

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

федеральное образовательное учреждение высшего

профессионального образования

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

(МИИТ)

ОДОБРЕНО:

Кафедра «Высшая и
прикладная математика»

УТВЕРЖДЕНО:

Декан ф-та ТС

«__» _____ 2011г.

Составители: Блистанова Л.Д., д.ф.-м.н., проф., Голечков Ю.И., д.ф.-м.н.,
доц., Захарова М.В., к.ф.-м.н., доц., Сперанский Д.В., д.т.н., проф.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Задания на контрольные работы № 1 – 4

для студентов 1 курса заочной формы обучения направления
210700.62 – Инфокоммуникационные технологии и системы связи,
профиль – ИТ.

Москва 2011г.

Методические указания по выполнению контрольных работ

Задачи, включенные в контрольную работу, взяты из сборника задач, подготовленного коллективом преподавателей кафедры «Высшая и прикладная математика» РОАТ МГУПС. Все задачи имеют тройную нумерацию, которая включает номер раздела из сборника задач, уровень сложности задачи и порядковый номер задачи. Студент выполняет те задачи, последняя цифра которых совпадает с последней цифрой его учебного шифра. Например, студент, учебный шифр которого имеет последнюю цифру 9, в контрольной работе №1 решает задачи 4.1.9, 6.2.29, 6.3.19, 7.1.19, 7.1.49; в контрольной работе №2 – 7.2.29, 7.2.39, 7.2.59, 7.3.29; в контрольной работе №3 – 8.2.9, 8.2.29, 8.2.59, 8.2.79, 8.3.29; в контрольной работе №4 – 9.1.19, 9.1.49, 9.1.59, 9.3.49, 11.1.39.

Перед выполнением контрольной работы студент должен ознакомиться с содержанием разделов рабочей программы, на освоение которых ориентирована выполняемая контрольная работа. Необходимую учебную литературу студент может найти в рабочей программе (в программе указана как основная, так и дополнительная литература).

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради, на обложке которой должны быть указаны: дисциплина, номер контрольной работы, шифр студента, курс, фамилия, имя и отчество студента. На обложке вверху справа указывается фамилия и инициалы преподавателя-рецензента. В конце работы студент ставит свою подпись и дату выполнения работы.

В каждой задаче надо полностью выписать ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

Решение каждой задачи должно содержать подробные вычисления, пояснения, ответ, а также, в случае необходимости, и рисунки. После каждой задачи следует оставлять место для замечаний преподавателя-рецензента. В случае невыполнения этих требований преподаватель возвращает работу для доработки без ее проверки.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Введение в математический анализ.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Комплексные числа.

4.1.1–4.1.10. Дано комплексное число z . Записать число z в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Сделать чертеж.

4.1.1. $z = 2\sqrt{2}/(1+i)$.

4.1.2. $z = 4/(1+i\sqrt{3})$.

4.1.3. $z = -2\sqrt{2}/(1-i)$.

4.1.4. $z = -4/(1-i\sqrt{3})$.

4.1.5. $z = -2\sqrt{2}/(1+i)$.

4.1.6. $z = 2\sqrt{2}/(1-i)$.

4.1.7. $z = 4/(1-i\sqrt{3})$.

4.1.8. $z = -4/(\sqrt{3}-i)$.

4.1.9. $z = 1/(\sqrt{3}+i)$.

4.1.10. $z = 1/(\sqrt{3}-i)$.

6.2.21–6.2.30. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

6.2.21. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^4 - (x+2)^2}{(x+1)^2 - 3x^4}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{\frac{3+x}{x}}$.

6.2.22. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^2 + 3x^3}{x^3 - (2x-1)^2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3-x}{3+2x} \right)^{\frac{1+x}{x}}$.

6.2.23. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x}}$;

б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^4 - 3x^2 + 5}{1 + (2x^2 - 1)^2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2x}{1-3x} \right)^{\frac{1+x}{x}}$.

6.2.24. а) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+3)^2 + 5x}{(2x^2-1)^2 - 3x}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+7}{2x-3} \right)^{x+5}$.

6.2.25. а) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2-1)^3+1}{(x^2+2)^3-2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2+2} \right)^{x^2-7}$.

$$6.2.26. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{x - 16};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^3}{(x+1)^2 + x^3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+3x}{2-x} \right)^{\frac{2+x}{x}}.$$

$$6.2.27. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)^3 - 8}{(2x-1)^3 + 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 7}{2x^2 - 1} \right)^{x^2 + 3}.$$

$$6.2.28. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \arctg x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 + 6x^5}{5 - 4x^2 - 3x^5};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+3x}{2-x} \right)^{\frac{2+x}{x}}.$$

$$6.2.29. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{x - 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{\sin 2x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2-3)}{(2-x^2)(3x+1)};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-1}{x^3+1} \right)^{x^3+2}.$$

$$6.2.30. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x} - \sqrt{2}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{x^2 - \pi^2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 5}{x^2 - 3x^3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7+x}{7-2x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

6.3.11–6.3.20. Задана функция $y=f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать схематический чертеж.

$$6.3.11. \quad f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1; \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1; \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$6.3.12. \quad f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1; \\ x^2 + 1, & -1 < x \leq 1; \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$$

$$6.3.13. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2; \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$6.3.14. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0; \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1; \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$6.3.15. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 2; \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

$$6.3.16. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi; \\ x-2, & x > \pi. \end{cases}$$

$$6.3.17. f(x) = \begin{cases} -(x+1), & x \leq -1; \\ (x+1)^2, & -1 < x \leq 0; \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

$$6.3.18. f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leq \pi/4; \\ 2, & x > \pi/4. \end{cases}$$

$$6.3.19. f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0; \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1; \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

$$6.3.20. f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0; \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 4; \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

7.1.11–7.1.20. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций.

$$7.1.11. \text{ а) } y = x^2 \sin 3x; \quad \text{ б) } \begin{cases} y = t + \operatorname{arctg} 2t, \\ x = t^3 - 6 \operatorname{arccctg} t \end{cases} \quad \text{при } t = 1;$$

$$\text{ в) } y = (\operatorname{tg} x^3)^{\ln 4x}.$$

$$7.1.12. \text{ а) } y = x^3 \ln 4x; \quad \text{ б) } \begin{cases} y = 3t - \operatorname{arctg} t^2, \\ x = t^4 + \operatorname{arccctg} t \end{cases} \quad \text{при } t = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } y = (\cos 2x)^{\sin 3x}.$$

$$7.1.13. \text{ а) } y = x^4 \operatorname{tg} 2x; \quad \text{б) } \begin{cases} y = t^3 + \operatorname{arctg} 3t, \\ x = \frac{1}{3}t - \operatorname{arccctg} 3t \end{cases} \text{ при } t = \frac{1}{3};$$

$$\text{в) } y = (\cos x^5)^{\sin 3x}.$$

$$7.1.14. \text{ а) } y = x^5 e^{4x}; \quad \text{б) } \begin{cases} y = t - 65 \operatorname{arctg} t^3, \\ x = t^2 + \operatorname{arccctg} t \end{cases} \text{ при } t = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } y = (\cos 2x)^{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$7.1.15. \text{ а) } y = x^4 \operatorname{ctg} 5x; \quad \text{б) } \begin{cases} y = t^5 + \ln 25t, \\ x = \frac{1}{4}t - \arccos 3t \end{cases} \text{ при } t = \frac{1}{5};$$

$$\text{в) } y = (\sin x^7)^{\sin 4x}.$$

$$7.1.16. \text{ а) } y = x^3 \sin 5x; \quad \text{б) } \begin{cases} y = t + \operatorname{arctg} 3t, \\ x = t^2 - 2 \operatorname{arccctg} t \end{cases} \text{ при } t = 1;$$

$$\text{в) } y = (\cos 3x)^{\sin 2x}.$$

$$7.1.17. \text{ а) } y = x^4 \ln 7x; \quad \text{б) } \begin{cases} y = 7t - \operatorname{arctg} t^3, \\ x = t^5 + \operatorname{arccctg} t \end{cases} \text{ при } t = 2;$$

$$\text{в) } y = (\cos 5x)^{\sin 7x}.$$

$$7.1.18. \text{ а) } y = x^5 \operatorname{tg} 4x; \quad \text{б) } \begin{cases} y = t^5 + \operatorname{arctg} 4t, \\ x = \frac{5}{16}t - \operatorname{arccctg} 4t \end{cases} \text{ при } t = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } y = (\cos x^4)^{\sin 8x}.$$

$$7.1.19. \text{ а) } y = x^6 e^{5x}; \quad \text{б) } \begin{cases} y = t - 17 \operatorname{arctg} t^2, \\ x = \frac{1}{20}t^5 + \operatorname{arccctg} t \end{cases} \text{ при } t = 2;$$

$$\text{в) } y = (\cos 4x)^{\operatorname{tg} 6x}.$$

$$7.1.20. \text{ а) } y = x^7 \operatorname{ctg} 10x; \quad \text{б) } \begin{cases} y = t^2 - \arcsin 5t, \\ x = \frac{2}{25}t + \arccos 5t \end{cases} \text{ при } t = \frac{1}{25};$$

$$\text{в) } y = (\sin x^2)^{\sin 7x}.$$

7.1.41–7.1.50. Найти пределы функции, применяя правило Лопиталья.

$$7.1.41. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x}.$$

$$7.1.42. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

$$7.1.43. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{\ln(1 - 2x)}.$$

$$7.1.44. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\ln x}.$$

$$7.1.45. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

$$7.1.46. \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln x.$$

$$7.1.47. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right).$$

$$7.1.48. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{2x}}.$$

$$7.1.49. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1 + x)}{e^x - 1}.$$

$$7.1.50. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1 - x)}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Производная и ее приложения

7.2.21–7.2.30. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций: а) $y = f(x)$;

б) $x = \varphi(t), y = \psi(t)$.

$$7.2.21. \quad \text{а) } y = x/(x^2 - 1); \quad \text{б) } x = \cos(t/2), \quad y = t - \sin t.$$

$$7.2.22. \quad \text{а) } y = \ln \operatorname{ctg} 2x; \quad \text{б) } x = t^3 + 8t, \quad y = t^5 + 2t.$$

$$7.2.23. \quad \text{а) } y = x^3 \ln x; \quad \text{б) } x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$$

$$7.2.24. \quad \text{а) } y = x \operatorname{arctg} x; \quad \text{б) } x = e^{2t}, \quad y = \cos t.$$

$$7.2.25. \quad \text{а) } y = \operatorname{arctg} x; \quad \text{б) } x = 3\cos^2 t, \quad y = 3\sin^3 t.$$

$$7.2.26. \quad \text{а) } y = e^{\operatorname{ctg} 3x}; \quad \text{б) } x = 3\cos t, \quad y = 4\sin^2 t.$$

$$7.2.27. \quad \text{а) } y = e^x \cos x; \quad \text{б) } x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2.$$

$$7.2.28. \quad \text{а) } y = e^{-x} \sin x; \quad \text{б) } x = 2t - t^3, \quad y = 2t^2.$$

$$7.2.29. \quad \text{а) } y = x\sqrt{1 + x^2}; \quad \text{б) } x = t + \ln \cos t, \quad y = t - \ln \sin t.$$

$$7.2.30. \quad \text{а) } y = xe^{-x^2}; \quad \text{б) } x = \ln t, \quad y = (1/2)(t + 1/t).$$

7.2.31–7.2.40. Применяя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа к функции $f(x) = e^x$, вычислить значение e^a с точностью 0,001.

7.2.31. $a = 0,49$. 7.2.32. $a = 0,33$. 7.2.33. $a = 0,75$.

7.2.34. $a = 0,63$. 7.2.35. $a = 0,21$. 7.2.36. $a = 0,55$.

7.2.37. $a = 0,37$. 7.2.38. $a = 0,83$. 7.2.39. $a = 0,13$.

7.2.40. $a = 0,59$.

7.2.51–7.2.60. Подобрать соответствующую функцию и найти ее экстремум.

7.2.51. Требуется изготовить из жести ведро цилиндрической формы без крышки данного объема V . Каковы должны быть высота и радиус его дна, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество жести ?

7.2.52. Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиуса R , вращается вокруг прямой, которая проходит через его вершину параллельно основанию. Какова должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объем?

7.2.53. Прямоугольник вписан в эллипс с осями $2a$ и $2b$. Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей ?

7.2.54. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R ?

7.2.55. Найти радиус основания и высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R ?

7.2.56. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность ?

7.2.57. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен a . При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света ?

7.2.58. В точках A и B , расстояние между которыми равно a , находятся источники света соответственно с силами F_1 и F_2 . На отрезке AB найти наименее освещенную точку M_0 .

Замечание. Освещенность точки источником света силой F обратно пропорциональна квадрату расстояния r ее от источника света:
 $E = kF / r^2, k = \text{const}.$

7.2.59. Из круглого бревна, диаметр которого равен d , требуется вырезать балку прямоугольного поперечного сечения. Каковы должны быть ширина и высота этого сечения, чтобы балка наибольшее сопротивление на изгиб?

Замечание. Сопротивление балки на изгиб пропорционально произведению ширины x ее поперечного сечения на квадрат его высоты y :
 $Q = kxy^2, k = \text{const}.$

7.2.60. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема V . Стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление дна бака, равна p_1 руб., а стенок – p_2 руб. Каковы должны быть радиус дна и высота бака, чтобы затраты на материал для его изготовления были наименьшими?

7.3.21–7.3.30. Методами дифференциального исчисления: а) исследовать функцию $y = f(x)$ для $\forall x \in R$ и по результатам исследования построить ее график; б) Найти наименьшее и наибольшее значения заданной функции на отрезке $[a; b]$.

7.3.21. а) $y = \frac{4x}{4 + x^2},$ б) $[-3; 3].$

7.3.22. а) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$ б) $[-1; 1].$

7.3.23. а) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1},$ б) $[-2; 2].$

$$7.3.24. \quad \text{a) } y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}, \quad \text{б) } [-2; 2].$$

$$7.3.25. \quad \text{a) } y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}, \quad \text{б) } [1; 4].$$

$$7.3.26. \quad \text{a) } y = (x - 1)e^{3x+1}, \quad \text{б) } [0; 1].$$

$$7.3.27. \quad \text{a) } y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad \text{б) } [1; 9].$$

$$7.3.28. \quad \text{a) } y = e^{\frac{1}{2-x}}, \quad \text{б) } [-1; 1].$$

$$7.3.29. \quad \text{a) } y = xe^{-x^2}, \quad \text{б) } [-2; 2].$$

$$7.3.30. \quad \text{a) } y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 9}, \quad \text{б) } [-2; 2].$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Неопределенный и определенный интегралы

8.2.1–8.2.10. Найти неопределенные интегралы. В п. а) и б) результаты проверить дифференцированием.

$$8.2.1. \quad \text{a) } \int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx; \quad \text{б) } \int \arctg \sqrt{x} dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{x^3 + 8}; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$$

$$8.2.2. \quad \text{a) } \int \frac{x dx}{(x^2 + 4)^6}; \quad \text{б) } \int e^x \ln(1 + 3e^x) dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 1} dx; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}.$$

$$8.2.3. \quad \text{a) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^8}}; \quad \text{б) } \int x 3^x dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{(3x - 7) dx}{x^3 + 4x^2 + 4x + 16}; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{(x+3)^2}}.$$

$$8.2.4. \quad \text{a) } \int \frac{dx}{\cos^2 x (3 \operatorname{tg} x + 1)}; \quad \text{б) } \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$$

$$\begin{array}{ll}
\text{B)} \int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}; & \text{Г)} \int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx. \\
8.2.5. \text{ а)} \int \frac{\cos 3x dx}{4 + \sin 3x}; & \text{б)} \int x^2 e^{3x} dx; \\
\text{B)} \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}; & \text{Г)} \int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x}. \\
8.2.6. \text{ а)} \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}; & \text{б)} \int x \arcsin \frac{1}{x} dx; \\
\text{B)} \int \frac{(x+3) dx}{x^3 + x^2 - 2x}; & \text{Г)} \int \frac{(\sqrt[4]{x} + 1) dx}{(\sqrt{x} + 4)\sqrt[4]{x^3}}. \\
8.2.7. \text{ а)} \int \frac{(x + \operatorname{arctg} x) dx}{1 + x^2}; & \text{б)} \int x \ln(x^2 + 1) dx; \\
\text{B)} \int \frac{(x^2 - 3) dx}{x^4 + 5x^2 + 6}; & \text{Г)} \int \frac{\sqrt{x+5} dx}{1 + \sqrt[3]{x+5}}. \\
8.2.8. \text{ а)} \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx; & \text{б)} \int x \sin x \cos x dx; \\
\text{B)} \int \frac{x^2 dx}{x^4 - 81}; & \text{Г)} \int \frac{dx}{3 \cos x + 4 \sin x}. \\
8.2.9. \text{ а)} \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3 + 2 \cos x}}; & \text{б)} x^2 \sin 4x dx; \\
\text{B)} \int \frac{(x^2 - x + 1) dx}{x^4 + 2x^2 - 3}; & \text{Г)} \int \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[6]{x} + 1) dx}{\sqrt[3]{x^2}}. \\
8.2.10. \text{ а)} \int \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x}}{x} dx; & \text{б)} \int x \ln^2 x dx; \\
\text{B)} \int \frac{(x^2 - 6) dx}{x^4 + 6x^2 + 8}; & \text{Г)} \int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 2}.
\end{array}$$

8.2.21–8.2.30. Вычислить определенные интегралы.

$$8.2.21. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$$

$$8.2.22. \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$$

$$8.2.23. \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$8.2.24. \int_0^1 \frac{5x+1}{x^2+2x+1} dx.$$

$$8.2.25. \int_0^{\pi} \sin 2x \cos^2 x dx. \quad 8.2.26. \int_1^2 \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$8.2.27. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}. \quad 8.2.28. \int_0^1 x \ln(1+x) dx.$$

$$8.2.29. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}. \quad 8.2.30. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

8.2.51–8.2.60. Найти площадь области, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

$$8.2.51. y^2 = 9 - 3x; x - y + 3 = 0. \quad 8.2.52. y = 2x - x^2 + 3; y = x^2 - 4x + 3.$$

$$8.2.53. x = 4 - y^2; x = y^2 - 2y. \quad 8.2.54. y = x^2; y = \frac{x^3}{3}.$$

$$8.2.55. xy = 4; x + y - 5 = 0. \quad 8.2.56. y = x^2 - 3x; y = 0.$$

$$8.2.57. y = 4x - x^2; y = 0. \quad 8.2.58. y = -x^2 + 5x - 6; y = 0.$$

$$8.2.59. y = -x^2; x + y + 2 = 0. \quad 8.2.60. y^2 = 9 - 3x; x = 0.$$

8.2.71–8.2.80. Решить указанные задачи с помощью определенного интеграла.

8.2.71. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=3x+7$.

8.2.72. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) и осью Ox .

8.2.73. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 3(1+\cos \varphi)$.

8.2.74. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $r=4\sin 2\varphi$.

8.2.75. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

8.2.76. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной полуэллипсом $y=3\sqrt{1-x^2}$, параболой $x=\sqrt{1-y}$ и осью Oy .

8.2.77. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y=2/(1+x^2)$ и $y=x^2$.

8.2.78. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2; 0)$ до точки $B(6; 8)$.

8.2.79. Вычислить длину кардиоиды $r=3(1-\cos \varphi)$.

8.2.80. Вычислить длину одной арки циклоиды $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

8.3.21–8.3.30. Исследовать интеграл на сходимость.

$$8.3.21. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$8.3.22. \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$8.3.23. \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

$$8.3.24. \int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$8.3.25. \int_1^{\infty} e^{-x} \cdot x dx.$$

$$8.3.26. \int_1^{\infty} e^{-x} \cdot x dx.$$

$$8.3.27. \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

$$8.3.28. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}.$$

$$8.3.29. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$8.3.30. \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+4}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Функции нескольких переменных. Кратные интегралы.

Ряды.

9.1.11–9.1.20. Найти производные функции двух переменных.

$$9.1.11. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z = u \sin(u+v), \text{ где } u = \frac{y}{x}, \quad v = 3x - y.$$

$$9.1.12. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z^2 x^3 y - zy - x + y + 1 = 0.$$

$$9.1.13. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z = v \lg(u-v), \text{ где } u = y^2 - x^2, \quad v = x\sqrt{y}.$$

$$9.1.14. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z = v \cos(u-v), \text{ где } u = y + x^2, \quad v = xy.$$

$$9.1.15. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } ye^{\frac{z^2}{x}} - z^3 y + x - 2y - 10 = 0.$$

$$9.1.16. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z = u \sin(u^2 - v^2), \text{ где } u = x^2 + y^2, \quad v = x - 2y.$$

$$9.1.17. \frac{dz}{dx}, \text{ если } z = \sqrt{u} \sin(u - v^2), \text{ где } u = e^{2x}, \quad v = 2x \ln x.$$

$$9.1.18. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } xe^{\frac{x+y}{z}} - xyz - 10x + z^2 - 2 = 0.$$

$$9.1.19. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z = 2u \sin\left(\frac{u}{u+v}\right), \text{ где } u = e^{x-y}, \quad v = \frac{y}{x}.$$

$$9.1.20. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z = u^2 \sqrt[3]{u-v} \text{ где } u = x+2y, \quad v = xy.$$

9.1.41–9.1.50. Дана функция $z = f(x, y)$. Показать, что

$$F\left(x; y; z; \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

$$9.1.41. z = y/(x^2 - y^2)^5; \quad F = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2}.$$

$$9.1.42. z = y^2/(3x) + \arcsin(xy); \quad F = x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2.$$

$$9.1.43. z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1); \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$9.1.44. z = e^{xy}; \quad F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz.$$

$$9.1.45. z = \ln(x + e^{-y}); \quad F = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$9.1.46. z = x/y; \quad F = x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$9.1.47. z = x^y; \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x}.$$

$$9.1.48. z = x e^{y/x}; \quad F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$9.1.49. z = \sin(x + ay); \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$9.1.50. z = \cos y + (y - x) \sin y; \quad F = (x - y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}.$$

9.1.51–9.1.60. Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле для двойного интеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ и изменить порядок интегрирования.

- 9.1.51. $D: y=0; \quad y=x^2; \quad y=2-x.$
 9.1.52. $D: y=2x; \quad y=2(x-2)^2; \quad y=0.$
 9.1.53. $D: y=2-(x-1)^2; \quad y=1-x.$
 9.1.54. $D: y^2=x; \quad x+y-2=0.$
 9.1.55. $D: y=0; \quad y=(x+1)^2; \quad y=(x-1)^2.$
 9.1.56. $D: y^2=x; \quad x=(y-2)^2; \quad x=0.$
 9.1.57. $D: y^2=x; \quad x=(y-2)^2; \quad y=0.$
 9.1.58. $D: y=1-x^2; \quad y=1-(x-2)^2; \quad y=1.$
 9.1.59. $D: y=1-x^2; \quad y=1-(x-2)^2; \quad y=0,5.$
 9.1.60. $D: y=(x+2)^2; \quad y=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}; \quad y=0.$

9.3.41–9.3.50. Найти величину и направление наибыстрейшего изменения функции $U(x,y,z)$ в точке M_0 .

- 9.3.41. $U(x,y,z)=2x^2y+2xy^2-12xy+3z^2-6\ln z, \quad M_0(2;3;1).$
 9.3.42. $U(x,y,z)=x^3y-4x^2+\sqrt{y^3z}+5y+z, \quad M_0(1;4;4).$
 9.3.43. $U(x,y,z)=z^3+(x+2y)^2+2xy-3yz-14z, \quad M_0(2;-1;2).$
 9.3.44. $U(x,y,z)=x^2y^2z+2\operatorname{arccctg}\frac{y}{x}-2x, \quad M_0(-1;1;-1).$
 9.3.45. $U(x,y,z)=3x^2+2y^2+z^2+yz-8x-2y+3z, \quad M_0(1;1;1).$
 9.3.46. $U(x,y,z)=2x^2+3xz+2y+4z-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}, \quad M_0(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3}).$
 9.3.47. $U(x,y,z)=(x+y)^2+xyz+\frac{z^2}{2}, \quad M_0(1;1;-2).$
 9.3.48. $U(x,y,z)=x^2z^2+3x^2z+xy^2+5y^2z^2+2x, \quad M_0(2;1;0).$
 9.3.49. $U(x,y,z)=\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+2\sqrt{xz}-2x+12\ln z, \quad M_0(1;4;9).$
 9.3.50. $U(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2+xy+2yz+2xz+5z, \quad M_0(-2;-6;3).$

11.1.31–11.1.50. Выяснить, для каких рядов выполняется необходимое условие сходимости?

- 11.1.31. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-10n+3}{7n^2-3n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2n-4n^2}{5n^3-4n+2}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-2n}{1-3n+7n^3}$
 11.1.32. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3-2n^2+1}{4n^2+5n+2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4}{3+2n-5n^4}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7-5n}{3n^2+4n-2}$
 11.1.33. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-5}{7-4n+2n^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n-10}{2-4n^3}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-3n-4n^2}{2n^3+3n^2+5}$
 11.1.34. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-7n+3}{2-3n-3n^3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-2n^2}{7n^2-3n+4}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-5n}{2n^3-2n+1}$

$$\begin{array}{lll}
11.1.35. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-4n-5n^2}{3n^4+2n+1} & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-3n^2}{2n+7} & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+2n+3}{7n-5n^4} \\
11.1.36. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-5n+4n^2}{3-2n^3+4n} & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{5-2n} & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-3n+2}{5n-3n^2+11} \\
11.1.37. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-3n+n^3}{4n^3-7n+8} & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-5n^2+1}{3n^3-2n^2+3} & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+2n+1}{3-7n} \\
11.1.38. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-2n+8n^2}{3n^3-5n+2} & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n-5n^2}{2n^2+4n+1} & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+3n}{3-4n+8n^3} \\
11.1.39. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{3-5n^2+8n^3} & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-n^2}{5n^3-3n+7} & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-7n-8n^2}{3-7n^2+8n} \\
11.1.40. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-3n^2+7n}{4-3n+5n^3} & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+7n^2-3n}{2-5n} & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-3n^3}{4n^2+5n+3}
\end{array}$$