ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

СЕВЕРСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Утверждаю
Зав.кафедрой ВМ
Профессор
________________ Н.И. Федосов
«____»______________2010 г.

И.Л. Фаустова

Интегрирование функции одной переменной
Контрольная работа

Практическое руководство

Северск 2010

УДК 517.
ББК _____
Ф 517

Фаустова И.Л. Интегрирование функции одной переменной. Контрольная работа: практическое руководство. – Северск: Изд-во СТИ НИЯУ МИФИ, 2010. – 39 с.

В данном руководстве рассматривается раздел интегрального исчисления для функций одной переменной. Руководство содержит рекомендации для студентов и нацелено на оказание помощи студентам при выполнении ими контрольной работы и индивидуальных заданий по данной части курса высшей математики. Все задания разбиты на варианты, позволяющие осуществить индивидуальный подход к проверке качества знаний студентов.

Руководство предназначено для студентов первого курса СТИ НИЯУ МИФИ, очной, очно-заочной и заочной форм обучения специальностей 140604 («Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов»), 140306 («Электроника и автоматика физических установок»), 240801 («Машины и аппараты химических производств»), 250900 («Химическая технология материалов современной энергетики»), 140211 («Электроснабжение»), 220301 («Автоматизация технологических процессов и производств в ядерно-химической отрасли»).

Руководство одобрено на заседании кафедры высшей математики (протокол № 3 от " 23 " марта 2010 г.).

Печатается в соответствии с планом выпуска учебно – методической литературы на 2010 г., утвержденным Советом СТИ НИЯУ МИФИ.

Рег.№ 19/10 от « 13 » 05.2010 г.

Рецензент И.В. Карелина–доцент кафедры ВМ СТИ НИЯУ МИФИ, канд.физ.–мат. наук

Редактор Р.В. Фирсова

Подписано к печати "___"________ Формат 60x84/32
Гарнитура Times New Roman. Бумага писчая № 2.
Плоская печать. Усл.печ.л. 1,78 Уч.изд.л. 2,3
Тираж 50 экз. Заказ ______
Отпечатано в ИПО СТИ НИЯУ МИФИ
636036 Томская обл., г. Северск,
пр. Коммунистический, 65

Содержание

1 Содержание теоретической части

1.1 Неопределенный интеграл

1.1.1 Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов.

1.1.2 Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной в неопределенном интеграле, интегрирование по частям.

1.1.3 Рациональные функции. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших. Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных функций.

1.1.4 Интегрирование простейших иррациональных функций, дифференциального бинома. Тригонометрические подстановки. Другие методы интегрирования иррациональных выражений.

1.1.5 Интегрирование тригонометрических функций.

1.2 Определенный интеграл

1.2.1 Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле.

1.2.2 Несобственные интегралы.

1.2.3 Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат, случай параметрического задания границы криволинейной трапеции, вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат; нахождение длины дуги кривой; вычисление объема тела по площадям параллельных сечений, нахождение объема тела вращения.

2 Методические указания к выполнению контрольной работы «Интегрирование функции одной переменной»

Основной задачей дифференциального исчисления является определение для заданной функции $F(x)$ ее производной $F'(x) = f(x)$ или ее дифференциала $F'(x)dx = f(x)dx$. Обратная задача, состоящая в определении функции $F(x)$ по ее известным производной $f(x)$ или дифференциалу $f(x)dx$, представляет собой основную задачу интегрального исчисления. Операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратные.

Функцию $F(x)$ называют первообразной для $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, если для любого $x \in [a, b]$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$, где C - произвольная постоянная величина, также является первообразной функции $f(x)$. Таким образом, если $f(x)$ имеет первообразную, то она имеет их бесчисленное множество, причем все они отличаются одна от другой только постоянным слагаемым.

Совокупность первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.

По определению: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Свойства неопределенного интеграла:

1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$,

2) $\int dF(x) = F(x) + C$,

3) $\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx$, где $k - const.$

4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$,

5) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(U)dU = F(U) + C$, где $U(x) -$ непрерывно дифференцируемая функция.

Различают следующие методы интегрирования:

1) непосредственное интегрирование;

2) метод замены переменной (интегрирование подведением под знак дифференциала, метод подстановки);

3) интегрирование по частям.

Непосредственное интегрирование заключается в прямом использовании таблицы интегралов:

1) $\int dx = x + C,$

2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $\qquad n \neq -1,$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,$ $\qquad x \neq 0,$

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$ $\qquad a > 0,\ a \neq 1,$

5) $\int e^x dx = e^x + C,$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

7) $\int \cos x dx = \sin x + C,$

8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$ $\qquad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,$

9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$ $\qquad x \neq \pi n,$

10) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C,$ $\qquad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,$

11) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C,$ $\qquad x \neq \pi n,$

12) $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C,$ $\qquad |x| \neq |a|,$

13) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C,$ $\qquad |x| \neq |a|,$

14) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C,$ $\qquad a \neq 0,$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad |x| < |a|,$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C, \quad |x| > |a|,$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C,$

18) $\int \mathrm{sh}x\,dx = \mathrm{ch}x + C,$

19) $\int \mathrm{ch}x\,dx = \mathrm{sh}x + C,$

20) $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C,$

21) $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}x + C.$

Метод подстановки заключается в том, что x заменяют на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, и получают

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt,$$

причем после интегрирования возвращаются к старой переменной обратной подстановкой $t = \varphi^{-1}(x)$.

Указанную формулу применяют также и в обратном направлении:

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \int f(x)dx, \text{ где } x = \varphi(t).$$

Формулой интегрирования по частям называется формула:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

где u и v – непрерывно дифференцируемые функции от x.

Для применения этой формулы подынтегральное выражение следует представить в виде произведения одной функции на дифференциал другой функции. Если под интегралом стоит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на алгебраическую, то за u обычно принимают не алгебраическую функцию. Если же под интегралом стоит произведение тригонометрической или показательной функции на алгебраическую, то за u обычно принимают алгебраическую функцию.

Задача 1 - Найти интегралы:

а) $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx$,

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$,

в) $\int x \,\mathrm{arctg}\, x\, dx$,

г) $\int \frac{8x^3 - 12x^2 + 2x + 10}{(x+3)(x-1)^3}\, dx$,

д) $\int \sqrt{16 - x^2}\, dx$,

е) $\int \sin 7x \cos 2x\, dx$.

Решение –

а) $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}\, x - x + C$,

б) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}} = \left| \begin{array}{l} u^2 = 3x+1,\ x = \dfrac{u^2-1}{3} \\ 2udu = 3dx,\ dx = \dfrac{2}{3}udu \end{array} \right| = 2\int \frac{du}{u^2-1} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+1}\right| + C,$$

в) $$\int x\,\mathrm{arctg}\, x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{arctg}\, x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\, dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{1+x^2})\, dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x + C,$$

следующие три примера – из темы «Основные классы интегрируемых функций»:

г) $\int \frac{8x^3 - 12x^2 + 2x + 10}{(x+3)(x-1)^3}\,dx =$

$$= \left| \begin{array}{lcl} \dfrac{8x^3 - 12x^2 + 2x + 10}{(x+3)(x-1)^3} & = & \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2} + \dfrac{D}{(x-1)^3} \\ \text{правильная рац.дробь} & & \text{сумма простейших дробей} \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} A(x-1)^3 + B(x-1)^2(x+3) + C(x-1)(x+3) + D(x+3) = 8x^3 - 12x^2 + 2x + 10 \\ \begin{array}{r|ccc} x=1 & 4D = 8 & \Rightarrow & D = 2 \\ x=-3 & -64A = -320 & \Rightarrow & A = 5 \\ x^3 & A + B = 8 & \Rightarrow & B = 3 \\ x^0 & -A + 3B - 3C + 3D = 10 & \Rightarrow & C = 0 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(\frac{5}{x+3} + \frac{3}{x-1} + \frac{0}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}\right) dx = 5\ln|x+3| + 3\ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)^2} + C,$$

д) $\int \sqrt{16 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = 4\sin t \\ dx = 4\cos t\,dt \end{array} \right| = 4\int \sqrt{16 - 16\sin^2 t}\,\cos t\,dt = 16\int \cos^2 t\,dt =$

$= 8\int (1 + \cos 2t)\,dt = 8(t + \frac{\sin 2t}{2}) + C,$ где $t = \arcsin \frac{x}{4}$,

е) при вычислении интегралов от произведений тригонометрических функций различных аргументов следует использовать формулы:

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

$$\int \sin 7x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin 9x)\,dx = -\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos 9x}{18} + C.$$

Связь определенного и неопределенного интегралов наглядно демонстрирует формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(x)\,\Big|_a^b \;=\; F(b) - F(a)\,,$$

где $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$.

Все методы неопределенного интегрирования можно с определенными оговорками перенести на случай определенного интегрирования.

Задача 2 – Вычислить определенный интеграл

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$$

Решение –

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\,\Big|_e^{e^2} = \ln\left|\ln e^2\right| - \ln|\ln e| = \ln 2\,.$$

Задача 3 – Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx\,.$$

Решение –

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{2}e^{-2x})\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{2}e^{-2b}) + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Задача 4 – Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y_1 = x^2/4\,, \quad y_2 = 8/(x^2+4)\,.$$

Решение – площадь фигуры находится по формуле:

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx\,.$$

Найдем сначала абсциссы точек A и C пересечения кривых, показанных на рисунке 1.

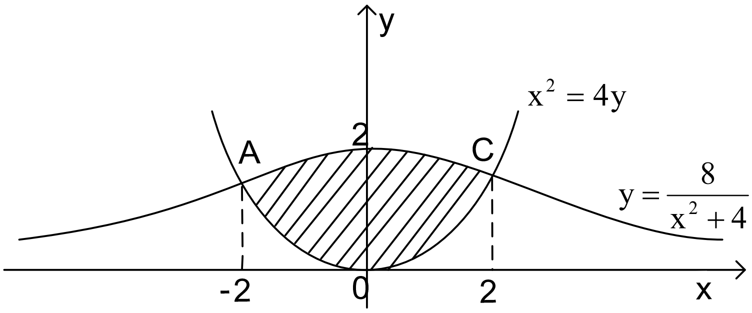

Рисунок 1

Для этого исключим y из системы уравнений: $\begin{cases} y = x^2/4, \\ y = 8/(x^2+4), \end{cases}$ откуда $8/(x^2+4) = x^2/4$ или $x^4 + 4x^2 - 32 = 0$. Действительными корнями этого уравнения являются точки $x = -2$ и $x = 2$.

Следовательно,

$$S = \int_{-2}^{2} \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left(4 arctg \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right) \Bigg|_{-2}^{2} = 2\pi - \frac{4}{3} \ (ед.^2).$$

Задача 5 – Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

$$r = \sqrt{3}\sin\varphi, \ r = 1+\cos\varphi.$$

Решение – площадь фигуры в полярной системе координат вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Найдем сначала точки пересечения окружности $r = \sqrt{3}\sin\varphi$ и кардиоиды $r = 1+\cos\varphi$, показанных на рисунке 2.

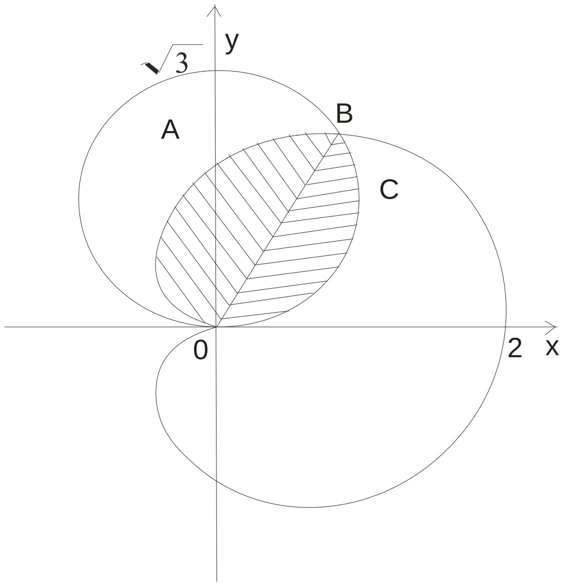

Рисунок 2

Для этого решим систему: $\begin{cases} r = \sqrt{3}\sin\varphi\,,\ 0 \le \varphi \le \pi \\ r = 1+\cos\varphi\,, \end{cases}$ откуда $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \pi$. Искомая площадь равна сумме двух площадей, одна из которых представляет круговой сегмент, а другая – сегмент кардиоиды, причем сегменты примыкают друг к другу по лучу $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Дуга *BAO* описывается концом полярного радиуса r кардиоиды при изменении полярного угла φ от $\dfrac{\pi}{3}$ до π, а дуга *OCB* – концом полярного радиуса r окружности при $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

Поэтому,

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3} 3\sin^2\varphi\, d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/3}^{\pi} (1+\cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{3}{4}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/3} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_{\pi/3}^{\pi} = \frac{3}{4}(\pi - \sqrt{3})\ \ (ed.^2)\,.$$

Задача 6 – Вычислить длину дуги кривой:

$$y^2 = (x-1)^3, \quad 2 \le x \le 5.$$

Решение – длина дуги кривой $y = f(x)$ в декартовой системе координат находится по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$$

Так как $y'(x) = \dfrac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}$, то $\sqrt{1 + (y'(x))^2} = \sqrt{1 + \dfrac{9}{4}(x-1)} = \sqrt{\dfrac{9}{4}x - \dfrac{5}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{9x-5}$.

Следовательно,

$$l = \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{9x-5}\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\int_2^5 \sqrt{9x-5}\, d(9x-5) = \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}(9x-5)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^5 =$$

$$= \frac{1}{27}\left(40^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}}\right) \approx 7{,}63(ед.).$$

Задача 7 – Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y_1 = 2\sqrt{x}$, $y_2 = 1$, $x = 0$. Ось вращения – Ox.

Решение – объем тела вычисляется по формуле:

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b (y_2{}^2(x) - y_1{}^2(x))\, dx.$$

Пределы интегрирования находим из равенств:

$$2\sqrt{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4},$$
$$2\sqrt{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Следовательно,

$$V_{Ox} = \pi\int_0^{\frac{1}{4}} (1-4x)\, dx = \pi(x - 2x^2)\Big|_0^{1/4} = \frac{\pi}{8}(ед.^3).$$

3 Варианты контрольной работы 1

Вариант 1

1) Найти интегралы:

а) $\int \sin x \cos x\, dx$, Ответ: $-\frac{1}{4}\cos 2x + C$.

б) $\int \sqrt{e^x - 1}\, dx$, Ответ: $2\sqrt{e^x - 1} - 2arctg\sqrt{e^x - 1} + C$.

в) $\int x^2 \sin x\, dx$, Ответ: $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$.

г) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+4x+5)}$,

Ответ: $\frac{1}{10}\ln|x-1| - \frac{1}{20}\ln(x^2+4x+5) + \frac{7}{10}arctg(x+2) + C$.

д) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+6x-7}}$,

Ответ: $\sqrt{x^2+6x-7} - 3\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x-7}\right| + C$.

е) $\int \sin 3x \sin 2x\, dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}\, dx$. Ответ: 2,5.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$. Ответ: $\frac{1}{8}$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = (x-2)^3$, $y = 4x - 8$. Ответ: $S = 8$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

r = 4cos3φ, r = 2 (r ≥ 2). Ответ: $S = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3} = 7{,}6529$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

y = lnx, $\sqrt{3} \le$ x $\le \sqrt{15}$. Ответ: $l = 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{9}{5} = 2{,}2939$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: y = $-x^2$ + 5x – 6, y = 0. Ось вращения – Ox.

Ответ: $V = \frac{\pi}{30} = 0{,}1047$.

Вариант 2

1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x}}$, Ответ: $-\frac{2}{\sqrt{1-x}}+C$.

б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$, Ответ: $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)+C$.

в) $\int x^2e^x dx$, Ответ: $e^x(x^2-2x+2)+C$.

г) $\int \frac{dx}{x^2(x-20)}$, Ответ: $-\frac{1}{400}\ln|x|+\frac{1}{400}\ln|x-20|+\frac{1}{20x}+C$.

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, Ответ: $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$.

е) $\int \cos^2 5xdx$. Ответ: $\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}\sin 10x+C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int\limits_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^2}$. Ответ: $\frac{4}{15}=0{,}2667$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$. Ответ: $\frac{\pi}{2}=1{,}5708$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y=x\sqrt{9-x^2}$, $y=0$ $(0\le x\le 3)$. Ответ: $S=9$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах:

r = cos2φ. Ответ: $S=\frac{\pi}{2}=1{,}5708$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$, $1\le x\le 2$. Ответ: $l=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2=1{,}0966$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $2x-x^2-y=0$, $2x^2-4x+y=0$. Ось вращения – Ox.

Ответ: $V=\frac{16\pi}{5}=10{,}0531$

Вариант 3

1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{1+\cos^2 2x}{1+\cos 4x}dx$, Ответ: $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}tg 2x + C$.

б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}-1}$, Ответ: $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+(x+1)+C$.

в) $\int \ln^2 x dx$, Ответ: $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$.

г) $\int \frac{dx}{x^3-8}$,

Ответ: $\frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{24}\ln(x^2+2x+4) - \frac{\sqrt{3}}{12} arctg \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$.

д) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$, Ответ: $-ctg(\arcsin x) - \arcsin x + C$.

е) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$. Ответ: $-\frac{2}{tg\frac{x}{2}+1}+C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int\limits_0^1 \frac{4arctgx - x}{1+x^2}dx$. Ответ: $\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\ln 2 = 0{,}8871$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int\limits_0^\infty x\sin x\, dx$. Ответ: интеграл расходится.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$. Ответ: $S = 9$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

$r = \sqrt{3}\cos\varphi$, $r = \sin\varphi$, $(0 \le \varphi \le \pi/2)$.

Ответ: $S = \frac{5\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}2215$

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, $0 \le x \le 7/9$. Ответ: $l = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}9428$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y = 3\sin x$, $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$. Ось вращения – Ox.

Ответ: $V = 4\pi^2 = 39{,}4784$.

Вариант 4

1) Найти интегралы:

а) $\int \cos^2 3x dx$, Ответ: $\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x+C$.

б) $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$, Ответ: $2arctg\sqrt{1+x}+C$.

в) $\int x^2 e^{-x} dx$, Ответ: $e^{-x}(-x^2-2x-2)+C$.

г) $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+6x+9)}$, Ответ: $\ln|x+2|-\ln|x+3|+\frac{1}{x+3}+C$.

д) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-8x+32}}$,

Ответ: $\sqrt{x^2-8x+32}+3\ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+32}\right|+C$.

е) $\int \sin 5x \sin x dx$. Ответ: $\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 6x+C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2+4}$. Ответ: $2-2\ln 2=0{,}6137$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int_2^\infty \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$. Ответ: 1.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y=\sin x\cos^2 x$, $y=0$ $(0\le x\le \pi/2)$ Ответ: $S=\frac{1}{3}=0{,}3333$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

$r=4\sin 3\varphi$, $r=2$ $(r\ge 2)$. Ответ: $S=\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}=7{,}6529$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y=\ln\frac{5}{2x}$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$. Ответ: $l=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}=1{,}2027$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y=5\cos x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x\ge 0$. Ось вращения – Ox.

Ответ: $V=6\pi^2=59{,}2176$.

Вариант 5

1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{1-\sin 4xdx}{\sin 2x-\cos 2x}dx$, Ответ: $-\frac{\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}+C$.

б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$, Ответ: $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1+x}+C$.

в) $\int x^2 \ln^2 xdx$, Ответ: $\frac{x^3\ln^2 x}{3}-\frac{2x^3\ln x}{9}+\frac{2}{27}x^3+C$.

г) $\int \frac{18}{x(x^2+6x+18)}dx$,

Ответ: $\ln|x|-0{,}5\ln\left|x^2+6x+18\right|-arctg\frac{x+3}{3}+C$.

д) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x}+1}$, Ответ: $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-x+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{4}}-4\ln|x^{\frac{1}{4}}+1|+C$.

е) $\int \cos^3 x\,dx$. Ответ: $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$. Ответ: $\ln 2=0{,}6931$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^3}$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln 2=0{,}34655$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$. Ответ: $S=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=1{,}9132$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

$r=2\cos\varphi$, $r=2\sqrt{3}\sin\varphi$, $(0\le\varphi\le\pi/2)$. Ответ: $S=\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}=0{,}8859$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y=-\ln\cos x$, $0\le x\le\pi/6$. Ответ: $l=\frac{1}{2}\ln 3=0{,}5493$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y=\sin^2 x$, $x=\pi/2$, $y=0$. Ось вращения – Ох.

Ответ: $V=\frac{3\pi^2}{16}=1{,}8505$.

Вариант 6

1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{1+\sin^2 2x}{1-\cos 4x} dx$, Ответ: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} ctg 2x + C$.

б) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$, Ответ: $2\sqrt{x+1} - 2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + C$.

в) $\int (x^2+1)\cos 2x \, dx$, Ответ: $\frac{x^2+1}{2}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{\sin 2x}{4} + C$.

г) $\int \frac{11-5x-x^2}{(x+1)(x^2-4x+10)} dx$,

Ответ: $\ln|x+1| - \ln(x^2-4x+10) - \frac{3}{\sqrt{6}} arctg \frac{x-2}{\sqrt{6}} + C$.

д) $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$, Ответ: $2\arcsin\frac{x}{2} + \sin(2\arcsin\frac{x}{2}) + C$.

е) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\cos^2 x}$. Ответ: $0{,}5\ln|tgx-2| - 0{,}25\ln\left|tg^2 x - 4\right| + C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} dx$. Ответ: $-\frac{17}{18} = -0{,}9444$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$. Ответ: 0,25.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = x^2\sqrt{4-x^2}$, $y = 0$ $(0 \le x \le 2)$. Ответ: $S = \pi = 3{,}1416$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах:

r = sin3φ. Ответ: $S = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y = e^x + 6$, $\ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}$. Ответ: $l = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{6}{5} = 1{,}0912$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $x = \sqrt[3]{y-2}$, $x = 1$, $y = 1$. Ось вращения – Ox.

Ответ: $V = \frac{19\pi}{7} = 19{,}7471$.

Вариант 7

1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$, Ответ: $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$.

б) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$, Ответ: $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\ln|(x+1)^{\frac{1}{3}}+1|+C$.

в) $\int x^2\cdot 3^{-x}dx$, Ответ: $-x^2\frac{3^{-x}}{\ln 3}+\frac{2}{\ln 3}(\frac{-x3^{-x}}{\ln 3}-\frac{3^{-x}}{\ln^2 3})+C$.

г) $\int \frac{dx}{x^2(x+4)}$, Ответ: $-\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{4x}+\frac{1}{16}\ln|x+4|+C$.

д) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$, Ответ: $\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{1}{6}}+\frac{2}{3\sqrt{3}}arctg(\sqrt{3}x^{\frac{1}{6}})+C$.

е) $\int \cos 3x\sin^2 3x\,dx$. Ответ: $\frac{1}{9}\sin^3 3x+C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int_0^{1/2}\frac{8x-arctg2x}{1+4x^2}dx$. Ответ: $\ln 2-\frac{\pi^2}{64}=0{,}5389$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+x)}$. Ответ: $1-\ln 2=0{,}3069$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y=\cos x\sin^2 x$, $y=0$ $(0\le x\le \pi/2)$. Ответ: $S=\frac{1}{3}=0{,}3333$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

r = 6sin3φ, r = 3 (r ≥ 3). Ответ: $S=3\pi+\frac{9}{2}\sqrt{3}=17{,}219$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$, $1/4\le x\le 1$. Ответ: $l=1$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y=xe^x$, $y=0$, $x=1$. Ось вращения – Ox.

Ответ: $V=\frac{\pi}{4}(e^2-1)$.

Вариант 8

1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\sin x + 1} dx$, Ответ: $\frac{3}{2}x + \cos x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

б) $\int \frac{dx}{a + \sqrt{x}}$, Ответ: $2\sqrt{x} - 2a\ln\left|\sqrt{x} + a\right| + C$.

в) $\int (x^2 + 1) \cdot e^{-2x} dx$, Ответ: $-\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$.

г) $\int \frac{-x^2 + 7x - 8}{(x+2)(x^2 - 2x + 5)} dx$,

Ответ: $-2\ln|x + 2| + 0{,}5\ln(x^2 - 2x + 5) + arctg\frac{x-1}{2} + C$.

д) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 16}}$, Ответ: $\frac{1}{16}\sqrt{\frac{x^2 - 16}{x^2}} + C$.

е) $\int \cos x \cos 5x\, dx$. Ответ: $\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx$. Ответ: $\frac{1}{3} = 0{,}3333$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$. Ответ: $\pi = 3{,}1416$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 2$. Ответ: $S = 2 - \frac{\pi}{2} = 0{,}4292$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах:

r = cos3φ. Ответ: $S = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y = \ln(x^2 - 1)$, $2 \le x \le 3$. Ответ: $l = 1 + \ln\frac{3}{2} = 1{,}4055$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$, $x = 0$. Ось вращения – Ox.

Ответ: $V = \frac{9\pi}{5} = 5{,}6548$.

Вариант 9

1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}}$, Ответ: $\frac{1}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C$.

б) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$, Ответ: $\frac{1}{15}(3x+1)^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$.

в) $\int (x-1)\cdot \ln^2 x dx$, Ответ: $\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln^2 x-\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\ln x+\frac{x^2}{4}-2x+C$.

г) $\int \frac{4dx}{x(x^2+4x+4)}$, Ответ: $\ln|x|-\ln|x+2|+\frac{2}{x+2}+C$.

д) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x-21}}$, Ответ: $\sqrt{x^2+2x-2}-2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-2}\right|+C$.

е) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt{1+2x}}$.

Ответ: $\frac{3}{2}(1+2x)^{\frac{1}{3}}+3(1+2x)^{\frac{1}{6}}+3\ln|(1+2x)^{\frac{1}{6}}+1|+C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$. Ответ: $\frac{\pi}{8}=0{,}3927$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x)^6}$. Ответ: $\frac{1}{30}=0{,}0333$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $y=0$, $x=1$, $x=\mathrm{e}^3$. Ответ: $S=2$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

$r=\cos\varphi$, $r=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4)$, $(-\pi/4\le\varphi\le\pi/2)$. Ответ: $S=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}=0{,}5354$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$, $0\le x\le 8/9$. Ответ: $l=\frac{4\sqrt{2}}{3}=1{,}8856$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y=2x-x^2$, $y=-x+2$. Ось вращения – Ox.

Ответ: $V=\frac{\pi}{5}=0{,}6283$.

Вариант 10

1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{\cos^4 x - 1}{\cos^2 x + 1} dx$, Ответ: $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

б) $\int \sqrt{e^{2x} - 4} dx$, Ответ: $\sqrt{e^{2x} - 4} - 2arctg \frac{\sqrt{e^{2x} - 4}}{2} + C$.

в) $\int (x+1)^2 \cos x dx$, Ответ: $(x+1)^2 \sin x + 2(x+1)\cos x - 2\sin x + C$.

г) $\int \frac{4x^2 + 8}{x(x^2 + 4x + 8)} dx$,

Ответ: $\ln|x| + 1{,}5\ln(x^2 + 4x + 8) - 5arctg \frac{x+2}{2} + C$.

д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 9}}$, Ответ: $\frac{1}{3} arctg \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3} + C$.

е) $\int (3 + \sin x) \cos^2 x \, dx$. Ответ: $\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\sin 2x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$. Ответ: $1 + 0{,}5\ln 1{,}5 = 1{,}2027$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^6}$. Ответ: 0,2.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = \arccos x$, $y = 0$, $x = 0$. Ответ: $S = 1$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

$r = \sin\varphi$, $r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4)$, $(0 \le \varphi \le 3\pi/4)$. Ответ: $S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} = 0{,}5354$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y = \ln(1 - x^2)$, $0 \le x \le 1/4$. Ответ: $l = -\frac{1}{4} + \ln\frac{5}{3} = 0{,}2608$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Ось вращения – Ox.

Ответ: $V = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) = 10{,}0359$.

Вариант 11

1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{6x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 3x - 5}{x^2} dx$, Ответ: $2x^3 - 4x^2 - 4x + 3\ln|x| + \frac{5}{x} + C$.

б) $\int x\sqrt{x-4}\, dx$, Ответ: $\frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}} + C$.

в) $\int e^x \cdot \sin\frac{x}{2} dx$, Ответ: $\frac{4e^x \sin\frac{x}{2} - 2e^x \cos\frac{x}{2}}{5} + C$.

г) $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x-1)}$, Ответ: $\frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + C$.

д) $\int \frac{x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}{x + \sqrt[3]{x^4}} dx$, Ответ: $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6\ln|x^{\frac{1}{3}} + 1| + 6arctgx^{\frac{1}{6}} + C$.

е) $\int \cos^3 2x dx$. Ответ: $\frac{1}{2}(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3}) + C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx$. Ответ: $1 + 0,5\ln\frac{2}{3} = 0,7973$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^7}$. Ответ: $\frac{1}{6} = 0,1666$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = (x+1)^2$, $y^2 = x + 1$. Ответ: $S = \frac{1}{3} = 0,3333$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

$r = 6\cos 3\varphi$, $r = 3$ $(r \geq 3)$. Ответ: $S = 3\pi + \frac{9}{2}\sqrt{3} = 17,219$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y = 2 + \text{ch}\, x$, $0 \leq x \leq 1$. Ответ: $l = \frac{e^2 - 1}{2e} = 1,1752$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^2$, $y^2 - x = 0$. Ось вращения – Ох.

Ответ: $V = \frac{3\pi}{10} = 0,9425$.

Вариант 12

1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{9x^5 + 12x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 2}{x^3} dx$,

Ответ: $3x^3 + 6x^2 - 6x + 7\ln|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+13}}$, Ответ: $\sqrt{2x+13} + C$.

в) $\int e^{3x} \sin x dx$, Ответ: $\frac{3e^{3x}\sin x - e^{3x}\cos x}{10} + C$.

г) $\int \frac{(x+1)dx}{x(x^2+2x+5)}$,

Ответ: $0{,}2\ln|x| - 0{,}1\ln(x^2 + 2x + 5) + 0{,}4 arctg \frac{x+1}{2} + C$.

д) $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$, Ответ: $\frac{1}{a^2} tg(\arcsin \frac{x}{a}) + C$.

е) $\int \cos 2x \cos 3x dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{arctgx + x}{1+x^2} dx$. Ответ: $\ln 2 + \frac{\pi^2}{18} = 1{,}2415$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^3)^2}$. Ответ: $\frac{1}{3} = 0{,}3333$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$. Ответ: $S = 9$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах:

r = 1/2 + sinφ. Ответ: $S = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{3} = 2{,}0844$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y = 1 - \ln\cos x$, $0 \le x \le \pi/6$. Ответ: $l = \frac{1}{2}\ln 3 = 0{,}5493$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $x^2 + (y - 2)^2 = 1$. Ось вращения – Ох.

Ответ: $V = 4\pi^2 = 39{,}4784$.

Вариант 13

1) Найти интегралы:

а) $\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}+\frac{5}{x^6}\right)dx$, Ответ: $-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}+C$.

б) $\int\frac{x}{\sqrt{4x+9}}\,dx$, Ответ: $\frac{1}{24}(4x+9)^{\frac{3}{2}}-\frac{9}{8}(4x+9)^{\frac{1}{2}}+C$.

в) $\int 4^x\cos x\,dx$, Ответ: $\frac{4^x\sin x+4^x\ln 4\cos x}{1+\ln^2 4}+C$.

г) $\int\frac{4x+3}{x(x^2+4x+4)}\,dx$, Ответ: $\frac{3}{4}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|-\frac{5}{2(x+2)}+C$.

д) $\int\frac{x\,dx}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/3}}$,

Ответ: $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}-(x+1)+\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}+C$.

е) $\int(2+\cos x+\cos^2 x)\cos x\,dx$.

Ответ: $2\sin x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x-(arctgx)^4}{1+x^2}dx$. Ответ: $\ln 2-0{,}2\left(\frac{\pi}{3}\right)^5=0{,}4413$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int\limits_0^{\infty}\frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+1)^3}$. Ответ: 0,25.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y=x\sqrt{36-x^2}$, $y=0$ $(0\le x\le 6)$. Ответ: $S=72$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

r = cosφ, r = sinφ, (0 ≤ φ ≤ π/2). Ответ: $S=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}=0{,}1427$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y = e^x + 13$, $\ln\sqrt{15}\le x\le\ln\sqrt{24}$. Ответ: $l=1+0{,}5\ln\frac{10}{9}=1{,}0527$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = \sqrt{y-2}$, $x = 1$. Ось вращения – Ох.

Ответ: $V=5\pi=15{,}708$.

Вариант 14

1) Найти интегралы:

а) $\int\left(\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^5}+\frac{6}{x^7}\right)dx$, Ответ: $-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^6}+C$.

б) $\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$, Ответ: $\frac{1}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}}+C$.

в) $\int 3^x\cos 2x\,dx$, Ответ: $\frac{3^x(2\sin 2x+\ln 3\cos 2x)}{4+\ln^2 3}+C$.

г) $\int\frac{3x^2-9x+19}{(x-1)(x^2-8x+20)}dx$,

Ответ: $\ln|x-1|+\ln(x^2-8x+20)+4{,}5arctg\frac{x-4}{2}+C$.

д) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$, Ответ: $\frac{1}{a}arctg\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+C$.

е) $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$. Ответ: $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{tg\frac{x}{2}+2}\right|+C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int\limits_0^1\frac{x^3}{x^2+1}dx$. Ответ: $0{,}5-0{,}5\ln 2=0{,}1534$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int\limits_0^\infty\frac{x^2dx}{(x+1)^8}$. Ответ: $\frac{1}{105}=0{,}0095$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$x=\arccos y,\quad x=0,\quad y=0.$ Ответ: $S=1$

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

$\mathrm{r}=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4)$, $\mathrm{r}=\sqrt{2}\sin(\varphi-\pi/4)$, ($\pi/4\le\varphi\le 3\pi/4$).

Ответ: $S=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=0{,}2854$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y=-\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$, $0\le x\le 1/4$. Ответ: $l=1$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y=x^2,\quad y=1,\quad x=2.$ Ось вращения – Ох.

Ответ: $V=\frac{26\pi}{5}=16{,}3363$.

Вариант 15

1) Найти интегралы:

а) $\int (\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}})\, dx$, Ответ: $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 6\sqrt{x} + C$.

б) $\int x^2 \sqrt{x^3 - 7}\, dx$, Ответ: $\frac{2}{9}(x^3 - 7)^{\frac{3}{2}} + C$.

в) $\int e^{2x} \sin 3x\, dx$, Ответ: $\frac{2e^{2x} \sin 3x - 3e^{2x} \cos 3x}{13} + C$.

г) $\int \frac{4dx}{(x+3)(x^2 + 5x + 6)}$, Ответ: $4\ln|x+2| - 4\ln|x+3| + \frac{4}{x+3} + C$.

д) $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx$, Ответ: $-\arcsin\frac{x}{3} - ctg(\arcsin\frac{x}{3}) + C$.

е) $\int \sin 3x \cos 3x\, dx$. Ответ: $-\frac{\cos 6x}{12} + C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int\limits_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$. Ответ: $\frac{4}{3} = 1{,}3333$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int\limits_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{(x+1)^{10}}$. Ответ: $\frac{1}{630} = 0{,}0016$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = x \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = \sqrt{3}$. Ответ: $S = \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}2284$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

$r = \cos\varphi$, $r = 2\cos\varphi$. Ответ: $S = \frac{3\pi}{4} = 2{,}3562$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y = 2 - e^x$, $\ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}$. Ответ: $l = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} = 1{,}2027$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$. Ось вращения – Ох.

Ответ: $V = \frac{5\pi}{14} = 1{,}122$.

Вариант 16

1) Найти интегралы:

а) $\int(\sqrt{x^5}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})\,dx$, Ответ: $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+C$.

б) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, Ответ: $\frac{\arcsin^2 x}{2}+C$.

в) $\int e^{3x}\sin x\,dx$, Ответ: $\frac{3e^{3x}\sin x-e^{3x}\cos x}{10}+C$.

г) $\int\frac{dx}{(x-2)(x^2-2x+1)}$, Ответ: $\ln|x-2|-\ln|x-1|+\frac{4}{x-1}+C$.

д) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$,

Ответ: $\sqrt{x^2-4x+5}+2\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+C$.

е) $\int\frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{6(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2})}$.

Ответ: $-\frac{1}{4}x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}-\ln|x^{\frac{1}{6}}-1|+C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int_1^3\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$. Ответ: $\frac{\pi}{6}-\ln 2=-0{,}1695$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2}$. Ответ: $\frac{\pi}{2}=1{,}5708$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y=x^2\sqrt{8-x^2}$, $y=0$ $(0\le x\le 2\sqrt{2})$. Ответ: $S=4\pi=12{,}5664$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

r = sinφ, r = 2sinφ. Ответ: $S=\frac{3\pi}{4}=2{,}3562$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le 15/16$. Ответ: $l=\frac{3\sqrt{2}}{2}=2{,}1213$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y=\sin(\pi x/2)$, $y=x^2$. Ось вращения – Ох.

Ответ: $V=0{,}3\pi=0{,}942$.

Вариант 17

1) Найти интегралы:

а) $\int (2+\sqrt{x})^3\, dx$, Ответ: $8x+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+8x^{\frac{3}{2}}+3x^2+C$.

б) $\int (x-3)\sqrt{x-4}\, dx$, Ответ: $\frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}+C$.

в) $\int e^x \sin 5x\, dx$, Ответ: $\frac{e^x \sin 5x - 5e^x \cos 5x}{26}+C$.

г) $\int \frac{dx}{x(x^2+4x+10)}$,

Ответ: $\frac{1}{10}\ln|x|-\frac{1}{20}\ln(x^2+4x+10)-\frac{1}{5\sqrt{6}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C$.

д) $\int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}}$, Ответ: $\frac{1}{9}tg(\arcsin\frac{x}{3})+C$.

е) $\int \cos 5x \cdot \sin 8x\, dx$. Ответ: $-\frac{\cos 3x}{6}-\frac{\cos 13x}{26}+C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}=0{,}2027$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Ответ: $\pi=3{,}1416$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$x=\sqrt{e^y-1}$, $x=0$, $y=\ln 2$. Ответ: $S=2-\frac{\pi}{2}=0{,}4292$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах:

$r=1+\sqrt{2}\cos\varphi$. Ответ: $S=\pi+3=6{,}1416$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y=1-\ln\sin x$, $\pi/3 \le x \le \pi/2$. Ответ: $l=\frac{1}{2}\ln 3=0{,}5493$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y=\arcos(x/3)$, $y=\arccos x$, $y=0$. Ось вращения – Oy.

Ответ: $V=2\pi^2=19{,}7392$.

Вариант 18

1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{(1-\sqrt{x})^3}{x}dx$, Ответ: $\ln|x| - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} + 3x + C$.

б) $\int x(\sqrt{1-x^2})^3\, dx$, Ответ: $-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} + C$.

в) $\int e^x \cdot \cos 4x\, dx$, Ответ: $\frac{4e^x \sin 4x + e^x \cos 4x}{17} + C$.

г) $\int \frac{dx}{x^3(x+1)}$, Ответ: $\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \ln|x+1| + C$.

д) $\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{x^2+10x+24}}$,

Ответ: $2\sqrt{x^2+10x+24} - 10\ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x+24}\right| + C$.

е) $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$. Ответ: $\frac{2}{\sqrt{7}} arctg \frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}} + C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$. Ответ: 1,5.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{1+x^2}$. Ответ: $\frac{\pi^2}{8} = 1{,}2337$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = x\sqrt{4-x^2}$, $y = 0$ $(0 \le x \le 2)$. Ответ: $S = \frac{8}{3} = 2{,}6667$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах:

r = 1/2 + cosφ. Ответ: $S = \frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} = 2{,}0844$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y = 1 - \ln(x^2 - 1)$, $3 \le x \le 4$. Ответ: $l = 1 + \ln\frac{6}{5} = 1{,}1823$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y = \arcsin(x/5)$, $y = \arcsin x$, $y = \pi/2$. Ось вращения – Оу.

Ответ: $V = 6\pi^2 = 59{,}2176$.

Вариант 19

1) Найти интегралы:

а) $\int 2^x(1+\frac{2^{-x}}{\sqrt[4]{x^3}})\,dx$, Ответ: $\frac{2^x}{\ln 2}+4x^{\frac{1}{4}}+C$.

б) $\int x\sqrt{8-2x^2}\,dx$, Ответ: $-\frac{1}{6}(8-2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$.

в) $\int 9^{\frac{x}{2}}\sin 3x\,dx$, Ответ: $\frac{9^{\frac{x}{2}}(\ln 9\sin 3x-3\cos 3x)}{9+\ln^2 9}+C$.

г) $\int\frac{2x^2+2x+7}{(x-1)(x^2+4x+6)}\,dx$,

Ответ: $\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+6)-\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{2}}+C$.

д) $\int\frac{dx}{8x\sqrt{x^2-4}}$, Ответ: $\frac{1}{16}\arccos\frac{2}{x}+C$.

е) $\int(\sin x+\cos x)\sin^2 x\,dx$. Ответ: $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Ответ: $\frac{\pi}{12}=0{,}2618$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\operatorname{arctg}x\,dx}{1+x^2}$. Ответ: $\frac{\pi^2}{8}=1{,}2337$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y=x/(1+\sqrt{x})$, $y=0$, $x=1$. Ответ: $S=\frac{5}{3}-2\ln 2=0{,}2804$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах:

$r=1+\sqrt{2}\sin\varphi$. Ответ: $S=\pi+3=6{,}1416$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y=\sqrt{x-x^2}$ -arccos$\sqrt{x}$+5, $1/9\le x\le 1$. Ответ: $l=\frac{4}{3}=1{,}3333$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y=x^2$, $x=2$, $y=0$. Ось вращения – Оу.

Ответ: $V=8\pi=25{,}1327$.

Вариант 20

1) Найти интегралы:

а) $\int e^x (5 - \frac{3e^{-x}}{x^4})\, dx$, Ответ: $5e^x + \frac{1}{x^3} + C$.

б) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{4 - x^2}}$, Ответ: $-\sqrt{4 - x^2} + C$.

в) $\int e^{\frac{x}{3}} \cdot \sin 2x dx$, Ответ: $\frac{3e^{\frac{x}{3}} \sin 2x - 18e^{\frac{x}{3}} \cos 2x}{37} + C$.

г) $\int \frac{4x + 32}{x(x^2 + 8x + 16)} dx$, Ответ: $2\ln|x| - 2\ln|x + 4| + \frac{4}{x + 4} + C$.

д) $\int \frac{(x + 1)dx}{\sqrt{2x^2 + 4x + 7}}$, Ответ: $0{,}5\sqrt{2x^2 + 4x + 7} + C$.

е) $\int \cos ax \cos bx\, dx$.

Ответ: $\frac{1}{2(a + b)} \sin(a + b)x + \frac{1}{2(a - b)} \sin(a - b)x + C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx$. Ответ: $0{,}5e^2 + 0{,}5 = 4{,}1945$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int_0^\infty e^{-x} \sin x\, dx$. Ответ: 0,5.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = 1/(1 + \cos x)$, $y = 0$, $x = \pi/2$, $x = -\pi/2$. Ответ: $S = 2$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

$r = (5/2)\sin\varphi$, $r = (3/2)\sin\varphi$. Ответ: $S = \pi = 3{,}1416$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1$, $0 \le x \le 9/16$. Ответ: $l = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$. Ось вращения – Oy.

Ответ: $V = \frac{5\pi}{6} = 2{,}618$.

Вариант 21

1) Найти интегралы:

а) $\int (\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})^2\, dx$, Ответ: $x + \cos x + C$.

б) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{9 - x^2}}$, Ответ: $-\sqrt{9 - x^2} + C$.

в) $\int x \operatorname{arctg} 4x\, dx$, Ответ: $\frac{x^2}{2} arctg 4x - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32} arctg 4x + C$.

г) $\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 4}\, dx$, Ответ: $\frac{x^2}{2} - x + 9\ln|x + 4| + C$.

д) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, Ответ: $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\sin(2\arcsin\frac{x}{a}) + C$.

е) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 2}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}} arctg \frac{\sqrt{2} tgx}{\sqrt{5}} + C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$. Ответ: $0{,}5\ln(3 + 2\sqrt{3}) - 0{,}5\ln 3 = 0{,}3838$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$. Ответ: 1,5.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$x = (y - 2)^3$, $x = 4y - 8$. Ответ: $S = 8$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

r = (3/2)cosφ, r = (5/2)cosφ. Ответ: $S = \pi = 3{,}1416$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y = \ln\sin x$, $\pi/3 \le x \le \pi/2$. Ответ: $l = \frac{1}{2}\ln 3 = 0{,}5493$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0{,}5$. Ось вращения – Оу.

Ответ: $V = \frac{97\pi}{60} = 5{,}0789$.

Вариант 22

1) Найти интегралы:

а) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$, Ответ: $\frac{1}{2}(x - \sin x) + C$.

б) $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$, Ответ: $\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$.

в) $\int x^5 e^{-x^3}\, dx$, Ответ: $-\frac{1}{3}x^3 e^{-x^3} - \frac{1}{3}e^{-x^3} + C$.

г) $\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x-5} dx$, Ответ: $\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x-5| + C$.

д) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2 + 6x + 6}}$,

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right| + C$.

е) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x - \cos^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}tgx - 1}{\sqrt{2}tgx + 1}\right| + C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int\limits_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2}$. Ответ: $0{,}5\ln 2 - 0{,}25 = 0{,}0966$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$. Ответ: интеграл расходится.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = \cos^5 x \sin 2x$, $y = 0$ $(0 \le x \le \pi/2)$. Ответ: $S = \frac{2}{7} = 0{,}2857$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах:

r = 4cos4φ. Ответ: $S = 8\pi = 25{,}1327$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y = \ln 7 - \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$. Ответ: $l = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} = 1{,}2027$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$. Ось вращения – Oy.

Ответ: $V = \pi(4\ln 2 - 1{,}5) = 3{,}9979$.

Вариант 23

1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{5-4\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$, Ответ: $-5ctgx+4\cos x+C$.

б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$, Ответ: $\sqrt{1+x^2}+C$.

в) $\int (x^2-2x+3)\sin x\,dx$,

Ответ: $-(x^2-2x+3)\cos x+2(x-1)\sin x+2\cos x+C$.

г) $\int \frac{x^4+5}{x^2+1}dx$, Ответ: $\frac{x^3}{3}-x+6arctgx+C$.

д) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$, Ответ: $-\sqrt{3+2x-x^2}+\arcsin\frac{x-1}{2}+c$.

е) $\int \sin 5x\sin 2x\,dx$. Ответ: $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x+C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}\,x\ln\cos x dx$. Ответ: $-0{,}125\ln^2 2=-0{,}0601$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$. Ответ: $\pi=3{,}1416$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y=\frac{x}{(x^2+1)^2}$, $y=0$, $x=1$. Ответ: $S=0{,}25$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах:

r = sin6φ. Ответ: $S=\frac{\pi}{2}=1{,}5708$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y=\mathrm{ch}\,x+3$, $0\le x\le 1$. Ответ: $l=sh1=1{,}1752$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y=(x-1)^2$, $y=1$. Ось вращения – Oy.

Ответ: $V=\frac{8\pi}{3}=8{,}3776$.

Вариант 24

1) Найти интегралы:

а) $\int \frac{7+3\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$, Ответ: $7tgx+3\sin x+C$.

б) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$, Ответ: $-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3}+C$.

в) $\int (x^2+4x-5)\cos x\,dx$,

Ответ: $(x^2+4x-5)\sin x+2(x+2)\cos x-2\sin x+C$.

г) $\int \frac{1}{x^3+1}dx$,

Ответ: $\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

д) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$, Ответ: $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}+6\ln|x^{\frac{1}{6}}-1|+C$.

е) $\int (1+\sin x)\cos^2 x\,dx$. Ответ: $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\cos^3 x}{3}+C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int\limits_{-1}^{0}\frac{\mathrm{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$. Ответ: $\frac{tg^2 1}{2}=1{,}2128$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1-x^3}$. Ответ: интеграл расходится.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$x=4-y^2$, $x=y^2-2y$. Ответ: $S=9$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

$r=2\cos\varphi$, $r=3\cos\varphi$. Ответ: $S=\frac{5\pi}{4}=3{,}927$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le 3/4$. Ответ: $l=\sqrt{2}=1{,}4142$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y^2=x-2$, $y=0$, $y=x^3$, $y=1$. Ось вращения – Oy.

Ответ: $V=\frac{74\pi}{15}=15{,}4985$.

Вариант 25

1) Найти интегралы:

а) $\int (\frac{3}{1+x^2} - \frac{7}{\sqrt{1-x^2}})\, dx$, Ответ: $3arctgx - 7\arcsin x + C$.

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$, Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right| + C$.

в) $\int x^2 \sin x\, dx$, Ответ: $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$.

г) $\int \frac{2x^2+5x+9}{x^3-2x^2-13x-10}\, dx$, Ответ: $-\ln|x+1| + \ln|x+2| + 2\ln|x-5| + C$.

д) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2-6x-7}}$,

Ответ: $\sqrt{x^2-6x-7} + 3\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}\right| + C$.

е) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - \cos^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2tgx-1}{2tgx+1}\right| + C$.

2) Вычислить определенный интеграл

$\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Ответ: $\frac{\pi}{4}\left(\frac{15\pi^3}{256} - 1\right) = 0{,}6415$.

3) Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость)

$\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$. Ответ: $\frac{9\pi}{2}$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$x = \frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = e^3$. Ответ: $S = 2$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах:

r = cosφ + sinφ. Ответ: $S = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708$.

6) Вычислить длину дуги кривой:

$y = \ln\cos x + 2$, $0 \le x \le \pi/6$. Ответ: $l = \frac{1}{2}\ln 3 = 0{,}5493$.

7) Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^3$, $y = x^2$. Ось вращения – Oy.

Ответ: $V = \frac{\pi}{10} = 0{,}3142$.

Рекомендуемая литература

1 Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление./ Я.С. Бугров, С.М. Никольский С.М.– М.: Наука, 1984.

2 Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1989.

3 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Т.1–2. – М.: Наука, 2001. – 544с.

4 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1971. – 416с.

5 Данко П.Е., Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для студентов втузов. – в 2-х ч./ А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1999. – 415с.

6 Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. – М.: Наука, 1970. – 399с.