ $в)\ \int \cos 7x\cdot\cos 13x dx,$

$б)\ \int \frac{5x^3dx}{6x^4+7},$ $\quad$ $г)\ \int (3x+2)\cdot\sin 7x dx.$

180. $a)\ \int \frac{(2-x)^2}{\sqrt{x}}dx,$ $\quad$ $в)\ \int \sin 3x\cdot\cos 13x dx,$

$б)\ \int \frac{5dx}{3-7x},$ $\quad$ $г)\ \int 1-(x)\cdot\ln x dx.$

Задачи №181-210:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = ax^2 + bx$ и $y = cx + d$. Значения параметров a, b, c, d даны в таблице.

№	***a***	***b***	***c***	***d***	**№**	***a***	***b***	***c***	***d***
181.	-1	2	1	-2	**196.**	1	2	3	6
182.	1	2	-1	4	**197.**	-1	2	3	-2
183.	-1	-3	-2	-6	**198.**	1	3	2	2
184.	1	-1	1	0	**199.**	-1	1	2	-2
185.	-1	4	-1	4	**200.**	1	-3	2	6
186.	1	3	2	6	**201.**	2	0	-2	4
187.	-1	-5	-4	-2	**202.**	1	0	-1	0
188.	1	-3	1	-3	**203.**	1	1	0	2
189.	-1	6	1	4	**204.**	1	4	0	12
190.	1	-2	3	-5	**205.**	1	0	4	12
191.	-1	-4	2	5	**206.**	1	6	0	16
192.	1	5	1	-3	**207.**	-1	0	6	-16
193.	-1	3	-4	12	**208.**	-1	0	-9	-36
194.	1	3	8	-6	**209.**	1	-9	0	36
195.	-1	-1	-6	-6	**210.**	1	0	-2	8

Контрольная работа № 3

Для определения индивидуальных заданий к контрольной работе №3 используйте таблицу №3.

Таблица №3

		Последняя цифра номера зачетной книжки									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	**1**	1, 31, 61	2, 32, 62	3, 33, 63	4, 34, 64	5, 35, 65	6, 36, 66	7, 37, 67	8, 38, 68	9, 39, 69	10, 40, 70
	2	11, 41, 71	12, 42, 72	13, 43, 73	14, 44, 74	15, 45, 75	16, 46, 76	17, 47, 77	18, 48, 78	19, 49, 79	20, 50, 80
	3	21, 51, 81	22, 52, 82	23, 53, 83	24, 54, 84	25, 55, 85	26, 56, 86	27, 57, 87	28, 58, 88	29, 59, 89	30, 60, 90
	4	20, 41, 80	19, 40, 79	18, 39, 78	17, 38, 77	16, 37, 76	15, 36, 75	14, 35, 74	13, 34, 73	12, 33, 72	11, 32, 71
	5	10, 31, 70	9, 51, 69	8, 52, 68	7, 53, 67	6, 54, 66	5, 55, 65	4, 56, 64	3, 57, 63	2, 58, 62	1, 59, 61
	6	30, 60, 90	29, 40, 89	28, 41, 88	27, 42, 87	26, 43, 86	25, 44, 85	24, 45, 84	23, 46, 83	22, 47, 82	21, 48, 81
	7	2, 49, 62	3, 50, 63	4, 51, 64	5, 52, 65	6, 53, 66	7, 54, 67	8, 55, 68	9, 56, 69	10, 57, 70	11, 58, 71
	8	12, 59, 72	13, 60, 73	14, 31, 74	15, 32, 75	16, 33, 76	17, 34, 77	18, 35, 78	19, 36, 79	20, 37, 80	21, 38, 81
	9	22, 39, 82	23, 40, 83	24, 41, 84	25, 42, 85	26, 43, 86	27, 44, 87	28, 45, 88	29, 46, 89	30, 47, 90	1, 48, 61
	0	15, 49, 75	14, 50, 74	13, 51, 73	12, 52, 72	11, 53, 71	10, 54, 70	9, 55, 69	8, 56, 68	7, 57, 67	6, 58, 66

Программа

I. Дифференциальные уравнения

1. Понятие дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Поле направлений. Интегральные кривые. Задача Коши.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Однородные и линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
3. Дифференциальные уравнения второго порядка. Общее и частное решения дифференциального уравнения второго порядка. Задача Коши.
4. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
5. Характеристическое уравнение. Общее решение линейного дифференциального однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от знака дискриминанта характеристического уравнения.
6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка со специальной правой частью.

II. Линейное программирование

7. Примеры экономических задач, решаемых методами линейного программирования.
8. Перечень основных методов математического программирования.
9. Постановка и различные формы записи задач линейного программирования. Стандартная и каноническая формы представления задач линейного программирования.
10. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования.
11. Основные свойства задач линейного программирования: выпуклость множества допустимых решений, существование базисных решений. Оптимальное решение.
12. Двойственная задача линейного программирования.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение дифференциального уравнения. Что такое порядок, решение дифференциального уравнения, общее решение, частное решение и интегральные кривые?
2. Дайте геометрическое истолкование общего и частного решения.
3. Дифференциальное уравнение первого порядка. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка.
4. Изложите методы решения уравнений с разделяющимися переменными, линейных и однородных уравнений.
5. Дифференциальные уравнения второго порядка. Общее и частное решения. Начальные условия.
6. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
7. Характеристическое уравнение.
8. Запишите общее решение уравнения в зависимости от корней характеристического уравнения.
9. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения со специальной правой частью.
10. Дайте определение выпуклой плоской фигуры.
11. Какая фигура является областью решений линейного неравенства?
12. Какая фигура является областью решений системы линейных неравенств?
13. Запишите каноническую форму задачи линейного программирования.
14. Запишите стандартную форму задачи линейного программирования.
15. Дайте определение плана, базисного плана, оптимального плана задачи линейного программирования.
16. Запишите двойственную задачу линейного программирования.
17. Может ли задача линейного программирования иметь решение в случае, когда область решений системы ограничений неограниченна?
18. Может ли задача линейного программирования иметь более одного оптимального плана? Приведите пример.

Задача №1

Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $x^2 - 4yy' = 0$ и написать уравнение интегральной кривой, проходящей через точку $M\ (1;2)$.

Решение:

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$ и разделим переменные

$$x^2 - 4y\frac{dy}{dx} = 0 \text{ или}$$

$$x^2 dx = 4ydy.$$

Проинтегрировав обе части равенства, получим

$$\int x^2 dx = 4\int ydy$$

$$\text{или } \frac{x^3}{3} = 2y^2 + C.$$

Это общий интеграл дифференциального уравнения.

Чтобы найти частное решение, подставим вместо x и y начальные условия

$$\frac{1^3}{3} = 2 \cdot 2^2 + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{23}{3}.$$

Значит, частное решение получится, если вместо константы C в общем интеграле подставить $-\frac{23}{3}$.

$$\frac{x^3}{3} = 2y^2 - \frac{23}{3} \text{ - частный интеграл.}$$

Задача №2

Найти частное решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - 9y' + 20y = 0,$$

удовлетворяющего заданным начальным условиям:

$$y(0) = -1,\ y'(0) = 2.$$

Решение:

Сначала найдем общее решение данного уравнения, для чего воспользуемся характеристическим уравнением. Для этого y'' заменим на λ^2, y' на λ и y на 1. В результате чего получим:

$$\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$.

Так как корни характеристического уравнения действительны и не равны, то общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где C_1 и C_2 произвольные постоянные.

Итак, $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x}$ - общее решение однородного уравнения.

Чтобы найти частное решение, в систему

$$\begin{cases} y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x} \\ y' = 4C_1 e^{4x} + 5C_2 e^{5x} \end{cases}$$

подставим вместо x, y, y' начальные условия:

$$x_0 = 0,\ y_0 = -1,\ y_0' = 2.$$

Тогда получим

$$\begin{cases} -1 = C_1 + C_2 \\ \ \ 2 = 4C_1 + 5C_2 \end{cases}.$$

Из этой системы найдем значения C_1 и C_2, и подставим их в общее решение вместо констант C_1 и C_2 соответственно.

$$\begin{cases} C_1 = -1 - C_2 \\ \ 2 = 4 \cdot (-1 - C_2) + 5C_2 \end{cases}.$$

Отсюда

$$2 = -4 - 4C_2 + 5C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 6, \quad C_1 = -7.$$

Значит, частное решение данного уравнения:

$$y = -7e^{4x} + 6e^{5x}.$$

Задача №3

На изготовление двух видов продукции P_1 и P_2 требуется три вида сырья S_1, S_2 и S_3. Запасы каждого вида сырья ограничены и составляют соответственно b_1, b_2 и b_3 условных единиц. При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно и задано в таблице:

Сырье	Продукция		Запасы сырья
	P_1	P_2	
S_1	A_{11}	A_{12}	b_1
S_2	A_{21}	A_{22}	b_2
S_3	A_{31}	A_{32}	b_3
Прибыль	C_1	C_2	

Здесь A_{ij} $(i = 1,2,3;\ j = 1,2)$ означает количество единиц сырья вида S_i, необходимое для изготовления единицы продукции вида P_j. В последней строке таблицы указаны значения прибыли, выраженной в условных денежных единицах и получаемой предприятием от реализации единицы каждого вида продукции.

Требуется составить такой план выпуска продукции видов P_1 и P_2, при котором прибыль от реализации всей продукции была бы максимальной.

Рассмотрим конкретный пример:

Сырье	Продукция		Запасы сырья
	P_1	P_2	
S_1	3	5	47
S_2	1	4	32
S_3	2	1	22
Прибыль	4	3	

Решение:

Обозначим через x_1 и x_2 количество единиц продукции видов P_1 и P_2, планируемое к выпуску. На изготовление x_1 единиц продукции вида P_1 должно расходоваться $3x_1$ единиц сырья вида S_1, так как на изготовление единицы продукции вида P_1 расходуется $A_{11} = 3$ единицы сырья вида S_1. Аналогично на изготовление x_2 единиц продукции вида P_2 должно расходоваться $5x_2$ единиц сырья вида S_1, так как $A_{12} = 5$. Следовательно, на изготовление x_1 единиц продукции вида P_1 и x_2 единиц продукции вида P_2 должно расходоваться $3x_1 + 5x_2$ единиц сырья вида S_1, запасы которого равны $b_1 = 47$. Поэтому должно выполняться следующее неравенство:

$$3x_1 + 5x_2 \le 47.$$

Для остальных видов сырья S_2 и S_3 должны выполняться неравенства:

$$x_1 + 4x_2 \le 32 \text{ и } 2x_1 + x_2 \le 22.$$

Очевидно также, что величины x_1 и x_2 должны быть неотрицательны, то есть должны выполняться неравенства $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$.

Объединим полученные неравенства в систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 47 \\ x_1 + 4x_2 \le 32 \\ 2x_1 + x_2 \le 22. \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Заданная система называется системой ограничений задачи. Любое решение $(x_1; x_2)$ системы ограничений называется планом выпуска или планом задачи.

Прибыль от реализации x_1 единиц продукции вида P_1 равна $4x_1$, так как $C_1 = 4$, а прибыль от реализации x_2 единиц продукции вида P_2 равна $3x_2$, так как $C_2 = 3$. Следовательно, суммарная прибыль предприятия от реализации продукции, выпущенной согласно плану $(x_1; x_2)$, равна $F(x_1; x_2) = 4x_1 + 3x_2$ условных денежных единиц.

По условию задачи требуется найти такой план $(x_1; x_2)$, при котором прибыль $F(x_1; x_2) = 4x_1 + 3x_2$ была бы максимальной, что записывается так:

$$F(x_1; x_2) = 4x_1 + 3x_2 \to \max.$$

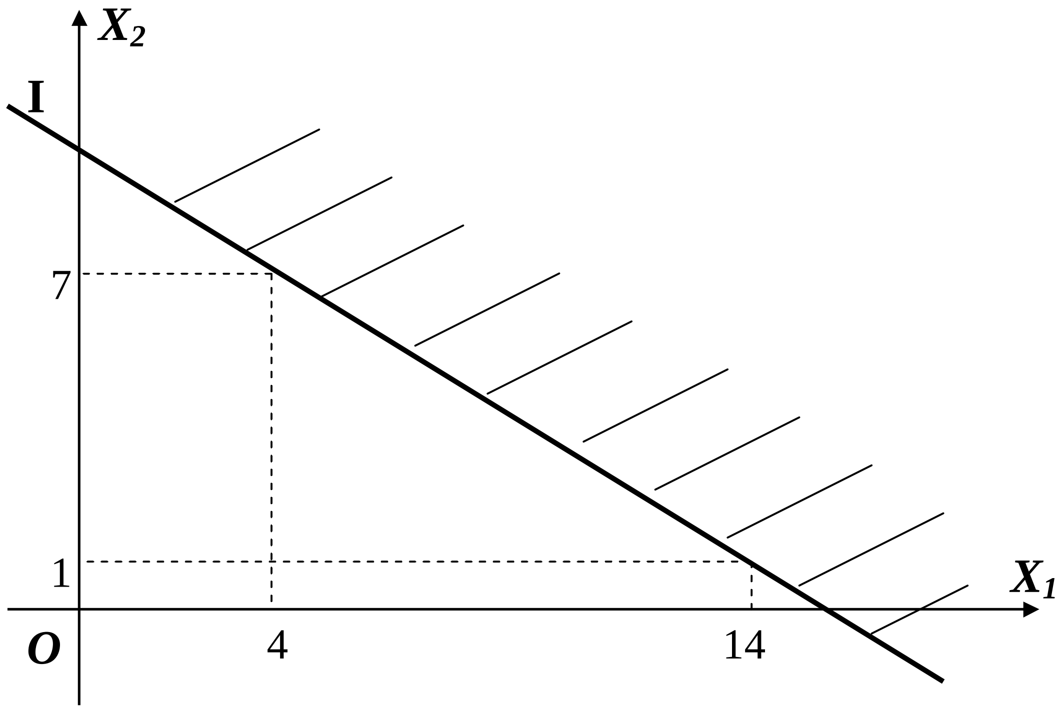
Линейная функция двух переменных $F(x_1; x_2)$ называется целевой функцией задачи. Таким образом, математическая модель нашей задачи является задачей линейного программирования:

$$F(x_1; x_2) = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 47 \\ x_1 + 4x_2 \le 32 \\ 2x_1 + x_2 \le 22 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

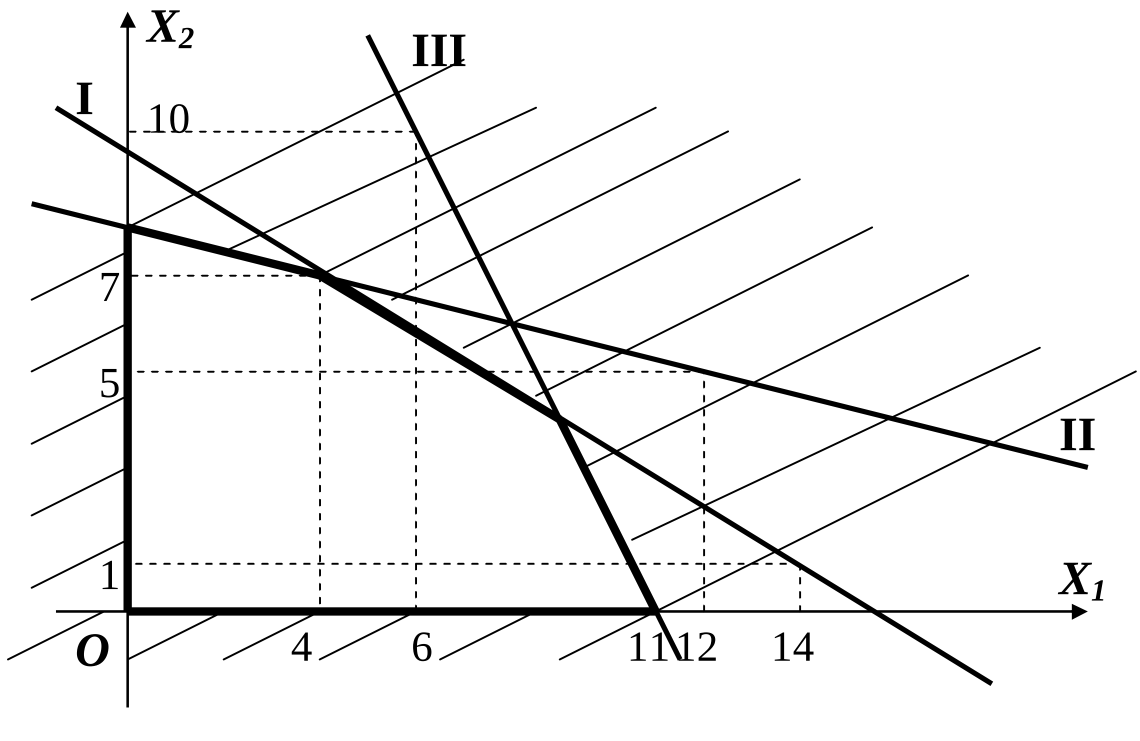
Теперь среди всех возможных планов задачи мы будем искать оптимальный план $(x_1^*; x_2^*)$, то есть такой план, при котором целевая функция достигает своего наибольшего значения.

Область решения системы ограничений, т.е. совокупность всех планов задачи, представляет собой выпуклый многоугольник на плоскости x_1Ox_2. Чтобы построить этот многоугольник, мы будем последовательно строить полуплоскости – области решений каждого из неравенств системы ограничений. Построим область решений первого неравенства системы ограничений $3x_1 + 5x_2 \le 47$. Сначала построим прямую, заданную уравнением $3x_1 + 5x_2 = 47$. Для этого найдем координаты двух точек этой прямой, например, $(4;7)$ и $(14;1)$. Через эти точки проведем прямую **I**.

Для определения полуплоскости решений нашего неравенства возьмем произвольную точку плоскости, не лежащую на прямой $3x_1 + 5x_2 = 47$, например, $(0;0)$. Подставив ее координаты в неравенство $3x_1 + 5x_2 \le 47$, получим верное числовое неравенство $0 \le 47$, а это означает, что начало координат лежит в полуплоскости решений рассматриваемого неравенства. Противоположную полуплоскость мы заштрихуем.

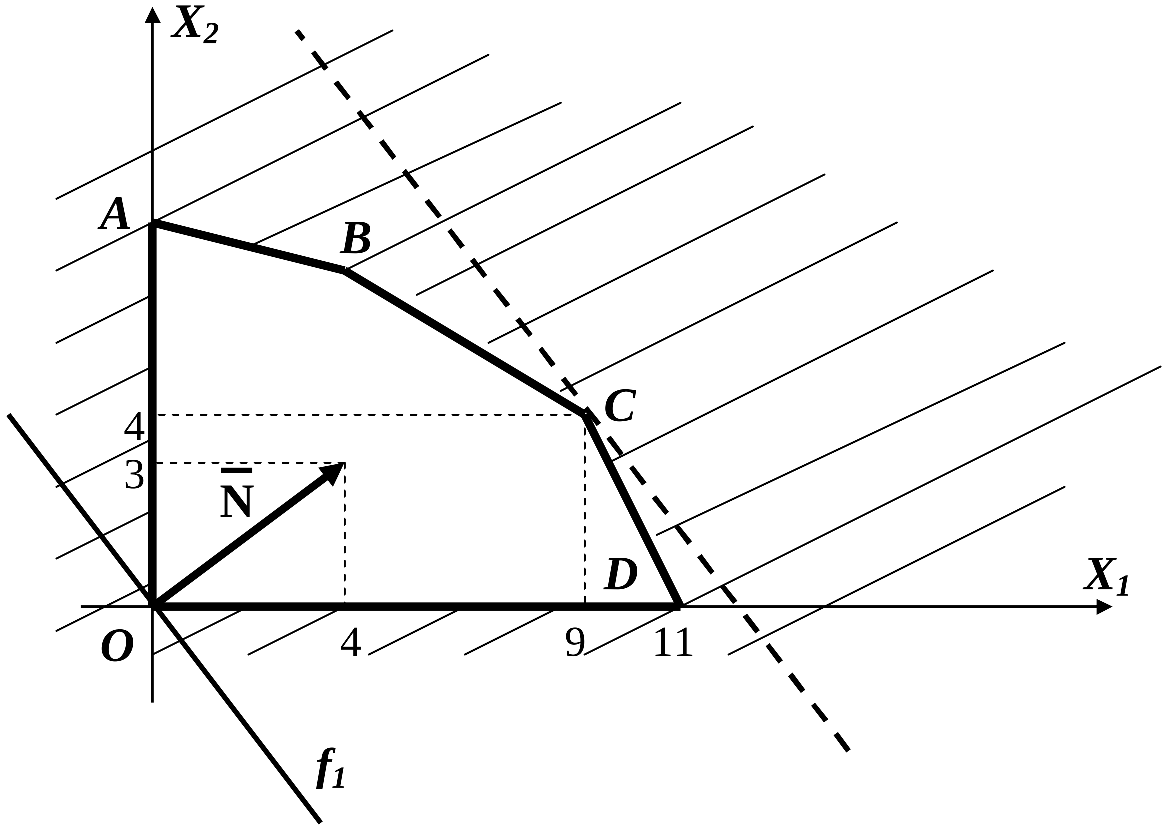


Аналогично строим полуплоскости решений остальных неравенств системы ограничений, каждый раз заштриховывая «ненужную» полуплоскость (прямые $x_1 + 4x_2 \le 32$ и $2x_1 + x_2 \le 22$ имеют соответственно номера **II** и **III**). Оставшаяся не заштрихованной часть плоскости представляет собой искомый многоугольник.



Теперь среди точек построенного многоугольника *OABCD* мы будем искать ту точку, в которой целевая функция задачи

$F(x_1;x_2) = 4x_1 + 3x_2$ достигает своего максимального значения. Для каждой точки плоскости x_1Ox_2 целевая функция $F(x_1;x_2)$ принимает фиксированное значение. Множество точек, на которых $F(x_1;x_2)$ принимает фиксированное значение F_1, есть прямая $4x_1 + 3x_2 = F_1$ (обозначим ее f_1), которая перпендикулярна вектору $\overrightarrow{N} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$. Если прямую f_1 передвигать параллельно самой себе в положительном направлении вектора $\overrightarrow{N}$, то целевая функция $F(x_1;x_2)$ будет возрастать, а в противоположном направлении – убывать. Построим прямую f_1 для того случая, когда $F_1 = 0$, т.е. построим прямую $4x_1 + 3x_2 = 0$.



Как видно из рисунка, при передвижении прямой f_1 в положительном направлении вектора $\overrightarrow{N}$ целевая функция достигнет своего наибольшего значения в вершине многоугольника C - в точке пересечения прямых $3x_1 + 5x_2 = 47$ и $2x_1 + x_2 = 22$.

Решив систему:

$$\begin{cases} 3x_1^* + 5x_2^* = 47 \\ 2x_1^* + x_2^* = 22 \end{cases},$$

найдем координаты точки $C\,(9;4)$. Максимальное значение целевой функции $F^* = F(9;4) = 4\cdot 9 + 3\cdot 4 = 36 + 12 = 48$ условных денежных единиц.

Ответ:

Для достижения максимальной прибыли от реализации готовой продукции предприятию необходимо выпустить 9 единиц продукции вида P_1 и 4 единицы продукции вида P_2, при таком плане прибыль от реализации составит 48 условных денежных единиц.

Задачи контрольной работы №3

Задачи №1-30:

Найти общее решение дифференциального уравнения $ax^c + by^d \cdot y' = 0$ и написать уравнение интегральной кривой, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$. Значения параметров a, b, c, d, x_0, y_0 даны в таблице №1.

Таблица №1

№	a	b	c	d	x_0	y_0
1.	2	3	1	2	2	1
2.	-2	-3	2	2	-2	1
3.	4	-1	1	3	2	-1
4.	1	2	3	1	-1	1
5.	3	2	2	1	2	3
6.	6	-1	2	3	1	0
7.	4	3	3	2	1	1
8.	-4	1	3	3	1	1
9.	1	1	1	2	3	2
10.	-3	4	2	1	2	3
11.	1	6	2	2	-1	1
12.	-4	1	3	1	1	4
13.	3	4	2	3	1	2
14.	4	3	3	3	1	1
15.	-1	1	1	3	5	1
16.	2	1	2	1	2	3
17.	1	-1	2	2	1	-2
18.	4	-1	1	1	3	4
19.	8	-3	3	2	1	1
20.	2	3	3	1	1	3
21.	1	1	-2	-2	-1	1
22.	1	1	1	1	-2	4
23.	1	1	-1	-1	-2	4
24.	-1	1	-1	-1	-2	4
25.	1	1	-2	-1	1	1
26.	-1	1	0	-1	1	e

Продолжение таблицы №1

№	a	b	c	d	x_0	y_0
27.	-1	-2	-2	-1	1	e
28.	2	-1	-3	-1	1	e
29.	2	3	-1	1	e	1
30.	1	-1	-3	1	1	1

Задачи №31-60:

Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + ay' + by = 0,$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, где значения a, b, x_0, y_0, y'_0 даны в таблице №2.

Таблица №2

№	a	b	x_0	y_0	y'_0
31.	-7	10	0	2	-1
32.	2	10	$\pi/2$	0	1
33.	-6	9	0	1	0
34.	8	7	0	2	1
35.	0	9	π	0	1
36.	-7	12	0	2	-2
37.	9	0	0	1	-3
38.	-3	2	0	0	1
39.	-5	6	0	5	0
40.	-2	5	0	-1	0
41.	0	16	π	-1	0
42.	10	25	0	1	1
43.	-6	0	0	2	-2
44.	-4	4	0	1	3
45.	-8	15	0	1	-2
46.	-4	17	$\pi/2$	0	1

Продолжение таблицы №2

№	a	b	x_0	y_0	y'_0
47.	-2	1	1	0	2
48.	0	1	π	-1	-4
49.	-7	6	0	2	0
50.	8	16	0	1	0
51.	-6	8	0	1	2
52.	-8	16	0	2	5
53.	-4	13	π	0	1
54.	-2	-8	0	0	5
55.	0	4	0	1	2
56.	-1	-2	0	2	5
57.	0	4	π	-3	-4
58.	1	-2	0	3	5
59.	-4	3	0	3	7
60.	6	9	0	1	-3

Задачи №61-90:

На изготовление двух видов продукции P_1 и P_2 требуется три вида сырья S_1, S_2 и S_3. Запасы каждого вида сырья ограничены и составляют соответственно b_1, b_2 и b_3 условных единиц. При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно и задано в таблице:

Сырье	Продукция		Запасы сырья
	P_1	P_2	
S_1	A_{11}	A_{12}	b_1
S_2	A_{21}	A_{22}	b_2
S_3	A_{31}	A_{32}	b_3
Прибыль	C_1	C_2	

Здесь A_{ij} $(i = 1,2,3;\ j = 1,2)$ означает количество единиц сырья вида S_i, необходимое для изготовления единицы продукции вида

P_j. В последней строке таблицы указаны значения прибыли, выраженной в условных денежных единицах и получаемой предприятием от реализации единицы каждого вида продукции.

Требуется составить такой план выпуска продукции видов P_1 и P_2, при котором прибыль от реализации всей продукции была бы максимальной.

Значения A_{ij}, b_i и C_j даны в таблице №3.

Таблица №3

№ задачи	A_{11}	A_{12}	b_1	A_{21}	A_{22}	b_2	A_{31}	A_{32}	b_3	C_1	C_2
61.	1	1	8	1	4	20	1	0	5	1	2
62.	1	5	35	2	1	16	1	0	6	2	3
63.	1	4	28	1	1	10	1	0	7	3	5
64.	1	6	24	1	2	12	1	0	8	1	1
65.	1	3	30	2	3	36	1	0	9	2	4
66.	1	4	36	3	2	38	1	0	10	1	1
67.	1	4	36	5	3	44	1	0	7	2	3
68.	1	2	15	1	3	21	1	0	5	2	5
69.	2	8	48	1	2	14	1	0	6	2	7
70.	1	5	35	2	3	27	1	0	7	1	1
71.	1	7	63	2	1	22	1	0	9	2	3
72.	1	7	56	2	1	21	1	0	8	2	3
73.	1	3	30	3	1	26	1	0	7	1	1
74.	3	1	12	1	2	9	1	0	4	2	2
75.	1	6	42	1	1	12	1	0	8	1	2
76.	2	7	49	3	2	31	1	0	9	2	3
77.	1	9	81	2	1	26	1	0	10	1	1
78.	1	3	21	1	1	11	1	0	8	1	2
79.	1	2	14	2	1	13	1	0	5	3	4
80.	1	3	24	3	1	24	1	0	7	2	5
81.	4	1	28	1	4	28	1	1	10	1	2
82.	3	5	40	1	1	10	2	1	16	3	4
83.	1	1	10	2	1	18	3	5	40	6	5
84.	1	1	6	2	1	10	2	3	15	3	1
85.	1	3	12	1	1	6	2	1	10	2	7
86.	2	1	10	2	3	15	1	1	6	3	8

Продолжение таблицы №3

№ задачи	A_{11}	A_{12}	b_1	A_{21}	A_{22}	b_2	A_{31}	A_{32}	b_3	C_1	C_2
87.	1	3	18	1	1	8	3	1	18	1	1
88.	1	1	8	3	2	21	1	3	18	2	1
89.	0	1	5	1	1	8	3	1	18	5	2
90.	3	2	21	0	1	5	1	1	8	2	3

Контрольная работа № 4

Для определения индивидуальных заданий к контрольной работе №4 используйте таблицу №4.

Таблица №4

		Последняя цифра номера зачетной книжки									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	**1**	1, 31, 61	2, 32, 62	3, 33, 63	4, 34, 64	5, 35, 65	6, 36, 66	7, 37, 67	8, 38, 68	9, 39, 69	10, 40, 70
	2	11, 41, 71	12, 42, 72	13, 43, 73	14, 44, 74	15, 45, 75	16, 46, 76	17, 47, 77	18, 48, 78	19, 49, 79	20, 50, 80
	3	21, 51, 81	22, 52, 82	23, 53, 83	24, 54, 84	25, 55, 85	26, 56, 86	27, 57, 87	28, 58, 88	29, 59, 89	30, 60, 90
	4	20, 41, 71	19, 40, 70	18, 39, 69	17, 38, 68	16, 37, 67	15, 36, 66	14, 35, 65	13, 34, 64	12, 33, 63	11, 32, 62
	5	10, 31, 61	9, 51, 81	8, 52, 82	7, 53, 83	6, 54, 84	5, 55, 85	4, 56, 86	3, 57, 87	2, 58, 88	1, 59, 89
	6	30, 60, 90	29, 40, 70	28, 41, 71	27, 42, 72	26, 43, 73	25, 44, 74	24, 45, 75	23, 46, 76	22, 47, 77	21, 48, 78
	7	2, 49, 79	3, 50, 80	4, 51, 81	5, 52, 82	6, 53, 83	7, 54, 84	8, 55, 85	9, 56, 86	10, 57, 87	11, 58, 88
	8	12, 59, 89	13, 60, 90	14, 31, 61	15, 32, 62	16, 33, 63	17, 34, 64	18, 35, 65	19, 36, 66	20, 37, 67	21, 38, 68
	9	22, 39, 69	23, 40, 70	24, 41, 71	25, 42, 72	26, 43, 73	27, 44, 74	28, 45, 75	29, 46, 76	30, 47, 77	1, 48, 78
	0	15, 49, 79	14, 50, 80	13, 51, 81	12, 52, 82	11, 53, 83	10, 54, 84	9, 55, 85	8, 56, 86	7, 57, 87	6, 58, 88

Программа

I. Теория вероятностей

1. Предмет теории вероятностей и ее значение для экономической науки. Классификация событий. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Понятие случайного события.
2. Классическое и статистическое определения вероятности случайного события.
3. Вероятность суммы и произведения событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
4. Дискретные случайные величины. Функция распределения и ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, их свойства.
5. Схема Бернулли. Биномиальное распределение и его числовые характеристики. Теоремы Муавра-Лапласа (без доказательства).
6. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины, их взаимосвязь и свойства.
7. Нормальное распределение и его свойства.
8. Понятие о законе больших чисел. Устойчивость относительных частот и устойчивость средних. Понятие о центральной предельной теореме Ляпунова.

II. Математическая статистика

1. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.
2. Статистическое оценивание генеральной средней. Понятие о методе моментов. Погрешность оценивания. Доверительная вероятность и доверительный интервал.
3. Понятие о критерии согласия. Статистическая проверка гипотез о равенстве долей и средних.
4. Проверка гипотез о законе распределения генеральной совокупности с помощью критериев согласия χ^2 и Колмогорова.

5. Функциональная зависимость и регрессия. Кривые регрессии и их свойства.
6. Определение параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов. Коэффициенты регрессии и корреляции, их свойства.

Вопросы для самопроверки

1. Что Вы понимаете под случайным событием?
2. Дайте определение суммы, произведения событий и противоположного события.
3. Что Вы понимаете под благоприятным и неблагоприятным исходами для некоторого события A?
4. Дайте классическое и статистическое определение вероятности.
5. Сформулируйте и докажите теорему о вероятности суммы событий. Как будет выглядеть эта теорема для несовместных событий?
6. Дайте определение условной вероятности. Какие события называются независимыми?
7. Как определяется вероятность произведения событий? Чему равна вероятность произведения независимых событий?
8. Дайте определение полной группы событий. Приведите пример полной группы событий. Сформулируйте и докажите формулу полной вероятности.
9. Для каких целей используется формула Байеса?
10. Объясните, в чем состоит схема повторных испытаний, и выведите формулу Бернулли.
11. Сформулируйте локальную и интегральную теоремы Лапласа и объясните их значение.
12. Дайте определение случайной величины и укажите, какие виды случайных величин Вы знаете. Что называется законом распределения дискретной случайной величины, ее математическим ожиданием, дисперсией и среднеквадратическим отклонением? Укажите свойства математического ожидания и дисперсии.
13. Дайте определение функции распределения случайной величины (интегральной функции распределения). Как по функции распределения найти плотность распределения

(дифференциальную функцию распределения) непрерывной случайной величины? Укажите свойства функции распределения и плотности распределения непрерывных случайных величин.

14. Как определяются математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение непрерывной случайной величины?
15. Как по функции распределения найти вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал?
16. Охарактеризуйте нормальное распределение (опишите плотность распределения и функцию распределения). Каков смысл функции Лапласа?
17. Сформулируйте закон больших чисел и теорему Ляпунова. Почему нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике?
18. В чем разница между повторными и бесповторными выборками?
19. Дайте определение генеральной и выборочной средней, генеральной и выборочной дисперсии, генеральной и выборочной доли.
20. Что Вы понимаете под эмпирической функцией распределения?
21. Как определяются несмещенность, эффективность и состоятельность оценки? Дайте оценку генеральных средней, доли, дисперсии по выборочным данным.
22. Как найти доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормально распределенного признака генеральной совокупности?
23. Что понимается под функциональной, статистической и корреляционной зависимостями?
24. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии. Выборочный коэффициент корреляции.
25. Статистические гипотезы. Их виды. Ошибки первого и второго рода.
26. Чем отличается статистический критерий для проверки гипотезы от наблюдаемого значения этого критерия?
27. Как строится критическая область?

28. Какой критерий используется при проверке гипотезы о равенстве средних двух генеральных совокупностей?
29. Как используется критерий Колмогорова?

Задача №1

На предприятии переработки сельскохозяйственной продукции установлены три поточных линии по производству колбасных изделий. На первой линии производится 25% изделий от всего объема их производства, на второй – 35%, а на третьей линии – 40%. Каждая из этих линий характеризуется соответственно следующими процентами изделий высшего качества: 97%, 95% и 92%. Требуется определить:

1. вероятность того, что наудачу взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется низкого качества;
2. вероятность того, что обнаруженное изделие низкого качества изготовлено:

а) на первой линии;
б) на второй линии;
в) на третьей линии.

Решение:

Пусть H_1, H_2, H_3 - события (гипотезы), состоящие в том, что наудачу взятое изделие изготовлено соответственно на первой, второй и третьей линиях.

Из условия задачи следует, что вероятности этих событий:

$$P(H_1)=0{,}25;\; P(H_2)=0{,}35;\; P(H_3)=0{,}40.$$

При этом события H_1, H_2 и H_3 образуют полную группу событий, т.к. они попарно несовместны и

$$P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1.$$

Обозначим A - событие, означающее, что наудачу взятое изделие низкого качества, тогда из условия задачи определяются условные вероятности: $P_{H_1}(A)=0{,}03$ - вероятность того, что колбасное изделие низкого качества, если оно изготовлено на первой линии (100%-97%=3%).

Аналогично определим условные вероятности $P_{H_2}(A) = 0{,}05$ и $P_{H_3}(A) = 0{,}08$ соответственно для второй и третьей линий.

Теперь можно ответить на первый вопрос задачи: определить вероятность того, что наудачу взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется низкого качества. Для этого используем формулу полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) \quad \text{(для n=3)}$$

Получаем:

$$P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}003 + 0{,}35 \cdot 0{,}005 + 0{,}40 \cdot 0{,}08 =$$
$$= 0{,}0075 + 0{,}0175 + 0{,}0320 = 0{,}057.$$

Т.е. процент изделий низкого качества на предприятии составляет 5,7%.

Для того, чтобы на второй вопрос задачи, следует воспользоваться формулой Байеса:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)},$$

с помощью этой формулы мы получим ответ на следующий вопрос: какова вероятность того, что наудачу взятое изделие низкого качества было изготовлено на i-й линии.

а) для первой линии

$$P_A(H_1) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}03}{0{,}057} = \frac{0{,}0075}{0{,}057} = \frac{5}{38} < 0{,}25;$$

б) для второй линии

$$P_A(H_2) = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}05}{0{,}057} = \frac{0{,}0175}{0{,}057} = \frac{35}{114} < 0{,}35;$$

в) для третьей линии

$$P_A(H_3) = \frac{0{,}40 \cdot 0{,}08}{0{,}057} = \frac{0{,}032}{0{,}057} = \frac{32}{57} > 0{,}40.$$

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез H_i после того, как становится известным, что в результате случайного эксперимента произошло событие A - извлекли изделие низкого качества. Однако определяемые события вновь образуют полную группу, т.к. они попарно несовместны и $\sum_{i=1}^{n} P_A(H_i) = 1$, т.е. $\frac{5}{38} + \frac{35}{114} + \frac{32}{57} = 1$.

Задача №2

В целях изучения урожайности подсолнечника проведено выборочное обследование десяти фермерских хозяйств области, отобранных в случайном порядке. При этом получены следующие данные (x, ц/га):

16,1; 15,4; 17,3; 16,6; 17,9; 16,5; 16,8; 15,1; 17,1; 16,3.

По данным выборки определите:

1. Какое количество фермерских хозяйств n необходимо обследовать для того, чтобы ошибка при оценке генеральной средней не превышала бы $\Delta_{\bar{x}} = 0{,}2$ ц/га с вероятностью $P_1 = 0{,}95$;
2. Установить с доверительной вероятностью $P_2 = 0{,}90$ пределы, в которых находится доля хозяйств в генеральной совокупности, имеющих урожайность подсолнечника не ниже 17 ц/га, при условии, что эта доля в выборке объемом n осталась прежней.

Решение:

Рассмотрим ряд распределения случайной величины x, разместив все значения в порядке возрастания:

15,1; 15,4; 16,1; 16,3; 16,5; 16,6; 17,1; 17,3; 17,9.

Заметим, что исходные данные представляют собой величины, каждая из которых встречается по одному разу, поэтому математическое ожидание (средняя) и дисперсия определяются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{165{,}1}{10} = 16{,}51;$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\bar{x}\right)^2 = \frac{2732{,}23}{10} - (16{,}51)^2 = 0{,}6429 \approx (0{,}8018)^2.$$

1. Чтобы по заданной доверительной вероятности $P_1 = 0{,}95$ определить значение параметра функции Лапласа t_1 надо по таблице значений функции Лапласа (смотри приложение 1) найти значение параметра t, соответствующего значению функции $\Phi(t) = \dfrac{P_1}{2} = 0{,}475$. Этому значению соответствует $t_1 = 1{,}96$.

Для определения необходимой численности выборки будем исходить из предельной ошибки выборки для оценки генеральной средней $\Delta_{\bar{x}} = 0{,}2$, параметра функции Лапласа для заданной доверительной вероятности $P_1 = 0{,}95$ $(t_1 = 1{,}96)$ и дисперсии $\sigma_x^2 = 0{,}6429$ по формуле:

$$n \geq \frac{t_1^2 \cdot \sigma_x^2}{\left(\Delta_{\bar{x}}\right)^2}.$$

В нашем случае

$$n \geq \frac{(1{,}96)^2 \cdot 0{,}6429}{(0{,}2)^2} = 61{,}74 \text{ т.е. } n \geq 62.$$

2. Для того чтобы ответить на второй вопрос задачи, воспользуемся формулой для оценки ошибки доли Δ_P для заданной доверительной вероятности $P_2 = 0{,}90$ $(t_2 = 1{,}645)$.

$$\Delta_P = t_2 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},$$

где p - это доля тех хозяйств в выборке, которые имеют урожайность $x \geq 17$ ц/га. Таких хозяйств в выборке 3 из 10, т.е. $p = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$. Следовательно, $q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

По условию задачи эта доля не изменилась при $n = 62$, поэтому ошибка при оценке доли в генеральной совокупности

$$\Delta_P = 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{62}} = 0{,}095737 \approx 0{,}096.$$

Теперь можно определить пределы, в которых с вероятностью $P = 0{,}9$ находится доля хозяйств в генеральной совокупности, имеющих урожайность не ниже 17 ц/га:

$$\{0{,}3 - 0{,}096 \leq P \leq 0{,}3 + 0{,}096\} = \{0{,}204 \leq P \leq 0 < 396\},$$

т.е. таких хозяйств в области от 20% до 40%.

Задача №3

Получено следующее распределение малых предприятий по объему выпускаемой продукции *x* (ед.) и ее себестоимости *y* (руб/ед.):

x_i	50	100	150	200	300	350	400	450	500	550	600	650
y_i	160	155	150	150	140	135	135	130	125	120	120	110

Предполагая, что между переменными *x* и *y* существует линейная корреляционная зависимость, необходимо:

1. Вычислить коэффициент корреляции; решить вопрос о тесноте линейной связи между объемом продукции и ее себестоимостью; проверить значимость r_{xy} на основе *t*-критерия Стьюдента.
2. Составить уравнение прямой регрессии $\overline{y}(x) = ax + b$, применив метод наименьших квадратов.
3. Полученные результаты нанести на график корреляционного поля и сделать прогноз о себестоимости продукции на малых предприятиях с объемом выпускаемой продукции:

x=250 единиц (интерполяция)

x=700 единиц (экстраполяция).

Решение:

1. Для того чтобы ответить на первый и второй вопросы задачи, нам понадобятся следующие суммы:

$$n = 12;\; S_1 = \sum_{i=1}^{12} x_i = 4300;\; S_2 = \sum_{i=1}^{12} y_i = 1630;$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 1985000;\; S_4 = \sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 224100;$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 549750.$$

Коэффициент корреляции определяется с помощью найденных сумм по формуле:

$$r_{xy} = \frac{nS_5 - S_1 \cdot S_2}{\sqrt{\left(nS_3 - S_1^2\right) \cdot \left(nS_4 - S_2^2\right)}}.$$

Подставив в эту формулу соответствующие значения, получим:

$$r_{xy} = \frac{12 \cdot 549750 - 4300 \cdot 1630}{\sqrt{\left(12 \cdot 1985000 - (4300)^2\right) \cdot \left(12 \cdot 224100 - (1630)^2\right)}} =$$

$$= \frac{-412000}{\sqrt{5330000 \cdot 32300}} = -\frac{412}{\sqrt{533 \cdot 323}} \approx -\frac{412}{414{,}92047} \approx -0{,}9930.$$

Знак «минус» означает, что линейная корреляционная зависимость $\overline{y}(x)$ является убывающей (чем больше объем выпускаемой продукции, тем ниже ее себестоимость).

Значение $|r_{xy}| = |-0{,}9930|$ близко к единице, следовательно, можно сделать вывод о сильной корреляционной связи между факторами x и y.

Значимость линейного коэффициента корреляции проверяется на основе t-критерия Стьюдента:

$$t_P = \sqrt{\frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} \cdot (n-2)} = \frac{|r_{xy}|}{\sqrt{1 - r_{xy}^2}} \cdot \sqrt{n-2}.$$

При подстановке наших значений, получаем:

$$t_P = \frac{0{,}9930 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{1 - 0{,}9930^2}} = 223{,}84421.$$

Теперь по таблице распределения Стьюдента (t-распределение) находим для $\alpha = 0{,}05$ и $N = 12 - 1 = 11$ значение $t_{кр} = 2{,}201$.

Так как t_P (расчетное) значительно превышает $t_{кр}$ (критическое табличное), то гипотеза $H_0 : r_{xy} = 0$ отвергается, что свидетельствует о значимости линейного коэффициента корреляции, а следовательно, и о статистической существенности зависимости между объемом продукции и ее себестоимости.

2. Для определения параметров a и b уравнения прямой линии регрессии запишем систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} bn + a\sum_{i=1}^{12} x_i = \sum_{i=1}^{12} y_i \\ b\sum_{i=1}^{12} x_i + a\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = \sum_{i=1}^{12} x_i y_i \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12b + 4300a = 1630 \\ 4300b + 1985000a = 549750 \end{cases}.$$

Разделим коэффициенты первого уравнения системы на 12, а коэффициенты второго – на 4300 и после элементарных преобразований получим решение:

$$\begin{cases} b + 358,(3)a = 135,8(3) \\ b + 461,6279a = 127,84883 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 135,8(3) - 358,(3)a \\ -103,29457a = 7,9845 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \approx -0,0773 \\ b \approx 163,53 \end{cases}.$$

Искомое уравнение прямой линии регрессии:

$$\overline{y}(x) = -0,0773x + 163,53.$$

3. Построим корреляционное поле и прямую регрессии (рис.1)

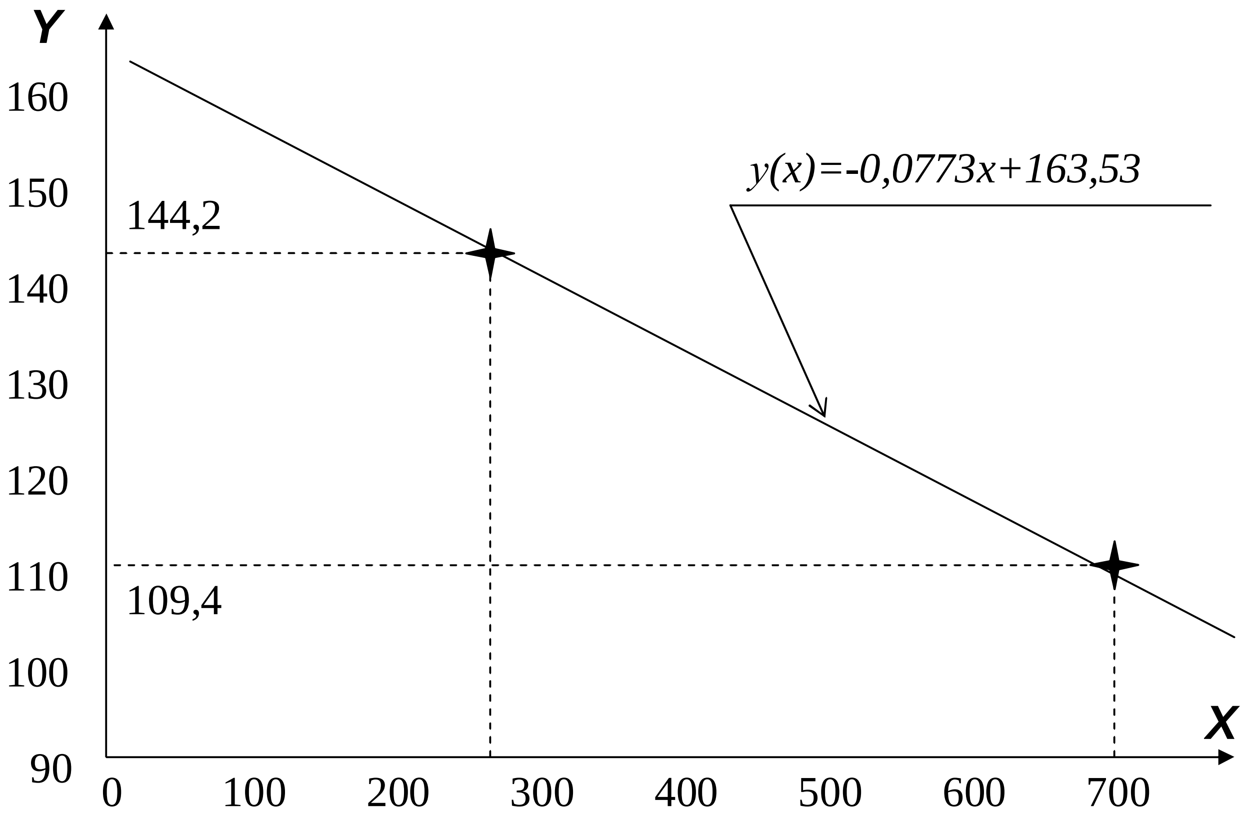


Рис 1. Корреляционное поле; прямая регрессии.

Определим, используя уравнение регрессии, $\overline{y}(250) \approx 144,2$ и $\overline{y}(700) \approx 109,4$, т.е. прогнозируемые значения себестоимости продукции при объеме производства 250 единиц приблизительно равны 144,2 руб/ед, а при объеме 700 единиц следует ожидать себестоимость приблизительно 109,4 руб/ед.

Задачи контрольной работы №4

Задачи №1-30:

На предприятии изготовляются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится $\mathbf{M_1\%}$ изделий от всего объема их производства, на второй - $\mathbf{M_2\%}$, на третьей - $\mathbf{M_3\%}$. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годности изделий: $\mathbf{K_1\%}$, $\mathbf{K_2\%}$ и $\mathbf{K_3\%}$. Требуется определить вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным, а также вероятности того, что это бракованное изделие сделано на первой, второй и третьей линиях.

Таблица №1

№	M_1	M_2	M_3	K_1	K_2	K_3
1.	15	55	30	92	97	93
2.	35	35	30	95	94	91
3.	20	35	45	98	97	92
4.	10	40	50	92	96	93
5.	25	40	35	95	97	92
6.	40	30	30	91	95	97
7.	10	20	70	92	95	94
8.	25	15	60	96	95	93
9.	30	25	45	91	96	95
10.	20	30	50	93	94	95
11.	25	20	55	96	92	97
12.	45	30	25	94	95	97
13.	30	35	35	93	95	96
14.	20	40	40	96	93	95
15.	25	25	50	97	93	95

№	M_1	M_2	M_3	K_1	K_2	K_3
16.	15	45	40	93	96	98
17.	20	25	55	97	92	95
18.	35	25	40	95	92	98
19.	40	35	25	94	96	97
20.	10	30	60	97	93	95
21.	35	40	25	96	93	98
22.	20	45	35	94	97	95
23.	30	40	30	97	94	96
24.	25	30	45	93	92	95
25.	30	30	40	94	98	96
26.	30	50	20	98	95	94
27.	40	20	40	92	94	97
28.	25	35	40	95	96	92
29.	30	20	50	98	96	93
30.	15	35	50	91	97	95

Задачи №31-60:

В целях изучения численности жителей в поселках городского типа проведено выборочное обследование 10 населенных пунктов, отобранных в случайном порядке. При этом получены следующие данные (x, тыс. чел): x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}.

По данным выборки определите:

1. Какое количество n поселков необходимо обследовать для того, чтобы ошибка при оценке генеральной средней не превышала бы $\Delta_{\bar{x}}$ с вероятностью P_1?

2. Установить с доверительной вероятностью P_2 пределы, в которых находится доля поселков в генеральной совокупности, имеющих численность населения ниже x_0 (тыс. чел) при условии, что эта доля в выборке объема n осталась прежней.

Таблица №2

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	$\Delta_{\bar{x}}$	P_1	x_0	P_2
31.	8	5	3	10	15	2	12	7	9	6	1	0,95	5	0,90
32.	8	10	5	9	17	12	15	6	3	18	1,5	0,97	8	0,85
33.	4	8	18	14	9	2	11	6	15	12	3	0,96	6	0,89
34.	8	11	17	6	10	3	14	12	15	4	1	0,94	8	0,87
35.	7	13	18	4	11	16	5	12	15	9	1,2	0,97	7	0,86
36.	6	9	16	3	7	10	11	13	8	4	1	0,95	6	0,90
37.	10	13	16	6	18	4	9	19	11	7	1,4	0,96	9	0,85
38.	5	11	16	2	9	14	3	10	13	7	1,2	0,93	5	0,87
39.	9	15	20	6	13	18	7	14	17	11	1,1	0,94	9	0,86
40.	4	7	16	2	9	1	10	12	6	13	3	0,96	6	0,89
41.	5	7	2	15	3	12	8	10	6	9	1	0,95	5	0,90
42.	8	11	7	14	4	16	2	17	9	5	1,4	0,94	5	0,84
43.	9	6	13	6	11	16	3	8	10	7	1	0,93	6	0,85
44.	9	11	16	6	10	18	13	7	4	19	1,5	0,96	9	0,86
45.	4	14	12	17	10	3	8	15	11	6	1	0,97	8	0,87
46.	6	8	3	16	4	13	9	11	7	10	1	0,95	6	0,90
47.	10	8	17	3	6	18	12	5	15	9	1,2	0,97	8	0,85
48.	9	12	15	18	7	11	4	13	16	5	1	0,93	9	0,89
49.	3	13	11	16	9	2	7	14	10	5	1	0,95	7	0,86
50.	11	8	15	6	13	18	5	10	12	9	1,1	0,94	8	0,87
51.	5	8	11	17	3	10	1	13	7	14	3	0,96	5	0,89
52.	11	13	18	8	12	20	15	9	6	21	1,6	0,93	11	0,85
53.	7	11	14	21	17	12	5	9	18	15	3	0,94	9	0,90

Продолжение таблицы №2

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	$\Delta_{\bar{x}}$	P_1	x_0	P_2
54.	9	12	8	15	5	17	3	18	10	6	1,3	0,97	8	0,86
55.	5	9	12	19	15	10	3	7	16	13	3	0,97	7	0,89
56.	10	16	8	21	7	14	19	15	18	12	1,3	0,93	10	0,87
57.	3	7	10	17	13	8	1	5	14	11	3	0,96	5	0,89
58.	9	12	14	19	6	10	13	16	11	7	1,1	0,95	10	0,85
59.	8	11	14	20	6	13	4	16	10	17	3	0,93	8	0,86
60.	6	12	4	17	3	10	15	11	14	8	1,1	0,94	6	0,87

Задачи №61-90:

Зависимость между стажем работы (x, лет) некоторой категории рабочих и производительностью их труда (y, ед. в смену) представлены в таблице №3.

Предполагая, что между переменными x и y существует линейная корреляционная зависимость, требуется:

1) вычислить коэффициент корреляции, сделать вывод о тесноте связи между стажем работы и производительностью труда; проверить значимость r_{xy} с помощью t-критерия Стьюдента;
2) составить уравнение прямой регрессии $\overline{y}(x) = ax + b$;
3) полученные данные изобразить графически и сделать прогноз о производительности труда рабочих, имеющих стаж x_a и x_b.

Таблица №3

№	x_1 / y_1	x_2 / y_2	x_3 / y_3	x_4 / y_4	x_5 / y_5	x_6 / y_6	x_7 / y_7	x_8 / y_8	x_9 / y_9	x_{10} / y_{10}	x_{11} / y_{11}	x_{12} / y_{12}	x_a	x_b
61.	1	3	5	6	8	10	12	13	14	15	17	21	7	25
	11	26	34	38	47	55	63	67	71	76	83	99		
62.	25	26	27	29	31	33	34	36	37	39	40	41	30	45
	33	33	30	28	26	23	23	19	18	16	14	12		
63.	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	18	5	20
	8	10	11	12	12	15	16	16	19	19	21	25		
64.	25	26	27	29	31	33	34	35	36	38	40	42	30	45
	56	54	54	49	46	42	40	39	37	34	30	27		

Продолжение таблицы №3

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_a	x_b
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}		
65.	2	4	6	7	9	11	13	14	15	16	18	22	8	25
	9	24	32	36	45	53	61	65	69	74	81	97		
66.	24	25	26	28	30	32	33	35	36	38	39	40	27	45
	35	35	32	30	28	25	25	21	20	18	16	14		
67.	4	5	7	8	9	11	12	13	15	16	17	19	10	20
	9	11	12	13	13	16	17	17	20	20	22	26		
68.	27	28	29	31	33	35	36	37	38	39	42	43	30	45
	54	52	51	47	44	40	40	37	35	32	30	25		
69.	3	5	7	8	10	12	14	15	16	17	19	23	9	25
	7	22	30	34	43	51	59	63	67	72	79	95		
70.	5	6	8	9	10	12	13	14	16	17	18	20	11	22
	10	12	13	14	14	17	18	18	21	21	23	27		
71.	23	24	25	27	28	30	31	33	34	35	36	37	26	40
	32	30	30	27	27	27	24	24	20	20	19	18		
72.	23	24	25	27	29	31	32	33	34	36	38	40	30	45
	52	50	49	45	40	40	35	35	33	30	25	20		
73.	4	6	8	9	11	13	15	16	17	18	20	24	10	25
	5	20	28	32	41	49	57	61	65	70	77	93		
74.	23	24	25	27	29	31	32	34	35	37	38	39	30	40
	37	37	34	32	30	27	27	23	22	20	18	16		
75.	6	7	9	10	11	13	14	15	17	18	19	21	12	25
	11	13	14	15	15	18	19	19	22	22	24	28		
76.	1	2	5	6	8	9	11	12	13	14	16	18	10	20
	11	14	26	29	36	40	48	50	55	58	65	73		
77.	20	21	22	25	26	27	28	29	30	31	33	35	24	36
	30	30	29	26	24	24	22	22	20	20	17	16		
78.	2	3	5	6	7	9	10	11	13	14	15	17	4	20
	7	9	10	11	11	14	15	15	18	18	20	24		
79.	26	27	28	30	32	34	35	36	37	39	41	43	29	45
	55	53	52	48	45	41	40	38	36	33	30	25		
80.	2	3	6	7	9	10	12	13	14	15	17	19	5	20
	9	12	24	27	34	38	46	48	53	56	63	71		
81.	21	22	23	26	27	28	29	30	31	32	34	36	25	40
	28	28	27	24	22	22	20	20	18	18	15	14		

Продолжение таблицы №3

82.	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	20	22	13	25
	12	14	15	16	16	19	20	20	23	23	25	29		
83.	24	25	26	28	31	32	33	34	35	37	40	41	30	45
	53	51	50	46	43	40	37	36	34	30	26	25		
84.	3	4	7	8	10	11	13	14	15	16	18	20	5	25
	7	10	22	25	32	36	44	46	51	54	61	69		
85.	22	23	24	27	28	29	30	31	32	33	35	37	25	40
	26	26	25	22	20	20	18	18	16	16	13	12		
86.	1	4	6	8	10	12	14	15	16	17	18	23	5	25
	7	14	18	22	26	31	35	37	40	41	44	54		
87.	28	29	31	32	34	36	37	38	39	41	43	45	30	40
	50	50	48	44	40	38	35	34	32	30	25	20		
88.	4	5	8	9	11	12	14	15	16	17	19	21	10	25
	5	8	20	23	30	34	42	44	49	52	59	67		
89.	23	24	25	28	29	30	31	32	33	34	36	38	35	40
	24	24	23	20	18	18	16	16	14	14	11	10		
90.	22	23	24	26	28	30	31	32	33	35	37	39	25	40
	57	55	54	50	47	44	40	40	38	35	30	28		

Рекомендуемая литература

1. Высшая математика для экономистов, под редакцией проф. Н.Ш. Кремера, М., Банки и бизнес, 1997 (и последующие издания), 439с.
2. Общий курс высшей математики для экономистов, под редакцией проф. В.И. Ермакова, М., Инфра-М, 2001, 656с.
3. Сборник задач по высшей математике для экономистов, под редакцией проф. В.И. Ермакова, М., Инфра-М, 2001, 575с.
4. Теория вероятностей и математическая статистика. Н.Ш. Кремер, М., ЮНИТИ, 2001, 450с.

Дополнительная литература

1. Краткий курс аналитической геометрии. Н.В. Ефимов, М., Наука, 1969, 580с.
2. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, Н.С. Пискунов, М., Наука – ФизМатЛит, 1997, т.I - 432с, т.II – 560с.
3. Теория вероятностей и математическая статистика, В.Е. Гмурман, М., Высшая школа, 1998, 479с.
4. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, В.Е. Гмурман, М., Высшая школа, 1998, 410с.

Таблица значений функции $\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-z^2/2}dz$ Приложение 1

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,00000	0,40	0,15542	0,80	0,28814	1,20	0,38493
0,01	0,00399	0,41	0,15910	0,81	0,29103	1,21	0,38686
0,02	0,00798	0,42	0,16276	0,82	0,29389	1,22	0,38877
0,03	0,01197	0,43	0,16640	0,83	0,29673	1,23	0,39065
0,04	0,01595	0,44	0,17003	0,84	0,29955	1,24	0,39251
0,05	0,01994	0,45	0,17364	0,85	0,30234	1,25	0,39435
0,06	0,02392	0,46	0,17724	0,86	0,30511	1,26	0,39617
0,07	0,02790	0,47	0,18082	0,87	0,30785	1,27	0,39796
0,08	0,03188	0,48	0,18439	0,88	0,31057	1,28	0,39973
0,09	0,03586	0,49	0,18793	0,89	0,31327	1,29	0,40147
0,10	0,03983	0,50	0,19146	0,90	0,31594	1,30	0,40320
0,11	0,04380	0,51	0,19497	0,91	0,31859	1,31	0,40490
0,12	0,04776	0,52	0,19847	0,92	0,32121	1,32	0,40658
0,13	0,05172	0,53	0,20194	0,93	0,32381	1,33	0,40824
0,14	0,05567	0,54	0,20540	0,94	0,32639	1,34	0,40988
0,15	0,05962	0,55	0,20884	0,95	0,32894	1,35	0,41149
0,16	0,06356	0,56	0,21226	0,96	0,33147	1,36	0,41308
0,17	0,06749	0,57	0,21566	0,97	0,33398	1,37	0,41466
0,18	0,07142	0,58	0,21904	0,98	0,33646	1,38	0,41621
0,19	0,07535	0,59	0,22240	0,99	0,33891	1,39	0,41774
0,20	0,07926	0,60	0,22575	1,00	0,34134	1,40	0,41924
0,21	0,08317	0,61	0,22907	1,01	0,34375	1,41	0,42073
0,22	0,08706	0,62	0,23237	1,02	0,34614	1,42	0,42220
0,23	0,09095	0,63	0,23565	1,03	0,34849	1,43	0,42364
0,24	0,09483	0,64	0,23891	1,04	0,35083	1,44	0,42507
0,25	0,09871	0,65	0,24215	1,05	0,35314	1,45	0,42647
0,26	0,10257	0,66	0,24537	1,06	0,35543	1,46	0,42785
0,27	0,10642	0,67	0,24857	1,07	0,35769	1,47	0,42922
0,28	0,11026	0,68	0,25175	1,08	0,35993	1,48	0,43056
0,29	0,11409	0,69	0,25490	1,09	0,36214	1,49	0,43189
0,30	0,11791	0,70	0,25804	1,10	0,36433	1,50	0,43319
0,31	0,12172	0,71	0,26115	1,11	0,36650	1,51	0,43448
0,32	0,12552	0,72	0,26424	1,12	0,36864	1,52	0,43574
0,33	0,12930	0,73	0,26730	1,13	0,37076	1,53	0,43699
0,34	0,13307	0,74	0,27035	1,14	0,37286	1,54	0,43822
0,35	0,13683	0,75	0,27337	1,15	0,37493	1,55	0,43943
0,36	0,14058	0,76	0,27637	1,16	0,37698	1,56	0,44062
0,37	0,14431	0,77	0,27935	1,17	0,37900	1,57	0,44179
0,38	0,14803	0,78	0,28230	1,18	0,38100	1,58	0,44295
0,39	0,15173	0,79	0,28524	1,19	0,38298	1,59	0,44408

Таблица значений функции $\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-z^2/2}dz$ Приложение 1

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
1,60	0,44520	2,00	0,47725	2,40	0,49180	2,80	0,49744
1,61	0,44630	2,01	0,47778	2,41	0,49202	2,81	0,49752
1,62	0,44738	2,02	0,47831	2,42	0,49224	2,82	0,49760
1,63	0,44845	2,03	0,47882	2,43	0,49245	2,83	0,49767
1,64	0,44950	2,04	0,47932	2,44	0,49266	2,84	0,49774
1,65	0,45053	2,05	0,47982	2,45	0,49286	2,85	0,49781
1,66	0,45154	2,06	0,48030	2,46	0,49305	2,86	0,49788
1,67	0,45254	2,07	0,48077	2,47	0,49324	2,87	0,49795
1,68	0,45352	2,08	0,48124	2,48	0,49343	2,88	0,49801
1,69	0,45449	2,09	0,48169	2,49	0,49361	2,89	0,49807
1,70	0,45543	2,10	0,48214	2,50	0,49379	2,90	0,49813
1,71	0,45637	2,11	0,48257	2,51	0,49396	2,91	0,49819
1,72	0,45728	2,12	0,48300	2,52	0,49413	2,92	0,49825
1,73	0,45818	2,13	0,48341	2,53	0,49430	2,93	0,49831
1,74	0,45907	2,14	0,48382	2,54	0,49446	2,94	0,49836
1,75	0,45994	2,15	0,48422	2,55	0,49461	2,95	0,49841
1,76	0,46080	2,16	0,48461	2,56	0,49477	2,96	0,49846
1,77	0,46164	2,17	0,48500	2,57	0,49492	2,97	0,49851
1,78	0,46246	2,18	0,48537	2,58	0,49506	2,98	0,49856
1,79	0,46327	2,19	0,48574	2,59	0,49520	2,99	0,49861
1,80	0,46407	2,20	0,48610	2,60	0,49534	3,00	0,49865
1,81	0,46485	2,21	0,48645	2,61	0,49547	3,01	0,49869
1,82	0,46562	2,22	0,48679	2,62	0,49560	3,02	0,49874
1,83	0,46638	2,23	0,48713	2,63	0,49573	3,03	0,49878
1,84	0,46712	2,24	0,48745	2,64	0,49585	3,04	0,49882
1,85	0,46784	2,25	0,48778	2,65	0,49598	3,05	0,49886
1,86	0,46856	2,26	0,48809	2,66	0,49609	3,06	0,49889
1,87	0,46926	2,27	0,48840	2,67	0,49621	3,07	0,49893
1,88	0,46995	2,28	0,48870	2,68	0,49632	3,08	0,49896
1,89	0,47062	2,29	0,48899	2,69	0,49643	3,09	0,49900
1,90	0,47128	2,30	0,48928	2,70	0,49653	3,10	0,49903
1,91	0,47193	2,31	0,48956	2,71	0,49664	3,11	0,49906
1,92	0,47257	2,32	0,48983	2,72	0,49674	3,12	0,49910
1,93	0,47320	2,33	0,49010	2,73	0,49683	3,13	0,49913
1,94	0,47381	2,34	0,49036	2,74	0,49693	3,14	0,49916
1,95	0,47441	2,35	0,49061	2,75	0,49702	3,15	0,49918
1,96	0,47500	2,36	0,49086	2,76	0,49711	3,16	0,49921
1,97	0,47558	2,37	0,49111	2,77	0,49720	3,17	0,49924
1,98	0,47615	2,38	0,49134	2,78	0,49728	3,18	0,49926
1,99	0,47670	2,39	0,49158	2,79	0,49736	3,19	0,49929

Таблица значений функции $\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}dz$ Приложение 1

x	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**
3,20	0,49931	3,40	0,49966	3,60	0,49984	3,80	0,49993
3,21	0,49934	3,41	0,49968	3,61	0,49985	3,81	0,49993
3,22	0,49936	3,42	0,49969	3,62	0,49985	3,82	0,49993
3,23	0,49938	3,43	0,49970	3,63	0,49986	3,83	0,49994
3,24	0,49940	3,44	0,49971	3,64	0,49986	3,84	0,49994
3,25	0,49942	3,45	0,49972	3,65	0,49987	3,85	0,49994
3,26	0,49944	3,46	0,49973	3,66	0,49987	3,86	0,49994
3,27	0,49946	3,47	0,49974	3,67	0,49988	3,87	0,49995
3,28	0,49948	3,48	0,49975	3,68	0,49988	3,88	0,49995
3,29	0,49950	3,49	0,49976	3,69	0,49989	3,89	0,49995
3,30	0,49952	3,50	0,49977	3,70	0,49989	3,90	0,49995
3,31	0,49953	3,51	0,49978	3,71	0,49990	3,91	0,49995
3,32	0,49955	3,52	0,49978	3,72	0,49990	3,92	0,49996
3,33	0,49957	3,53	0,49979	3,73	0,49990	3,93	0,49996
3,34	0,49958	3,54	0,49980	3,74	0,49991	3,94	0,49996
3,35	0,49960	3,55	0,49981	3,75	0,49991	3,95	0,49996
3,36	0,49961	3,56	0,49981	3,76	0,49992	3,96	0,49996
3,37	0,49962	3,57	0,49982	3,77	0,49992	3,97	0,49996
3,38	0,49964	3,58	0,49983	3,78	0,49992	3,98	0,49997
3,39	0,49965	3,59	0,49983	3,79	0,49992	3,99	0,49997