

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

**ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД
2011**

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования

«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

*Методические указания и контрольные задания
для студентов заочного сокращенного обучения*

Часть 1

**ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД
2011**

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
В93

Печатается по решению
РИС НовГУ

Рецензент

доктор физико–математических наук, профессор **Е. Ю. Панов**

Высшая математика: методические указания и контрольные задания для студентов заочного сокращенного обучения. Ч1.- 2-е изд., исп. и доп. /авт.-сост. О.Н. Барсов; ФГБОУ ВПО «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого», Великий Новгород, 2011. – 76с.

Пособие содержит задания для контрольных работ за первый семестр и методические указания к их выполнению по курсу высшей математики для студентов ускоренной формы обучения заочного отделения инженерно–технических специальностей.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

© ФГБОУ ВПО «Новгородский
государственный университет
имени Ярослава Мудрого», 2011

© О.Н. Барсов, составление, 2011

ВВЕДЕНИЕ

Курс высшей математики для студентов ускоренной формы обучения (на базе среднего специального образования) рассчитан на два семестра. В каждом семестре студентам необходимо выполнить две контрольных работы, каждая из которых содержит восемь заданий. Каждая контрольная работа содержит десять вариантов контрольных заданий с номерами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Номер варианта контрольной работы соответствует последней цифре номера зачетной книжки студента. Например, студент, у которого последней цифрой номера зачетной книжки является цифра 3, выполняет третий вариант всех четырех контрольных работ.

Контрольные работы должны быть оформлены в соответствии с нижеизложенными правилами:

1) каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради (12 листов) чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента;

2) на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия и инициалы студента, шифр, номер контрольной работы и название дисциплины; необходимо также, указать дату отсылки работы в университет и адрес студента; в конце работы следует проставить дату выполнения и расписаться;

3) должны быть выполнены все задания своего варианта (работы, содержащие не все задания, а также содержащие задания другого варианта, не засчитываются);

4) задачи в работе надо располагать в порядке возрастания номеров, сохраняя нумерацию;

5) перед решением каждой задачи нужно выписать полностью её условие, подставляя конкретные данные из своего варианта; решение задач следует излагать подробно, объясняя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи;

6) рекомендуется оставлять в конце тетради чистые листы для исправлений и дополнений в соответствии с указаниями рецензента (вносить исправления в сам текст работы после её рецензирования запрещается);

7) после получения не зачтённой, прорецензированной работы (зачтённые работы остаются у рецензента), студент должен исправить все указанные рецензентом ошибки и недочёты в той же тетради после слов работа над ошибками;

8) к экзамену допускаются только те студенты, контрольные работы которых зачтены рецензентом; так как на рецензирование контрольной работы преподавателю отводится две недели, то задания следует высылать на проверку заблаговременно.

ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 1

Задание 1. Даны матрицы A, B и число s .

Найдите матрицу $C = sA^{-1}B + BA$.

$$0. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, s = 7;$$

$$1. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, s = 62;$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, s = 9;$$

$$3. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, s = 29;$$

$$4. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, s = -14;$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, s = -16;$$

$$6. A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, s = -6;$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, s = -14;$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, s = -18;$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, s = 12.$$

Задание 2. Решите линейную систему по теореме Крамера и с помощью обратной матрицы.

$$0. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 = -3, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \quad 1. \begin{cases} 7x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_2 - 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases} \quad 7. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Задание 3. Решите линейную систему методом Гаусса

$$0. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 12x_4 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 6, \\ -x_1 + 5x_3 - 13x_4 = -15, \\ 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 25x_4 = 10. \end{cases} \quad 1. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 9x_4 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 9x_4 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 20. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -12. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} -6x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 0, \\ -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 24x_4 = -5. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 9x_4 = 7, \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 3. \end{cases} \quad 7. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -4, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_4 = -3, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \end{cases} \quad 9. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 9x_4 = 7, \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 3. \end{cases}$$

Задание 4. Даны векторы $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$, $\bar{c}(c_x, c_y, c_z)$, $\bar{d}(d_x, d_y, d_z)$.

Требуется:

- доказать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ некопланарны и найти координаты вектора $\bar{d}$ в базисе $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$;
- проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$;
- угол между векторами $\bar{b}$ и $\bar{c}$;
- площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
- объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

- $\bar{a}(3,1,2), \bar{b}(4,0,-3), \bar{c}(1,2,-4), \bar{d}(-3,2,2)$;
- $\bar{a}(1,2,-1), \bar{b}(2,1,-2), \bar{c}(3,1,1), \bar{d}(4,5,3)$;
- $\bar{a}(-2,3,4), \bar{b}(1,2,2), \bar{c}(2,4,0), \bar{d}(5,6,-1)$;
- $\bar{a}(2,-1,1), \bar{b}(1,1,-1), \bar{c}(-1,-3,2), \bar{d}(3,0,4)$;
- $\bar{a}(1,4,3), \bar{b}(2,-2,1), \bar{c}(-3,0,3), \bar{d}(0,-4,2)$;
- $\bar{a}(5,-1,-2), \bar{b}(2,-1,1), \bar{c}(-2,5,-1), \bar{d}(-2,1,5)$;

6. $\bar{a}(4,0,1), \bar{b}(-2,-2,2), \bar{c}(0,-1,2), \bar{d}(6,3,2)$;
 7. $\bar{a}(-3,5,2), \bar{b}(3,-4,5), \bar{c}(-5,3,0), \bar{d}(1,-7,1)$;
 8. $\bar{a}(6,2,1), \bar{b}(2,-2,0), \bar{c}(1,-8,-1), \bar{d}(4,-3,0)$;
 9. $\bar{a}(-3,-2,2), \bar{b}(3,4,0), \bar{c}(-1,2,-1), \bar{d}(-1,5,-4)$.

Задание 5. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы.

$$\begin{aligned} 0. A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}; & 1. A &= \begin{pmatrix} 1 & -6 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 7 \end{pmatrix}; & 2. A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ -5 & -4 & 5 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ 3. A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; & 4. A &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & -8 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}; & 5. A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -7 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \\ 6. A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -6 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}; & 7. A &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}; & 8. A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \\ 9. A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задание 6. Даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и плоскость P в пространстве, заданная уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

Требуется:

- 1) выяснить, лежат ли точки A и B в одном полупространстве относительно плоскости P ;
- 2) найти длину отрезка AB и расстояние от точки A до плоскости P ;
- 3) составить уравнение прямой AB и найти точку пересечения этой прямой с плоскостью P а также угол между этой прямой и данной плоскостью;
- 4) составить уравнение прямой, проходящей через точку A , перпендикулярно плоскости P , и найти расстояние от точки B до этой прямой;
- 5) найти проекцию точки A на плоскость P и точку, симметричную точке A относительно плоскости P .

$$0. A(1,2,-1), \quad B(2,1,0), \quad x - 2y + 2z + 1 = 0;$$

- | | | |
|----------------|-------------|-------------------------|
| 1. A(2,-1,2), | B(3,1,2), | $x + y + z - 5 = 0$; |
| 2. A(0,2,3), | B(1,-1,1), | $2x - y - 2z + 4 = 0$; |
| 3. A(-1,1,2), | B(-2,0,3), | $x - y - z - 3 = 0$; |
| 4. A(4,2,0), | B(-1,3,1), | $x + 2y + 2z + 6 = 0$; |
| 5. A(3,1,1), | B(-4,2,3), | $2x + 2y + z - 4 = 0$; |
| 6. A(5,-2,-1), | B(2,1,-2), | $x + 2y - z + 1 = 0$; |
| 7. A(0,1,-2), | B(1,0,2), | $x - y + 4z - 5 = 0$; |
| 8. A(1,3,-2), | B(2,-2,-3), | $4x + y - -z = 0$; |
| 9. A(-3,2,0), | B(-2,3,1), | $2x - y + 2z - 2 = 0$. |

Задание 7. Дано уравнение плоской линии в полярных координатах. Требуется найти уравнение этой линии в декартовых координатах, определить тип линии и построить её.

- | | | |
|---|---|---|
| 0. $r = \frac{9}{4 - 5 \cos \varphi}$; | 1. $r = \frac{6}{1 - \cos \varphi}$; | 2. $r = \frac{1}{1 + \sin \varphi}$; |
| 3. $r = \frac{1}{1 + 2 \sin \varphi}$; | 4. $r = \frac{1}{4 - 3 \cos \varphi}$; | 5. $r = \frac{3}{3 + 2 \sin \varphi}$; |
| 6. $r = \frac{1}{2 + 2 \sin \varphi}$; | 7. $r = \frac{4}{1 - 2 \sin \varphi}$; | 8. $r = \frac{5}{4 + 3 \sin \varphi}$; |
| 9. $r = \frac{2}{3 + 2 \cos \varphi}$. | | |

Задание 8. Вычислите указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

0. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2}{3x^2 + 4x + 5}$, б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 6}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\arcsin 3x}$,
- г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{\sin x}}$;
1. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 5}{4x^2 - 3x + 7}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$,
- в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 7x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 7}{x^2 + 1} \right)^{x^2}$;
2. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 2}{3x^4 + 10}$, б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{3x}$,

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin x)^{\frac{1}{x}};$$

$$3. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 1}{x + 1} - x \right), \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x},$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{1}{1-x^2}};$$

$$4. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3 + 3x^2 + 4x - 1}{x^2 + x + 1} - 5x \right), \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^3 + x - 30},$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{1 - \sqrt{x}}, \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 5} (11 - 2x)^{\frac{x}{25-x^2}};$$

$$5. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 3x + 18}{x^2 + x - 6}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{ctg}^2 3x,$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2} \right)^x;$$

$$6. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2+x^2} - \sqrt{5+x^2}), \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{\sqrt{x-4} - 1}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{x},$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3)^{\frac{3x}{x^2-4}};$$

$$7. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x + 3}{3x^3 + x^2 + x}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{5-x}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}},$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x, \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$8. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x} + 3}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{4 - \sqrt{5+x}}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{2^{-x} - 1},$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{x+2};$$

$$9. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{3x}}{\sqrt{x+4}}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x-1}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)},$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow -2} (2x + 5)^{\frac{x}{x^2-4}}.$$

Задание 9. Исследовать данные функции на непрерывность. Если у функции $f(x)$ имеются точки разрыва, тогда определить характер разрыва функции в этих точках (точка разрыва первого или второго рода).

$$0. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 1 + \frac{|x|}{x}.$$

$$1. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & -1 \leq x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$2. \text{ a) } f(x) = \frac{x^2 + x}{|x+1|}, \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, x = \pm 1, \\ 1 - x^2, & 0 < |x| < 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$3. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}, \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 5 - x, & x > 2. \end{cases}$$

$$4. \text{ a) } f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin 2x}, \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

$$5. \text{ a) } f(x) = e^{x + \frac{1}{x}}, \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$6. \text{ a) } f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$7. \text{ a) } f(x) = \frac{|\sin x|}{x}, \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$8. \text{ a) } f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

$$9. \text{ а) } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

Задание 10. Найдите производные второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ функций, первая из которых задана уравнением $y = f(x)$, вторая неявно, а третья параметрически.

$$0. \text{ а) } y = \left(e^{\sin 2x} + \sqrt{x} \right)^2, \quad \text{б) } e^y + xy = e, \quad \text{в) } x = \frac{t+1}{t}, y = \frac{t-1}{t}.$$

$$1. \text{ а) } y = \left(e^{\sin 3x} - \sqrt[3]{x} \right)^2, \quad \text{б) } e^y - x^2 y + x = 0, \quad \text{в) } x = \operatorname{arctg} t^2, y = \frac{1}{t^2}.$$

$$2. \text{ а) } y = \cos e^{2x} + \sin e^{-x}, \quad \text{б) } x^2 + y^2 + xy = 0, \quad \text{в) } x = \cos^3 t, y = \sin^3 t.$$

$$3. \text{ а) } y = \sqrt{\frac{x^2-1}{3x+2}}, \quad \text{б) } x^3 + y^3 - xy = 0, \quad \text{в) } x = e^{-t^2}, y = e^{t^2}.$$

$$4. \text{ а) } y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad \text{б) } 2x^3 + y^2 - y + 3 = 0, \quad \text{в) } x = e^{-2t}, y = e^{3t^2}.$$

$$5. \text{ а) } y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x}}, \quad \text{б) } -x^3 + y^4 - y + 1 = 0, \quad \text{в) } x = \ln^2 t, y = \ln t.$$

$$6. \text{ а) } y = \frac{1}{x} \operatorname{tg}^2 x, \quad \text{б) } \operatorname{arctg} y - xy + x^2 = 0, \quad \text{в) } x = \arcsin t, y = \sqrt{1-t^2}.$$

$$7. \text{ а) } y = \sqrt[4]{1+x^3} (1 - \sqrt{1-x}), \quad \text{б) } \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y + x = 0, \quad \text{в) } x = \sin 2t, y = \cos^2 t.$$

$$8. \text{ а) } y = \frac{x - \sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{1-x^2}}, \quad \text{б) } \frac{y}{x} - y^2 + x^2 = 0, \quad \text{в) } x = 2t - \sin 2t, y = 1 - \cos 2t.$$

$$9. \text{ а) } y = \frac{\sqrt{1+e^{x^2}}}{e^{-x^2}}, \quad \text{б) } \frac{x}{y} + y^2 - x^2 - 3 = 0, \quad \text{в) } x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t).$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 1

Задание 1. Матрицей размерности $m \times n$ называют прямоугольную таблицу из чисел, которые расположены в m строках и n столбцах

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, образующие матрицу называются *элементами матрицы*. Матрицы, у которых число строк равно числу столбцов, называют квадратными, а число строк такой матрицы называют её порядком.

Например, матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ является квадратной матрицей второго

порядка. В матрицах общего вида их элементы снабжают двумя индексами и пишут a_{ij} или $(A)_{ij}$ – элемент матрицы A , расположенный в i -той строке и j -том столбце. Квадратная матрица порядка n называется единичной, если у неё $a_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, n$, а все остальные элементы равны нулю.

Обозначается единичная матрица буквой E . Например, единичные матрицы второго и третьего порядков имеют вид

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ соответственно. Элементы матриц A и B ,

расположенные в строках и столбцах с одинаковыми номерами называются соответствующими.

Матрицы A и B называют равными, если они имеют одинаковые размерности и все их соответствующие элементы равны, т.е. $A=B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

Над матрицами определены следующие действия: 1) умножение матрицы на число, 2) сложение матриц, 3) умножение матрицы на матрицу.

Определим эти действия.

1. Чтобы умножить матрицу на число нужно каждый элемент матрицы умножить на это число. Например, $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

2. Чтобы сложить две матрицы нужно сложить все соответствующие

элементы этих матриц. Например, $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Пусть A – матрица размерности $m \times k$, B – матрица размерности $k \times n$. Произведением матрицы A на матрицу B называют матрицу AB

размерности $m \times n$, определяемую равенством $(AB)_{ij} =$
 $= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^k a_{il}b_{lj}.$

Следовательно, чтобы получить элемент матрицы AB , расположенный в i -той строке и j -том столбце, нужно сложить произведения всех элементов i -той строки матрицы A на соответствующие элементы j -того столбца матрицы B . Например,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 6 + 1 \cdot (-4) \\ 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 7 & 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 & 2 \cdot 6 + (-3) \cdot (-4) \\ 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 & 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 6 + (-1) \cdot (-4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 16 & 14 \\ -13 & 7 & 24 \\ -3 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Каждой квадратной матрице ставится в соответствие действительное число, которое вычисляется по определённым правилам по элементам матрицы. Это число называют определителем (детерминантом) матрицы A и обозначают $\det A$. Порядком определителя называют порядок матрицы A . Если требуется указать элементы матрицы, то определитель записывают следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если матрица A порядка 1 и состоит из одного элемента a_{11} , то определитель такой матрицы считают равным этому числу, т.е. $\det A = a_{11}$. Далее будем считать, что порядок матрицы $n > 1$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется *определитель* порядка $n-1$, который образуют элементы матрицы A , оставшиеся после вычёркивания в ней i -той строки и j -того столбца. Например, минором

матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ является определитель $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}.$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A называют число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Из определения видно, что алгебраическое дополнение $A_{ij} = M_{ij}$, если $i+j$ – чётное число, и $A_{ij} = -M_{ij}$, если $i+j$ – нечётное число.

Определителем квадратной матрицы A называют число, равное сумме произведений элементов первой строки этой матрицы на свои алгебраические дополнения.

1. Определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 = -4 + 3 = -1.$$

2. Определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22} \times a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{13}a_{21} -$$

Назовём *главной диагональю* ту диагональ квадратной матрицы, которая проходит из левого верхнего угла в правый нижний угол, а вторую диагональ назовём *вспомогательной диагональю*. Тогда определитель третьего порядка равен сумме шести слагаемых, каждое из которых является произведением трёх элементов этого определителя. При этом произведение элементов главной диагонали и произведения элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями параллельными главной диагонали, берутся со своими знаками, а произведение элементов вспомогательной диагонали и произведения элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями параллельными этой диагонали, берутся с противоположными знаками.

Например,
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 1(1)(-5) + (-2)2(-2) + 4(3)(3) - 3(1)(-2) - (-2)(4)(-5) - 2(3)1 = -5 + 8 + 36 + 6 - 40 - 6 = -1.$$

3. Определители более высокого порядка

Умение вычислять определители третьего порядка и определение позволяют вычислять определители 4-ого, 5-ого и т.д. порядков.

Например,
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} - 1 \cdot A_{13} = M_{11} - 2 \cdot M_{12} - M_{13} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0 + 3 + 2 + 0 - 6 - 1) - 2 \cdot (0 - 6 + 6 + 0 - 18 + 2) - (4 + 2 - 6 - 4 + 6 - 2) = -2 - 2 \cdot (-16) = 30.$$

Обратная матрица

Обратной к квадратной матрице A называют матрицу B такую, что $AB = BA = E$, где E – единичная матрица.

Матрицу обратную к матрице A принято обозначать A^{-1} . Из определения следует единственность обратной матрицы. Действительно, если B и B' являются обратными к матрице A , тогда $AB = BA = E$ и $AB' = B'A = E$. Отсюда имеем $B' = B'E = B'(AB) = (B'A)B = EB = B$.

Теорема. Квадратная матрица A имеет обратную матрицу тогда, и только тогда, когда $\det A \neq 0$; при этом

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A , иначе говоря,

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Пример. Найдём A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. $\det A = 6 + 1 = 7 \neq 0$.

Следовательно, A^{-1} существует. Найдём алгебраические дополнения матрицы A : $A_{11} = 3$, $A_{21} = A_{12} = -M_{12} = -1$, $A_{22} = 2$. Следовательно, $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Проверка: $AA^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример. Найдём A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Имеем, $\det A = -6 + 0 + 0 +$

$+ 0 - 4 + 1 = -9$. Алгебраические дополнения матрицы равны $A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -5$, $A_{21} = -2$, $A_{31} = -1$, $A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$, $A_{22} = M_{22} = -2$,

$A_{32} = -M_{32} = -1$, $A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$, $A_{23} = 1$, $A_{33} = 5$.

Следовательно, $A^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Проверка: $AA^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Рассмотрим линейную неоднородную систему n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Вместе с определителем Δ системы будем рассматривать определители Δ_j , получающиеся из определителя Δ заменой j -того столбца столбцом свободных членов, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2 (Крамера). Система (1) имеет единственное решение $\Leftrightarrow$ определитель системы $\Delta \neq 0$. При этом, решение системы определяется формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, ..., $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

Пример. Решить по теореме Крамера следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 = -5 \end{cases}$$

$$\text{Определитель системы } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -7 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 40 - 21 - 8 - 30 + 35 = -$$

74 $\neq 0$.

Следовательно, рассматриваемая система имеет единственное решение. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

$$\text{Имеем } \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ -5 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 40 + 50 - 14 + 10 - 20 - 140 = -74,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 80 - 15 - 8 - 60 + 25 = -148, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & -7 & -5 \end{vmatrix} = -$$

$$10 - 16 + 84 + 32 - 30 + 14 = 74.$$

$$\text{Таким образом, } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-74}{-74} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-148}{-74} = 2, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{74}{-74} = -1 - \text{решение данной системы.}$$

Решение линейных систем с помощью обратной матрицы

Если ввести одностолбцовые матрицы неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и свободных членов } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ система (1), с учетом}$$

действий над матрицами, примет вид

$$A X = B. \quad (2)$$

Равенство (2) называют матричной формой записи линейной системы (1). Если определитель системы (1) $\Delta = \det A \neq 0$, то матрица A системы имеет обратную матрицу A^{-1} . Умножив матричное равенство (2) слева на A^{-1} , получим равенство или (так как, $EX = X$) . Следовательно, столбец неизвестных равен произведению A^{-1} на столбец свободных членов.

Пример. Решить систему
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -11. \\ x_1 - x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, а её определитель

$$\det A = 24 + 8 - 9 - 6 + 36 - 8 = 45.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} .

$$A_{11} = 8, \quad A_{21} = 9, \quad A_{31} = 2,$$

$$\text{Имеем } A_{12} = -22, \quad A_{22} = 9, \quad A_{32} = 17.$$

$$A_{13} = -5, \quad A_{23} = 0, \quad A_{33} = 10.$$

Следовательно, $A^{-1} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 8 & 9 & 2 \\ -22 & 9 & 17 \\ -5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, а столбец неизвестных $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$$= X = A^{-1}B = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 8 & 9 & 2 \\ -22 & 9 & 17 \\ -5 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} -45 \\ 0 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, числа $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ являются решением данной системы.

Задание 3. Метод Гаусса. Пусть дана система m уравнений с n неизвестными общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (3)$$

Для практического отыскания решений общих линейных систем чаще всего используется метод Гаусса. Этот метод состоит из следующих трех этапов:

1. Записываем расширенную матрицу $\bar{A}$ системы (3) и сверху над каждым столбцом записываем неизвестные, из коэффициентов при которых образован этот столбец

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

2. Приводим расширенную матрицу $\bar{A}$ системы (3) к трапецевидной форме с матрицей $\bar{B}$. Для этого применяются элементарные преобразования матрицы $\bar{A}$ следующего вида а) перестановка местами двух строк матрицы $\bar{A}$; б) умножение строки матрицы на число, отличное от нуля; в) прибавление к одной строке матрицы другой строки; г) перестановка местами столбцов матрицы A вместе с неизвестными. Элементарные преобразования **а), б), в)** над строками расширенной матрицы $\bar{A}$ системы соответствуют следующие преобразования самой системы (3): перестановка местами двух строк расширенной матрицы системы эквивалентна перестановке местами двух соответствующих уравнений этой системы; умножение строки матрицы на число, отличное от 0, эквивалентно умножению соответствующего уравнения системы (3) на это число; прибавление к одной строке матрицы другой строки эквивалентно сложению двух соответствующих уравнений системы. Следовательно, матрица $\bar{B}$, полученная из матрицы $\bar{A}$ указанными

преобразованиями, является расширенной матрицей системы, эквивалентной исходной системе.

3. При этом возможны три случая: а) система имеет единственное решение, б) система имеет бесконечно много решений, в) система несовместна (не имеет решений). Рассмотрим все эти случаи на конкретных примерах.

Пример 1. Решить методом Гаусса систему

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Приведем расширенную матрицу системы к трапецевидной форме.

$$\begin{aligned} \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 & -7 \\ 0 & 5 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -15 & 27 & 31 \\ 0 & 0 & -5 & 8 & 9 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & -15 & 27 & 31 \end{pmatrix} \rightarrow. \end{aligned}$$

Следовательно, ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен числу неизвестных, а поэтому система имеет единственное решение. Из последней строки матрицы находим $x_4 = \frac{4}{3}$ (так как $3x_4 = 4$), из третьей строки получаем $-5x_3 + 8x_4 = 9$ или $-5x_3 = 9 - 8x_4 = 9 - 8 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{5}{3}$, а $x_3 = \frac{1}{3}$; из второй строки получаем уравнение $x_2 + 3x_3 - 7x_4 = -7$ и находим $x_2 = \frac{4}{3}$; наконец из первой строки получаем $x_1 = 3 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 3 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

Следовательно, $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{4}{3}, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = \frac{4}{3}$ есть единственное решение данной системы. Чтобы убедиться в правильности решения сделаем проверку, то есть подставим найденное решение в каждое уравнение системы:

$$\frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{4-2+4}{3} = \frac{6}{3} = 2, \quad 2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4-4+1-4}{3} = \frac{-3}{3} = -1,$$
$$3 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6+8-3+4}{3} = \frac{15}{3} = 5, \quad \frac{2-4-1+12}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

Пример 2. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - 7x_2 + 10x_3 - 5x_4 = -9, \\ x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 6x_4 = 10. \end{cases}$$

Приведем расширенную матрицу системы к трапецевидной форме:

$$\overline{A} = \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow = \overline{B}.$$

Данная система имеет бесконечное множество решений, так как из третьей строки матрицы $\bar{B}$ получаем $x_3 = 4 - 3x_4$.

Из второй строки получаем уравнение $5x_2 = 7 + 7x_3 - 4x_4 = 7 + 7(4 - 3x_4) - 4x_4$ или . Из первой строки матрицы получаем, $x_1 = -2 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2 + 2 \cdot (7 - 5x_4) - 3 \cdot (4 - 3x_4) + x_4 = 0$.

Обозначив $x_4 = c$, запишем множество всех решений системы

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 7 - 5c \\ x_3 = 4 - 3c \\ x_4 = c \end{cases},$$

где c – любое действительное число.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 3. \end{cases}$$

Приводим расширенную матрицу системы к трапецевидной форме:

$$\overline{A} \quad = \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -11 & -21 & -23 \\ 0 & 0 & -11 & -21 & -25 \end{pmatrix} \rightarrow .$$

Из последнего уравнения полученной матрицы имеем $0 = -2$, что невозможно. Значит, рассматриваемая система несовместна.

Задание 4. Разберём порядок выполнения этого задания на примере векторов $\bar{a}(-1, 3, 0)$, $\bar{b}(1, 1, -2)$, $\bar{c}(0, -1, 0)$, $\bar{d}(2, 3, -2)$.

Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны (образуют базис в пространстве) $\Leftrightarrow$ смешанное произведение этих векторов отлично от нуля. Вычислим

$$\text{смешанное произведение } \bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 + 2 = 2 \neq 0.$$

Следовательно, данные векторы образуют базис. Координаты x, y, z вектора $\bar{d}$ в базисе $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ определяются равенством $\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$. Подставив в это равенство декартовы координаты векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, получим векторное равенство $(2, 3, -2) = x(-1, 3, 0) + y(1, 1, -2) + z(0, -1, 0) = (-x, 3x, 0) + (y, y, -2y) + (0, -z, 0) = (-x + y, 3x + y - z, -2y)$.

Приравнявая соответствующие координаты векторов в левой и правой частях последнего равенства, получим линейную систему для определения координат вектора $\bar{d}$.

$$\begin{cases} -x + y = 2, \\ 3x + y - z = 3, \\ -2y = -2. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы находим $y = 1$, из первого уравнения получим $x = -1$, $z = -1$.

Следовательно, в базисе $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ вектор $\bar{d} = -\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$.

Единичный орт вектора получается делением каждой координаты этого вектора на его длину, то есть $\bar{e}_{\bar{b}} = \left(\frac{b_x}{|\bar{b}|}, \frac{b_y}{|\bar{b}|}, \frac{b_z}{|\bar{b}|} \right)$. В нашем случае длина вектора $\bar{b} = \sqrt{1+1+(-2)^2} = \sqrt{6}$.

Следовательно, единичный орт вектора $\bar{b}$ равен $\bar{e}_{\bar{b}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right)$.

Проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ найдем по формуле $Pr_{\bar{b}} \bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{e}_{\bar{b}} = (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 \cdot \frac{(-2)}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$ (проекция вектора $\bar{a}$ на

вектор $\bar{b}$ равна скалярному произведению вектора $\bar{a}$ на единичный орт вектора $\bar{b}$).

Косинус угла α между векторами $\bar{b}$ и $\bar{c}$ находим из определения скалярного произведения $\cos \alpha = \frac{\bar{b} \cdot \bar{c}}{|\bar{b}| \cdot |\bar{c}|} = \frac{b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \cdot \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}} =$
 $= \frac{-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1}} = \frac{-1}{\sqrt{6}}.$

Следовательно, $\alpha = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right).$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна модулю векторного произведения этих векторов $|\bar{a} \times \bar{b}|$. Вычислим сначала векторное произведение этих векторов по формуле

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \bar{i} -$$

$$- \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \bar{k} = -6\bar{i} - 2\bar{j} - 4\bar{k}. \quad \text{Найдём теперь площадь}$$

параллелограмма $|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$. Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ равен модулю смешанного произведения этих векторов, то есть V

$$= |\bar{a} \bar{b} \bar{c}| = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 2.$$

Следовательно, $V = 2$.

Задание 5. Условимся называть n – мерными векторами или просто

векторами одностробцовые матрицы вида $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Пусть дана квадратная

матрица A порядка n .

Определение. Число λ называется собственным числом матрицы A , если существует отличный от нуля вектор x (хотя бы одно число $x_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$) такой, что выполняется равенство

$$Ax = \lambda x, \quad (4)$$

а вектор $x \neq 0$ называется *собственным вектором матрицы A* , соответствующим собственному числу λ .

Из определения собственных чисел и собственных векторов следует практический способ их отыскания. Действительно, преобразуем равенство (4) следующим способом: $Ax - \lambda x = 0$ или $Ax - \lambda Ex = 0$ (так как $Ex = x$) или

$$(A - \lambda E)x = 0, \quad (5)$$

где E – единичная матрица порядка n . Равенство (5) является матричной формой записи линейной однородной системы

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Известно, что однородная система (6) имеет ненулевое решение тогда, и только тогда, когда её определитель равен нулю. Следовательно, матрица A имеет собственные числа и собственные векторы тогда и только тогда, когда

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (7)$$

Равенство (7), которое является алгебраическим уравнением степени n , называется характеристическим уравнением для матрицы A .

Из сказанного выше следует, что число λ является собственным числом матрицы A тогда и только тогда, когда λ есть корень характеристического уравнения (7). А вектор x – собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному числу λ , тогда и только тогда, когда x является решением линейной однородной системы (5) для этого λ .

Пример. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Составим характеристическое уравнение } \det(A - \lambda E) =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -3 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot [\lambda(\lambda-4)+3] = (2-\lambda)(\lambda-4\lambda+3) = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=1$ есть собственные числа данной матрицы. Теперь для каждого собственного числа найдем соответствующие им собственные векторы.

1) Для $\lambda_1=2$ система (6) имеет вид
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + x_2 = 0. \end{cases} \text{ (подставили } \lambda = 2).$$

Расширенная матрица этой системы равна
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Используются следующие преобразования: из третьей}$$

строки вычли первую строку; из второй строки, умноженной на 2, вычли первую строку, умноженную на 3. Из последней матрицы следует, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ а неизвестная x_3 может принимать любые значения. Обозначив $x_3 = t$, запишем множество всех собственных векторов,

соответствующих собственному числу $\lambda_1 = 2$, в виде $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, где t –

любое действительное число, отличное от 0.

2). Для $\lambda_2 = 3$ система (6) имеет вид
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_2 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу этой системы $\bar{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из второй строки последней матрицы находим $x_2 = 3x_3$, а из первой строки следует, что $-3x_1 = -x_2 = -3x_3$ или $x_2 = 3x_3$, $x_1 = x_3$.

Следовательно, собственные векторы, соответствующие этому собственному числу, имеют вид $x = \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $t = x_3$ – любое действительное число.

3) Для $\lambda_3 = 1$ система (6) имеет вид
$$\begin{cases} -x_1 + x = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

а расширенная матрица этой системы

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим $x_2 = x_3$, $x_1 = x_3$.

Следовательно, искомые собственные векторы $x = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где t – любое действительное число, отличное от 0.

Задание 6. Пусть точки пространства $A(-2, 3, 1)$, $B(0, -4, -1)$, а плоскость P имеет уравнение $x - 3y + z - 1 = 0$.

1. Обозначим $L(x, y, z) = x - 3y + z - 1$. Если $L(A)L(B) > 0$, то есть числа $L(A)$, $L(B)$ одного знака, тогда точки A и B лежат в одном полупространстве относительно плоскости P . Если же $L(A)L(B) < 0$, то эти

точки расположены в разных полупространствах относительно плоскости P .

Имеем: $L(A) = L(-2, 3, 1) = -2 - 3 \cdot 3 + 1 - 1 = -11$, $L(B) = L(0, -4, -1) = 0 - 3 \cdot (-4) - 1 - 1 = 10$. Следовательно, $L(A), L(B)$ разных знаков, а точки A, B лежат в разных полупространствах относительно плоскости P .

2. Длину отрезка AB найдём по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{4 + 49 + 4} = \sqrt{57};$$

расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости P определяется

$$\text{равенством } d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Следовательно, расстояние от точки A до плоскости P равно

$$d(A, P) = \frac{|-2 - 3 \cdot 3 + 1 - 1|}{\sqrt{1 + 9 + 1}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}.$$

3. Вектор $\vec{l} = \overrightarrow{AB}(2, -2, -7,)$ является направляющим вектором прямой AB . Следовательно, каноническое уравнение прямой AB (уравнение прямой, проходящей через точку A и имеющей данный направляющий вектор) имеет вид

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z-1}{-2}.$$

Чтобы найти точку пересечения прямой AB с плоскостью P перейдем к параметрическому уравнению этой прямой, введя параметр t равенством

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z-1}{-2} = t. \text{ Выразив из последнего равенства } x, y, z \text{ через } t:$$

$x = 2t - 2, y = -7t + 3, z = -2t + 1$, и подставив эти значения в уравнение плоскости, получим равенство $2t - 2 - 3(-7t + 3) - 2t + 1 - 1 = 0$. Из этого

уравнения находим $t = -\frac{11}{21}$, а из параметрического уравнения прямой

определяем координаты точки пересечения прямой и плоскости

$$x = 2t - 2 = -\frac{64}{21}, y = -7t + 3 = \frac{140}{21} = \frac{20}{3}, z = -2t + 1 = \frac{43}{21}.$$

Следовательно, точка пересечения имеет координаты $\left(-\frac{64}{21}, \frac{20}{3}, \frac{43}{21}\right)$.

Синус угла между прямой и плоскостью определяется следующим равенством

$$\sin \varphi = \frac{|\bar{l} \cdot \bar{N}|}{|\bar{l}| \cdot |\bar{N}|},$$

где $\bar{l}$ – направляющий вектор прямой, $\bar{N}$ – нормальный вектор плоскости, а $\bar{l} \cdot \bar{N}$ – скалярное произведение этих векторов. В нашем случае

$$\bar{l} = (2, -7, -2), \quad \bar{N} = (1, -3, 1), \quad \sin \varphi = \frac{|2 + 21 - 2|}{\sqrt{4 + 49 + 4} \sqrt{1 + 9 + 1}} = \frac{21}{\sqrt{57} \sqrt{11}} = \frac{21}{\sqrt{627}}.$$

4. Так как прямая должна быть перпендикулярна плоскости Р, то нормаль к плоскости будет направляющим вектором искомой прямой, то есть $\bar{l} = \bar{N} = (1, -3, 1)$. Каноническое уравнение искомой прямой имеет вид $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{1}$. Точка $A(-2, 3, 1)$ принадлежит этой прямой.

Следовательно, расстояние от точки $B(0, -4, -1)$ до прямой равно площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}, \bar{l}$, делённой на $|\bar{l}|$ (длину основания). Таким образом, искомое расстояние $d = \frac{|\overline{AB} \times \bar{l}|}{|\bar{l}|}$.

Векторное произведение векторов $\overline{AB}(2, -7, -2), \bar{l}(1, -3, 1)$ равно $\overline{AB} \times \bar{l} =$

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -7 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -13\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}.$$

$$\text{Следовательно, } d = \frac{\sqrt{169 + 16 + 1}}{\sqrt{1 + 9 + 1}} = \frac{\sqrt{186}}{\sqrt{11}}.$$

5. Проекцией точки А на плоскость Р является основание перпендикуляра, опущенного из точки А на плоскость Р. Уравнение этого перпендикуляра было составлено в предыдущем пункте и имеет вид $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{1}$. Найдём точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью Р. Для этого перейдём к параметрическому уравнению $x = t - 2, y = -3t + 3, z = t + 1$, и подставим в уравнение плоскости $t - 2 - 3(-3t + 3) + t + 1 - 1 = 0$.

Получаем, $11t = -11$ или $t = -1$, а координаты проекции А точки А на плоскость Р равны $x = t - 2 = -1 - 2 = -3, y = -3t + 3 = 6, z = t + 1 = 0$.

Следовательно, $C(-3, 6, 0)$ есть проекция точки А на плоскость Р. Пусть точка D симметрична точке А относительно плоскости Р.

Следовательно, точка D принадлежит перпендикуляру AC и $|AC| = |CD|$. Вектор $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} = 2(-1, 3, -1) = (-2, 6, -2)$, а координаты точки D равны сумме соответствующих координат точки A и вектора $\overrightarrow{AD}$, то есть $D(-4, 9, -1)$.

Задание 7. При выполнении этого задания необходимо учесть связь декартовых координат точки с полярными координатами этой точки: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Пусть, например, уравнение линии в полярных координатах имеет вид $r = \frac{1}{2 - 2 \cos \varphi}$. Умножив это уравнение на $2 - 2 \cos \varphi$, получим равенство $2r - 2r \cos \varphi = 1$, которое в декартовых прямоугольных координатах примет вид $2\sqrt{x^2 + y^2} - 2x = 1$ или $2\sqrt{x^2 + y^2} = 2x + 1$. Возводя последнее равенство в квадрат, получим $4x^2 + 4y^2 = 4x^2 + 4x + 1$ или $4y^2 = 4x + 1$. Поделив последнее равенство на 4, получаем каноническое уравнение параболы $y^2 = x + \frac{1}{4}$ с вершиной в точке $(-\frac{1}{4}, 0)$.

Задание 8. 1) Если требуется вычислить предел при $x \rightarrow \infty$ функции, являющейся частным двух полиномов, то говорят, что имеется неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для раскрытия этой неопределённости необходимо поделить числитель и знаменатель дроби на старшую степень x .

Пример. Вычислим $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x^2 + 4x - 5}{2x^3 + 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3}}{2 + \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}} = \frac{3}{2}$, так как дроби $\frac{1}{x}, \frac{4}{x^2}, \frac{5}{x^3}$ стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$, а старшей степенью переменной x является x^3 .

Пример. Вычислим $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x - 2}{3x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}}{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = \infty$, так как

старшей степенью переменной x является x^4 , а после деления числителя и знаменателя дроби на x^4 , числитель стремится к 1, а знаменатель к 0.

2. Если требуется вычислить предел при $x \rightarrow a$ (a – число) функции, являющейся частным двух полиномов, а числитель и знаменатель

одновременно стремятся к 0, то говорят, что имеется неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для раскрытия этой неопределённости необходимо разложить числитель и знаменатель дроби на множители и сократить $(x - a)$.

Пример.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{3x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(3x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{3x - 2} = -\frac{3}{5}.$$

3. Если числитель или знаменатель дроби содержит выражение вида $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, то для раскрытия неопределённости необходимо числитель и знаменатель дроби умножить на сопряжённое $\sqrt{A} + \sqrt{B}$.

Пример.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x})}{2x^2 - 3x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})}{(x-2)(2x+1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2) - (6-x)}{(x-2)(2x+1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(2x+1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(2x+1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

4. Вычисление пределов функции с помощью замечательных пределов: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$,

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$.

Пример. Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2 x}$ с использованием первого

замечательного предела **а).** Имеем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{\sin^2 x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{\sin^2 x} \cdot \frac{4x^2}{4x^2} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{4x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 =$
 $= 8 \cdot 1 \cdot 1 = 8.$

Пример. Пусть требуется вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{\ln(1+3x)}$. Для этого

используем замечательные пределы **в)** и **г).** Имеем, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{\ln(1+3x)} =$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{-x}(2^{2x} - 1)}{\ln(1 + 3x)} = (\text{так как } 2^{-x} \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} - 1}{\ln(1 + 3x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} - 1}{\ln(1 + 3x)} \cdot \frac{6x}{6x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} - 1}{\ln(1 + 3x)} \cdot \frac{3x}{2x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{3x}{\ln(1 + 3x)} = \\
&= \frac{2}{3} \cdot \ln 2 \cdot \ln 3.
\end{aligned}$$

Пример. Для вычисления $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 2x} - 1}{x}$ воспользуемся замечательными пределами а) и д).

$$\begin{aligned}
&\text{Действительно, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 2x} - 1}{x} \times \frac{\sin 2x}{\sin 2x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 2x} - 1}{\sin 2x} \times \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 2x} - 1}{\sin 2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}.
\end{aligned}$$

Обозначим $y = \sin 2x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
&\text{Тогда получим } 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 2x} - 1}{\sin 2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + y} - 1}{y} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 + y)^{\frac{1}{2}} - 1}{y} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \text{ так как } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1.
\end{aligned}$$

Если требуется вычислить $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$, а $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, тогда говорят, что имеет место неопределённость типа $\left[1^\infty\right]$. Для раскрытия такой неопределённости используется замечательный предел б).

Пример. Вычислим $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}\right)^{1-x^2}$. Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}\right) = 1$, а $1 - x^2 \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow \infty$, то имеет место неопределённость типа $\left[1^\infty\right]$.

$$\text{Далее, } \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Обозначим $y = \frac{1}{x^2 + 1} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Тогда $x^2 + 1 = \frac{1}{y}$, а $1 - x^2 = 2 - \frac{1}{y}$. Данный предел примет вид

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right)^{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+y)^{2-\frac{1}{y}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^{2y-1} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{2y-1} = e^{-1},$$

так как $\lim_{x \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

Задание 9. Это контрольное задание относится к теме: «Непрерывность функции, точки разрыва и их классификация». Рассмотрим основные понятия, относящиеся к этой теме.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x=a$, если: 1) $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a (то есть можно вычислить значения функции для всех значений $x \in (a-\delta, a+\delta)$, где δ есть некоторое положительное число); 2) существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества X , тогда говорят, что функция $f(x)$ непрерывна на множестве X .

Определение. Точка $x=a$ называется точкой разрыва функции $f(x)$, если $f(x)$ не является непрерывной в этой точке.

Из определения точки разрыва следует, что если $f(x)$ не определена в точке a , тогда точка a является точкой разрыва этой функции. Например, функция $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ не определена в точке $x=0$, следовательно, $x=0$ является точкой разрыва этой функции.

Из определения также следует, что $x=a$ является точкой разрыва функции, если не выполняется условие 2) определения непрерывности. Развернём подробнее условие 2), используя понятие односторонних пределов. Левосторонний и правосторонний пределы функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ обозначают так: $f(a-)$, $f(a+)$ и, по определению, $f(a-) = \lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x)$ (x стремится к a , оставаясь меньше a), $f(a+) = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ (x стремится к a , оставаясь больше a). Условие 2) будет равносильно следующему условию: существуют односторонние пределы $f(a-)$, $f(a+)$ и выполняются равенства $f(a-) = f(a+) = f(a)$. Следовательно, точка

$x=a$ будет точкой разрыва, если хотя бы одно из условий 2) не будет выполнено.

Определение. Точка $x=a$ называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если существуют односторонние пределы $f(a-)$, $f(a+)$ и $f(a-)\neq f(a+)$ либо $f(a-)=f(a+)\neq f(a)$. При этом число $f(a+)-f(a-)$ называют скачком функции $f(x)$ в точке $x=a$.

Определение. Точка $x=a$ называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $f(a-)$, $f(a+)$ не существует или равен бесконечности.

Пример. Функция $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ не определена в точке $x=0$, а значит, $x=0$ является точкой разрыва этой функции. Чтобы выяснить тип точки разрыва, вычислим односторонние пределы $f(a-)$, $f(a+)$. Так как $\frac{1}{x}\rightarrow-\infty$, а $e^{\frac{1}{x}}\rightarrow 0$, если $x\rightarrow 0, x<0$, то имеем $f(0-)=\lim_{x\rightarrow 0, x<0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$.

Аналогично, так как $\frac{1}{x}\rightarrow+\infty$, а $e^{\frac{1}{x}}\rightarrow+\infty$, если $x\rightarrow 0, x>0$, то $f(0+)=\lim_{x\rightarrow 0, x>0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$.

Следовательно, точка $x=0$ является точкой разрыва первого рода данной функции, так как $1=f(0-)\neq f(0+)=0$. Скачок функции в этой точке равен $f(0+)-f(0-)=0-1=-1$.

$$\text{Пример. } f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x\neq 0, \\ 0 & \text{при } x=0. \end{cases}$$

Проверим непрерывность этой функции в точке $x=0$. Так как существует (первый замечательный предел) $\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$, тогда, по теореме об односторонних пределах, существуют односторонние пределы $f(0-)$, $f(0+)$ и справедливы следующие равенства $f(0-)=f(0+)=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1\neq 0=f(0)$.

Следовательно, точка $x=0$ является точкой разрыва первого рода рассматриваемой функции, так как $f(0-)=f(0+)=1 \neq 0=f(0)$.

Пример. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Рассматриваемая функция не определена в точке $x=0$, а значит $x=0$ – точка разрыва $f(x)$. Вычислим односторонние пределы $f(0-)$, $f(0+)$. Имеем, $f(0-)=\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$, $f(0+)=\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

Так как правосторонний предел $f(0+)=+\infty$, то точка $x=0$ является точкой разрыва второго рода.

Выделим теперь основной класс непрерывных функций. Справедливо утверждение, что все элементарные функции (степенная x^n , показательная a^x , логарифмическая $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $tg x$, $ctg x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctg x$, $arcctg x$) непрерывны в своей области определения. Например, функция $\log_a x$ определена на множестве $(0, +\infty)$, а значит и непрерывна на этом множестве.

Перечислим основные свойства непрерывных функций. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x=a$.

Тогда: 1) функция $C f(x)$, где C есть постоянная, непрерывна в точке $x=a$; 2) $f(x)+g(x)$ непрерывна в точке $x=a$; 3) $f(x) g(x)$ непрерывна в точке $x=a$; 4) $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке $x=a$, если $g(a) \neq 0$; 5) непрерывность суперпозиции двух функций (сложной функции): если функция $u(x)$ непрерывна в точке $x=a$, $u_0 = u(a)$, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u=u_0$, тогда функция $g(x) = f(u(x))$ непрерывна в точке $x=a$.

Из непрерывности основных элементарных функций и свойств непрерывных функций следует, что сумма, произведение и частное двух элементарных функций непрерывна в своей области определения. Например, функция $\sin x + \ln x$ непрерывна на множестве $(0, +\infty)$; функция $\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$ непрерывна в своей области определения $(0, +\infty)$ как частное двух элементарных функций. Функция $\ln(1-x^2)$ определена на промежутке $(-1, 1)$, а значит и непрерывна на этом промежутке.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x < 1, \\ 2 - x & \text{при } 1 \leq x \leq 3, \\ 2x - 5 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Отметим, что во всех точках, кроме точек $x=1$, $x=3$, функция непрерывна как элементарная функция. Точки $x=1$, $x=3$ могут быть точками разрыва потому, что слева и справа от них функция задаётся разными аналитическими выражениями, а именно, $f(x)=x^2$ для $x < 1$ и $f(x)=2-x$ для $x > 1$. Вычислим односторонние пределы в этих точках. Имеем, $f(1-) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$, $f(1+) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2-x) = 1$, $f(1) = 2 - 1 = 1$.

Следовательно, $f(1+) = f(1-) = f(1) = 1$, а значит, рассматриваемая функция непрерывна в точке $x=1$. Для точки $x=3$ имеем, $f(3-) = \lim_{x \rightarrow 3, x < 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2-x) = -1$, $f(3+) = \lim_{x \rightarrow 3, x > 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x-5) = 1$, а $f(3) = 2 - 3 = -1$.

Следовательно, $f(3-) \neq f(3+)$ и точка $x=3$ является точкой разрыва первого рода рассматриваемой функции.

Задание 10. Это задание относится к теме: «Дифференциальное исчисление функции одной переменной». Основным понятием этой темы является понятие производной функции.

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется число $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, если этот предел существует; если в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$, тогда говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 ; если функция $f(x)$ дифференцируема на множестве X , то функция $f(x)$ называется дифференцируемой на множестве X .

Разность $x - x_0$ называют *приращением аргумента*, а разность $f(x) - f(x_0)$ называют *приращением функции*, соответствующим приращению аргумента $x - x_0$. Если обозначить приращение аргумента $\Delta x = x - x_0$, тогда производная, в эквивалентной форме, определится так $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Вычислим производную функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке x . По определению имеем,

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{x})' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

Из определения производной функции и замечательных пределов получают производные основных элементарных функций.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (производная степенной функции);
2. $(a^x)' = a^x \ln a$ (производная показательной функции), в частности $(e^x)' = e^x$;
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ (производная логарифмической функции), в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
4. $(\sin x)' = \cos x$;
5. $(\cos x)' = -\sin x$;
6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Например, чтобы вычислить производную функции $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$,

применяем пункт 1 таблицы и получаем $y' = (\sqrt[3]{x^2})' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Правила дифференцирования. Пусть функции $u(x), v(x)$ дифференцируемы в точке x , тогда справедливы равенства 1 – 4:

1. $(c)' = 0$ (производная постоянной величины равна нулю);
2. $(cu)' = cu'$ (постоянный множитель можно вынести за знак производной);
3. $(u + v)' = u' + v'$ (производная суммы равна сумме производных);
4. $(uv)' = u'v + uv'$ (производная произведения двух функций);
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (производная частного двух функций).
6. Дифференцирование сложной функции: если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x , $u = u(x)$, а функция $f(u)$ дифференцируема в точке u , тогда функция $g(x) = f(u(x))$ дифференцируема в точке x и справедливо равенство $g'(x) = f'(u) u'(x)$.

Пример. Пусть $y = 2 + x^2 e^x - \sin^2 x + \frac{3 + x^3}{x^2 - 1}$.

Вычислим y' . Из правил дифференцирования и таблицы производных получаем, что $y' = (2)' + (x^2 e^x)' - (\sin^2 x)' + \left(\frac{3 + x^3}{x^2 - 1}\right)' = 0 + (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' - 2 \sin x \cdot \cos x + \left(\frac{3 + x^3}{x^2 - 1}\right)' = 2x e^x + x^2 e^x - \sin 2x + \frac{(3 + x^3)'(x^2 - 1) - (3 + x^3)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} =$

$$= 2x e^x + x^2 e^x - \sin 2x + \frac{3x^2(x^2 - 1) - (3 + x^3)2x}{(x^2 - 1)^2} = 2x e^x + x^2 e^x - \sin 2x + \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4 - 6x}{(x^2 - 1)^2} = 2x e^x + x^2 e^x - \sin 2x + \frac{x^4 - 3x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Производные более высокого порядка

Определение. Производной второго порядка функции $f(x)$ в точке x_0 называют число $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$, если этот предел существует.

Из определения следует, что вторая производная функции является производной от первой производной, то есть $y'' = (y')'$. Аналогично, третья производная является производной от второй производной и т. д.

Пример. Вычислим вторую производную функции $y = x e^{x^2}$. Первая производная $y' = (x)' e^{x^2} + x(e^{x^2})' = e^{x^2} + x(2x e^{x^2}) = (1 + 2x^2)e^{x^2}$. Вторая производная $y'' = (1 + 2x^2)' e^{x^2} + (1 + 2x^2)(e^{x^2})' = 4x e^{x^2} + (1 + 2x^2) 2x e^{x^2} = (4x^3 + 6x) e^{x^2}$.

Дифференцирование функции, заданной неявно.

Принято говорить, что равенство

$$F(x, y) = 0 \quad (8)$$

задаёт y как функцию x , то есть $y = y(x)$. Для того, чтобы вычислить производную $y' = \frac{dy}{dx}$ необходимо продифференцировать равенство (8) по переменной x , считая y функцией x .

Пример. Вычислим y' , если $y(x)$ задана следующим уравнением

$$y^3 - x^2 y + 2x^2 - 3 = 0. \quad (9)$$

Дифференцируя равенство (9) по x и, используя правило дифференцирования сложной функции, получим, $3y^2 y' - 2xy' - x^2 y' + 4x = 0$.

Выразив из последнего равенства y' через x и y , получим $y' = \frac{2xy - 4x}{3y^2 - x^2}$.

Чтобы вычислить вторую производную, дифференцируем последнее равенство по x , и получаем

$$y'' = \frac{(2y + 2xy' - 4)(3y^2 - x^2) - (2xy - 4x)(6yy' - 2x)}{(3y^2 - x^2)^2}.$$

Можно y'' выразить только через x и y , заменив y' её выражением через x и y .

Дифференцирование функции, заданной параметрически.

Говорят что равенства

$$x = f(t), y = g(t), \text{ где } t_1 \leq t \leq t_2, \quad (10)$$

задают y как функцию x параметрически. Если параметр t есть время, тогда говорят, что равенства (10) задают закон движения материальной точки на плоскости (так как эти равенства позволяют в каждый момент времени t определять координаты точки).

Для вычисления первой и второй производных $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$

используем тот факт, что дифференциал функции $y(x)$ равен $dy = y'(x)dx$.

Следовательно, производная y' равна частному дифференциалов

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dg(t)}{df(t)} = \frac{g'(t)dt}{f'(t)dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Аналогично, получим формулу для вычисления второй производной функции $y(x)$ по переменной x , а

$$\begin{aligned} \text{именно: } y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d(y')}{dx} = \frac{d\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)}{df(t)} = \frac{\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)' dt}{f'(t)dt} = \frac{\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)'}{f'(t)} = \\ &= \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}. \end{aligned}$$

Окончательные выражения для y', y'' примут вид: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$,

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}.$$

Пример. Пусть функция $y(x)$ определена равенствами $x = e^{-2t}$, $y = e^{t^2}$. Тогда из выведенных формул получим $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(e^{t^2})'}{(e^{-2t})'} = \frac{2te^{t^2}}{-2e^{-2t}} = -te^{t^2+2t}$, а производная $y'' = \frac{(-te^{t^2+2t})'}{(e^{-2t})'} = -\frac{e^{t^2+2t} + t(2t+2)e^{t^2+2t}}{-2e^{-2t}} = \frac{(2t^2 + 2t + 1)e^{t^2+2t}}{2e^{-2t}} = (t^2 + t + \frac{1}{2})e^{t^2+4t}$.

Дифференциал и его свойства

Из определения производной функции $f(x)$ в точке x следует, что

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right) = 0.$$

Обозначим $\beta(\Delta x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x)$, где $\beta(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Из последнего равенства находим, что $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x$. Обозначив $\alpha(\Delta x) = \beta(\Delta x)\Delta x$, из последнего равенства

окончательно получим $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)$, где $\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 0$ при

$\Delta x \rightarrow 0$. При фиксированном x выражение $f'(x)\Delta x$ является линейной функцией одной переменной Δx и называется дифференциалом функции $f(x)$, соответствующим приращению аргумента Δx . Дифференциал обозначают $df(x, \Delta x)$ или кратко $df(x)$.

Следовательно, по определению, $df(x) = f'(x)\Delta x$. Так как $dx = (x)' \Delta x = \Delta x$, то дифференциал принято записывать в инвариантной форме $df(x) = f'(x)dx$.

Пример. Вычислим дифференциал функции $f(x) = x^3 + \sqrt{x} + 1$ при $x=1$, $\Delta x = 0,1$. По определению дифференциала $df(x) = (x^3 + \sqrt{x} + 1)' dx = \left(3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$. В точке $x=1$ получаем $df(1) = \frac{7}{2} dx$, а для $dx = \Delta x = 0,1$ будет $df(1; 0,1) = (3,5)(0,1) = 0,35$.

Перечислим основные свойства дифференциала.

1. $d(C) = 0$, где C – произвольная постоянная.

2. $d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x)$.

3. $d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$.

4. $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$.

5. Инвариантность формы дифференциала. Если x является независимой переменной, тогда $df(x) = f'(x)dx$. Если же x зависимая переменная, то есть $x = x(t)$, тогда, по правилу дифференцирования сложной функции, $df(x(t)) = f'_t dt = f'(x)x'(t)dt = f'(x)dx$ (так как $x'(t)dt$

$= dx$). Следовательно, форма дифференциала не зависит от того, является ли x независимой или зависимой переменной.

ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 2

ЗАДАНИЕ 1. Построить график функции

$$\begin{array}{llll} 0. y = x^2 + \frac{1}{x^2}; & 1. y = \frac{3-x^2}{x+2}; & 2. y = \frac{x^4}{x^3-1}; & 3. y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}; \\ 4. y = \frac{4x}{x^2+4}; & 5. y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}; & 6. y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}; & 7. y = x + \frac{1}{x}; \\ 8. y = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}; & 9. y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}. \end{array}$$

ЗАДАНИЕ 2. Вычислить данные пределы по правилу Лопиталя

$$\begin{array}{ll} 0. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}, & б) \lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{1-x}{x}}; \\ 1. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{5x^3}, & б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-4} \right)^{x^2+3}; \\ 2. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}, & б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-2}{x^2+2} \right)^{x^2+1}; \\ 3. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}, & б) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right); \\ 4. a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}, & б) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}; \\ 5. a) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}, & б) \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\ln(1-x)}; \\ 6. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{nx} - \cos nx}{e^{mx} - \cos mx}, & б) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}; \\ 7. a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{1 + \cos 4x}, & б) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x; \end{array}$$

$$8. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-x) \ln x, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$9. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \operatorname{tg} x, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt[3]{1+x^3} \right).$$

ЗАДАНИЕ 3. Вычислите частные производные второго порядка функций.

$$0. u = \frac{x-y}{x+2y}; \quad 1. u = \ln(e^{2x} - e^{-2y}); \quad 2. u = 2^{-y^2} \sqrt{x};$$

$$3. u = \sin^2(2xy + y^2); \quad 4. u = \frac{xy^2}{\sqrt{z}}; \quad 5. u = \frac{x - \sqrt{y}}{\sqrt{x+y}};$$

$$6. u = \ln\left(1 + \frac{x}{y^2}\right); \quad 7. u = \sin y + (x-y) \cos y;$$

$$8. u = \cos(1 + \sqrt{xy}); \quad 9. u = x^{\sqrt{yz}}.$$

ЗАДАНИЕ 4. Дано: функция $z = f(x, y)$, точка $M_0(x_0, y_0)$ и вектор $\bar{a} = a_x \bar{i} + b_y \bar{j}$.

Требуется: 1) вычислить градиент и производную функции $f(x, y)$ по направлению вектора $\bar{a}$ функции в точке M_0 ; 2) составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$; 3) найти точки локального экстремума функции $f(x, y)$.

$$0. z = x^3 - y^3 - 3x + 3y + 1, M_0(-1, 2), \bar{a} = -\bar{i} + 3\bar{j};$$

$$1. z = x^2 + 2y^2 - xy + 2x - y + 4, M_0(2, 1), \bar{a} = \bar{i} + \bar{j};$$

$$2. z = 3x^2 - y^2 + 2xy - 3x + y - 3, M_0(1, 1), \bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j};$$

$$3. z = x^2 + 6xy^2 - 8x - 12y + 10, M_0(0, 1), \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j};$$

$$4. z = xy + 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right), M_0(1, -1), \bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j};$$

$$5. z = x^3 + y^3 - 3xy, M_0(2, -3), \bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j};$$

$$6. z = x + y + \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right), M_0(1, 1), \bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j};$$

$$7. z = -4x^2 + 2xy - y^2 + 4x + 2y - 7, M_0(-1, 3), \bar{a} = \bar{i} + \bar{j};$$

$$8. z = (x-3)^2 + y^2, M_0(-2, 1), \bar{a} = \bar{i} - \bar{j};$$

$$9. z = x^2 + (y-2)^2, M_0(-1, -2), \bar{a} = -3\bar{i} - 4\bar{j}.$$

ЗАДАНИЕ 5.

0. Найдите размеры прямоугольного участка наибольшей площади, который можно огородить забором длины L .

1. Найдите размеры аквариума (без верхней крышки), имеющего форму прямоугольного параллелепипеда объёма V , на изготовление которого требуется наименьшее количество стекла.

2. Для изготовления цилиндрического бака (без верхней крышки) объёма V использовали материалы стоимостью C_1 (на изготовление дна) и C_2 (на изготовление боковой стенки) рублей за квадратный метр. Какими должны быть радиус основания и высота бака, чтобы стоимость расходуемого материала была наименьшей.

3. Найдите размеры ящика (с крышкой), имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, наибольшего объёма, который можно изготовить из $S \text{ м}^2$ железа.

4. Найдите размеры открытой цилиндрической ванны с полукруглым поперечным сечением и площадью поверхности $S \text{ м}^2$, имеющей наибольшую вместимость.

5. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ найдите точку, сумма квадратов расстояний которой от двух данных точек $A(2, -1, 1)$, $B(-1, 3, 4)$ была бы наименьшей.

6. Найдите размеры прямоугольного параллелепипеда наибольшего объёма, который можно вписать в полушар радиуса R .

7. Найдите размеры прямоугольника (стороны которого параллельны полуосям) наибольшей площади, который можно вписать в эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

8. Найдите размеры прямоугольного параллелепипеда наибольшего объёма, который можно вписать в прямой круговой конус высоты h и с радиусом основания r .

9. Найдите размеры прямоугольника с периметром P , который при вращении вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объёма.

ЗАДАНИЕ 6. Вычислите данные неопределённые интегралы.

0. а) $\int \frac{2x^2 + 3}{x(x+2)} dx$, б) $\int (2x+1)\cos 3x dx$, в) $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x+1}} dx$, г) $\int \cos^3 x dx$;
1. а) $\int \frac{3x+1}{x^2+x+2} dx$, б) $\int (4x+3)e^{2x} dx$, в) $\int x\sqrt{4-x^2} dx$, г) $\int \sin^3 x dx$;
2. а) $\int \frac{x^2+1}{x(x^2+2x+5)} dx$, б) $\int x^2 \sin 3x dx$, в) $\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$, г) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$;
3. а) $\int \frac{x^4+5}{x^2-2x+2} dx$, б) $\int (x+1)\ln x dx$, в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, г) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$;
4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$, б) $\int x \ln^2 x dx$, в) $\int \sqrt{x^2+2} dx$, г) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$;
5. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$, б) $\int \operatorname{arctg} 3x dx$, в) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+2x^2}}$, г) $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^3 x}$;
6. а) $\int \frac{x^2+x+1}{x^2(x-1)} dx$, б) $\int x \operatorname{arctg} x dx$, в) $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}}$, г) $\int \frac{dx}{\sin 2x}$;
7. а) $\int \frac{x+2}{x^2-x^2+x-1} dx$, б) $\int \operatorname{arcctg} 2x dx$, в) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{4-x^2}}$, г) $\int \frac{x dx}{1+\sqrt{x}}$;
8. а) $\int \frac{x^3+2x+3}{x^2+4x+5} dx$, б) $\int e^{\sqrt{x}} dx$, в) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$, г) $\int \sin 2x \sin 4x dx$;
9. а) $\int \frac{(x+2)dx}{x(x-1)^2}$, б) $\int \sin \sqrt{x} dx$, в) $\int \frac{e^{2x} dx}{1+e^x}$, г) $\int \cos 3x \cos 5x dx$.

ЗАДАНИЕ 7. Вычислите определённые интегралы.

0. а) $\int_1^e \ln x dx$, б) $\int_0^5 \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{3x+1}}$;
1. а) $\int_0^1 (x+1)e^x dx$, б) $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$;
2. а) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$, б) $\int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx$;
3. а) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}$, б) $\int_0^1 x(1+x)^{10} dx$;
4. а) $\int_1^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$, б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$;

$$\begin{array}{ll}
5. \text{ a) } \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx; \\
6. \text{ a) } \int_1^e x^2 \ln^2 x dx, & \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^4 x dx; \\
7. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx, & \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^4 x - \cos^4 x}; \\
8. \text{ a) } \int_1^2 x \log_2 x dx, & \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2}; \\
9. \text{ a) } \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \arcsin x dx, & \text{б) } \int_0^1 \frac{(4x+2)dx}{x^2+x+2}.
\end{array}$$

ЗАДАНИЕ 8. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$\begin{array}{ll}
0. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}, & \text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}; \\
1. \text{ a) } \int_0^{+\infty} x e^{-x^2}, & \text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}; \\
2. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2}}, & \text{б) } \int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+2)^2}; \\
3. \text{ a) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}, & \text{б) } \int_0^e \ln x dx; \\
4. \text{ a) } \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(1+x^2) \arctg x}, & \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}; \\
5. \text{ a) } \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)}, & \text{б) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \\
6. \text{ a) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-3}, & \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}; \\
7. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx, & \text{б) } \int_{-2}^2 \frac{x dx}{\sqrt{x+2}}; \\
8. \text{ a) } \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx, & \text{б) } \int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^3}};
\end{array}$$

9) а) $\int_{-\infty}^0 x^2 e^x dx$, б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

ЗАДАНИЕ 9.

0. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \frac{x}{4}$.

1. Найдите площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $x + y = 2$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ и прямой $y = 0$.
 $0 \leq t \leq 2\pi$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $r = a \sin 4\varphi$, $a > 0$.

5. Перейдя к полярным координатам, найдите площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = a^2(3x^2 + y^2)$.

6. Найдите длину дуги кривой $y = \ln(\sin x)$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. 7). Найдите длину одного витка винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

8. Найдите объём тела, полученного вращением фигуры $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси ОХ.

9. Найдите объём эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 2

Задание 1. Это задание относится к теме: «Исследование функции с помощью производной и построение её графика». Для того чтобы построить график функции $f(x)$ необходимо провести исследование основных свойств этой функции по следующей схеме:

- 1) найти область определения $D(f)$ функции $f(x)$;
- 2) найти точки пересечения графика функции с координатными осями;
- 3) выяснить, является ли функция $f(x)$ чётной или нечётной;
- 4) выяснить, является ли функция $f(x)$ периодической или нет;
- 5) найти интервалы возрастания (убывания) функции и точки локального экстремума;
- 6) найти интервалы выпуклости вверх (вниз) и точки перегиба функции;
- 7) найти вертикальные и наклонные асимптоты кривой $y = f(x)$ (графика функции $f(x)$); исследовать поведение функции на границах области определения $D(f)$ (например, область определения логарифмической функции $D(\ln x) = (0, +\infty)$; на границе $x = 0$ области определения поведение функции определится в пункте 7), так как прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой и $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, а на границе $+\infty$ необходимо вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$).

Остановимся подробнее на каждом выше указанном пункте схемы.

1. Областью определения функции $f(x)$ называют множество всех значений аргумента x , для которых можно выполнить все указанные в функции действия над аргументом. Область определения функции $f(x)$ принято обозначать $D(f)$. Например, область определения функции

$\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ определяется системой неравенств $x+1 \neq 0$, $\frac{x}{x+1} \geq 0$. Эти

неравенства эквивалентны неравенствам $\begin{cases} x \geq 0, \\ x+1 > 0, \end{cases}$ либо $\begin{cases} x \leq 0, \\ x+1 < 0. \end{cases}$ После

объединения решений двух последних систем неравенств получим, что $D(f) =$

$$= (-\infty, -1) \cup [0, +\infty).$$

2. Точка пересечения графика функции $f(x)$ с осью OY (осью ординат) имеет координаты $(0, f(0))$. Чтобы найти точку пересечения графика с осью OX (осью абсцисс) необходимо решить уравнение $f(x) = 0$; если точка x_0 – решение этого уравнения, то есть $f(x_0) = 0$, тогда точка с координатами $(x_0, 0)$ является точкой пересечения графика функции с осью OX .

Если уравнение $f(x) = 0$ имеет несколько решений $x_1, x_2, \dots, x_m$, тогда точки $(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_m, 0)$ будут точками пересечения графика с осью ОХ. Найдём, например, точки пересечения графика функции $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$ с координатными осями. Так как $f(0) = 2$, тогда точка пересечения с осью ОУ имеет координаты $(0, 2)$. Для определения точек пересечения графика с осью ОХ решим уравнение $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 0$, которое эквивалентно квадратному уравнению $x^2 - 3x + 2 = 0$, имеющему два решения $x = 1, x = 2$.

Следовательно, график рассматриваемой функции пересекает ось ОХ в двух точках с координатами $(1, 0), (2, 0)$.

3. Определение. Функция $f(x)$ называется чётной, если для любых значений аргумента x , принадлежащих области определения $D(f)$, выполняется равенство $f(x) = f(-x)$; если же для любых $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, тогда функция $f(x)$ называется *нечётной*.

Области определения чётной и нечётной функций должны быть симметричны относительно точки $x = 0$, так как вместе с точкой x множеству $D(f)$ принадлежит и точка $-x$. Например, функции $x^2, \sin x^2$ являются *чётными*, так как для них выполняется равенство $f(x) = f(-x)$, а функции $x^3, \sin x, x^5 e^{-x^2}$ являются *нечётными*, так как для них выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Очевидно, что произведение двух нечётных функций является чётной функцией, а произведение чётной функции на нечётную является функцией нечётной.

Например, функция $x^3 \sin x$ является чётной, так как получена умножением двух нечётных функций, а функция $x^3 \cos x$ является нечётной как произведение чётной и нечётной функций. Функция $\ln x$ не является ни чётной, ни нечётной функцией, так как её область определения $D(\ln x) = (0, +\infty)$ не симметрична относительно начала координат.

Свойства чётности и нечётности функции при построении графиков функций используются следующим образом: график чётной функции симметричен относительно оси ОУ, а график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Следовательно, достаточно построить график таких функций для

$x \geq 0$, а затем отобразить симметрично относительно оси ОУ (для чётной функции) либо относительно начала координат (для нечётной функции).

4. Определение. Функция $f(x)$ называется *периодической с периодом* T , если для всех $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.

Очевидно, что если число T является периодом функции $f(x)$, тогда числа kT , где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, также являются периодами этой функции. Основным периодом функции называют *наименьший положительный период этой функции*.

Следовательно, основной период функций $\sin x$, $\cos x$, $e^{\sin x}$ равен 2π , а основной период функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $e^{\operatorname{tg} x}$ равен π . Отметим, что если основной период функции $f(x)$ равен T , тогда основной период функции $f(ax)$ будет равен $\frac{T}{a}$, где $a \neq 0$.

Действительно, $f(ax) = f(ax+T) = f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)$.

Следовательно, по определению периода, $\frac{T}{a}$ будет основным периодом функции $f(ax+T)$. Отсюда следует, что основным периодом функций $\sin 5x$, $\cos 5x$, $e^{\sin 5x}$ будет число $\frac{2\pi}{5}$, а основной период функций $\operatorname{tg} \frac{x}{3}$, $\operatorname{ctg} \frac{x}{3}$, $e^{\operatorname{tg} \frac{x}{3}}$ будет равен $\pi : \frac{1}{3} = 3\pi$.

Периодичность функции при построении графика учитывают следующим образом: строят график функции на промежутке $0 \leq x \leq T$, или на любом другом промежутке длины T , а затем продолжают этот график по периоду на всю область определения.

5. Функция $f(x)$ называется *монотонно* возрастающей (*монотонно* убывающей) на интервале (a,b) , если для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$, таких что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Для того чтобы функция $f(x)$ монотонно возрастала (монотонно убывала) на интервале (a,b) достаточно чтобы её производная $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех значений $x \in (a,b)$, за исключением конечного числа точек, в которых $f'(x) = 0$. Например, функция $f(x) = x^3$ имеет производную $f'(x) = 3x^2 > 0$ для всех $x \neq 0$, а $f'(0) = 0$. Следовательно, эта функ-

ция монотонно возрастает на всей числовой прямой.

Определение. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (локального минимума) *функции* $f(x)$, если существует число $\Delta > 0$ такое, что для любых значений $x \in (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$). Точки локального максимума и локального минимума функции $f(x)$ называют *точками экстремума этой функции*.

Необходимый признак экстремума. Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и существует производная $f'(x_0)$, тогда $f'(x_0) = 0$.

Из необходимого признака экстремума следует, что у дифференцируемой функции точками экстремума могут быть только такие точки, в которых производная этой функции равна нулю. Такие точки называют *стационарными точками функции*.

Точками экстремума функции могут быть и такие точки, в которых $f(x)$ непрерывна, но не дифференцируема. Все точки этих двух типов, которые могут быть точками экстремума, называют *критическими точками этой функции*.

Например, функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ непрерывна для любых

$$x \in (-\infty, +\infty). \text{ Производная этой функции } f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}.$$

Решив уравнение $f'(x) = 0$, найдём единственную стационарную точку $x = 0$. Но так как производная рассматриваемой функции не существует в точках $x = \pm 1$ (в этих точках знаменатель дроби равен 0), то у функции, кроме стационарной точки $x = 0$, имеются две критических точки второго типа $x = \pm 1$.

Таким образом, для отыскания точек локального минимума и локального максимума функции сначала необходимо найти все критические точки этой функции. Так как не все критические точки в действительности являются точками экстремума функции, необходимо каждую из них проверить на наличие экстремума с помощью достаточных признаков экстремума. Рассмотрим два достаточных признака экстремума.

Первый достаточный признак экстремума. Пусть точка x_0 является критической точкой $f(x)$ и существует производная $f'(x)$ на множестве $(x_0 - \Delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \Delta)$, где число $\Delta > 0$.

1. Если $f'(x) > 0$ на промежутке $(x_0 - \Delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ на промежутке $(x_0, x_0 + \Delta)$ (производная меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0), тогда точка x_0 является точкой локального максимума $f(x)$.

2. Если $f'(x) < 0$ на промежутке $(x_0 - \Delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ на промежутке $(x_0, x_0 + \Delta)$ (производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0), тогда точка x_0 является точкой локального минимума $f(x)$.

3. Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на множестве $(x_0 - \Delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \Delta)$ (производная не меняет знак при переходе через точку x_0), тогда точка x_0 не является точкой экстремума.

Второй достаточный признак экстремума. Пусть точка x_0 является стационарной точкой $f(x)$ (то есть $f'(x_0) = 0$). Тогда: 1) если $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 является точкой локального минимума; 2) если $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 является точкой локального максимума $f(x)$.

Пример. Выше было установлено, что функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ имеет три критических точки $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Для проверки этих точек на экстремум применим первый достаточный признак экстремума (второй признак не применим к точкам ± 1 , так как в этих точках не существует производная $f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$). Из выражения для производной видно, что знаменатель дроби $\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} > 0$ для всех значений x , кроме $x = \pm 1$.

Следовательно, производная меняет знак с минуса на плюс в точке $x = 0$ ($f'(x) < 0$ при $x < 0$ и $f'(x) > 0$ при $x > 0$), и точка $x = 0$ является точкой локального минимума. На промежутках $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ производная отрицательна (функция монотонно убывает), а на промежутках $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ производная положительна (функция монотонно возрастает).

Следовательно, производная не меняет знак при переходе через точки $x = \pm 1$, а значит, эти точки не являются точками экстремума.

Так как точка $x = 0$ является стационарной, то для проверки этой точки на экстремум можно применить и второй достаточный признак экстремума. Действительно, $f''(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} - \frac{8x^2}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^5}}$, а $f''(0) = \frac{2}{3} > 0$.

Следовательно, точка $x = 0$ является точкой локального минимума рассматриваемой функции.

6. Определение. Кривая $y = f(x)$ называется выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале (a, b) , если она расположена под касательной (над касательной), проведенной к этой кривой в любой точке $x_0 \in (a, b)$.

Так как уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0)$, то из определения следует, что кривая выпукла вверх на интервале (a, b) , если для любых $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f'(x_0)(x - x_0)$, и выпукла вниз на этом интервале, если выполняется противоположное неравенство $f(x) > f'(x_0)(x - x_0)$.

Справедливо следующее достаточное условие выпуклости вверх (вниз) на интервале: а) если $f''(x) > 0$ для любых $x \in (a, b)$, тогда кривая $y = f(x)$ выпукла вниз на (a, b) ; б) если $f''(x) < 0$ для любых $x \in (a, b)$, тогда кривая $y = f(x)$ выпукла вверх на интервале (a, b) .

Определение. Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба кривой $y = f(x)$, если кривая меняет направление выпуклости в этой точке. То есть существует число $\Delta > 0$ такое, что на интервале $(x_0 - \Delta, x_0)$ кривая выпукла вверх (вниз), а на интервале $(x_0, x_0 + \Delta)$ выпукла вниз (вверх).

Необходимый признак точки перегиба. Если точка $M_0(x_0, f(x_0))$ кривой $y = f(x)$ является точкой перегиба и существует $f''(x_0)$, тогда $f''(x_0) = 0$.

Из необходимого признака следует, что точками перегиба кривой могут быть только точки, в которых $f''(x_0) = 0$ либо вторая производная не существует, а функция непрерывна.

Достаточный признак точки перегиба. 1). Если $f''(x) < 0$ ($f''(x) >$

> 0) для всех $x \in (x_0 - \Delta, x_0)$ и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) для всех $x \in (x_0, x_0 + \Delta)$, тогда точка M_0 является точкой перегиба кривой. 2). Если $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) для всех $x \in (x_0 - \Delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \Delta)$, тогда точка M_0 не является точкой перегиба кривой $y = f(x)$.

Пример. Найдём точки перегиба кривой $y = xe^{-2x^2}$. Находим, $y' = e^{-2x^2} + xe^{-2x^2}(-4x) = (1 - 4x^2)e^{-2x^2}$, а $y'' = -8xe^{-2x^2} + (1 - 4x^2) \times e^{-2x^2}(-4x) = (16x^3 - 12x)e^{-2x^2} = 4x(4x^2 - 3)e^{-2x^2}$.

Так как вторая производная существует для любых x , то точками перегиба могут быть только точки, в которых $y'' = 4x(4x^2 - 3)e^{-2x^2} = 0$. Последнее уравнение имеет три корня $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Так как $y'' < 0$ при $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $y'' > 0$ при $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $y'' < 0$ при $x \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $y'' > 0$ при $x \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty)$, то рассматриваемая кривая выпукла вверх на множестве $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cup (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ и выпукла вниз на множестве $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0) \cup (\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty)$, а точки $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ являются точками перегиба кривой.

7. Определение. Прямая линия $x = a$ называется *вертикальной асимптотой кривой* $y = f(x)$ (графика функции $f(x)$), если хотя бы один из односторонних пределов $f(a-)$, $f(a+)$ равен ∞ .

Например, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой кривой $y = \ln x$, так как правосторонний предел $f(a+) = \lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty$.

Функция $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ имеет две вертикальные асимптоты $x = \pm 1$, так как пределы $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{x}{x^2 - 1} = \infty$. Для более точного представления о

поведении кривой при её приближении к асимптотам вычислим односторонние пределы. Имеем, предел

слева $f(-1-) = \lim_{x \rightarrow -1, x < -1} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$, предел справа $f(-1+)$

$= \lim_{x \rightarrow -1, x > -1} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$; для вертикальной асимптоты $x=1$ левосторонний

предел $f(1-)$ $= \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$, а правосторонний

предел $f(1+) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$.

Определение. Прямая линия L , заданная уравнением $y = kx + b$, называется наклонной асимптотой кривой $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (при $x \rightarrow -\infty$), если расстояние от точки $M(x, f(x))$ этой кривой до прямой L стремится к нулю ($d(M, L) \rightarrow 0$) при $x \rightarrow +\infty$ (при $x \rightarrow -\infty$).

В случае $k = 0$, то есть асимптота имеет уравнение $y = b$, её принято называть горизонтальной асимптотой. Отыскание наклонных асимптот основано на следующей теореме.

Теорема. Прямая линия L , заданная уравнением $y = kx + b$, является наклонной асимптотой кривой $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (при $x \rightarrow -\infty$) $\Leftrightarrow$ а)

существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ (существует $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k$), б) существует

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k \cdot x) = b$ (существует $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k \cdot x) = b$).

Пример. Найдём наклонные асимптоты кривой $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. Сначала

ищется угловой коэффициент прямой $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} =$

$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$. После того, как найден коэффициент $k =$

$= 1$, находим коэффициент $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) =$

$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$. Вычисление коэффициентов k, b

асимптоты проведено при $x \rightarrow \pm\infty$, так как вычисляемые пределы одинаковы как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$. Таким образом,

рассматриваемая кривая имеет при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ одну и ту же наклонную асимптоту $y = x$.

Задание 2. При вычислении пределов функций возникают семь типов неопределённостей $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[0 \cdot \infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[\infty - \infty]$.

Неопределённости первых двух типов возникают при вычислении пределов вида $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, когда числитель и знаменатель дроби

одновременно стремятся к 0 или ∞ , то есть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ либо

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ (возможно $a = \infty$). Такого рода

неопределённости непосредственно раскрывает следующая теорема.

Теорема (Лопиталья). Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b) ;

2) $g'(x) \neq 0$ на (a, b) ;

3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ либо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$;

4) существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Тогда существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Теорема сформулирована для случая левостороннего предела $x \rightarrow a$, $x > a$. Утверждение этой теоремы остаётся верным и в случае правостороннего предела $x \rightarrow b$, $x < b$. Возможно также, что $a = -\infty$, $b = +\infty$, $A = \pm\infty$.

Пример. Вычислим $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{e^x - 1}$. Видно, что $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-x) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0$.

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1-x))'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{1}{1-x}\right)}{e^x} = -1$.

Пример. Вычислим $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}$. Применяв правило Лопиталя

(числитель и знаменатель дроби стремятся к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$), получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln^2 x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{x}\right) \ln x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{9x^3} = 0.$$

Раскрытие неопределённости $[0 \cdot \infty]$. Такого рода неопределённость возникает при вычислении предела вида $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$, когда

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. В этом случае исходный предел преобразуют

к одному из двух видов $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}$ либо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)}$. В первом случае

$f(x) \rightarrow 0$ и $\frac{1}{g(x)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ (неопределённость типа $\left[\frac{0}{0}\right]$), а во втором

случае $g(x) \rightarrow \infty$ и $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$ (неопределённость типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$).

Затем, применяя правило Лопиталя, получают $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'} \text{ либо } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}$$

Пример. Вычислим $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$. Так как $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) = 0$, а

$\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \infty$, то имеем неопределённость типа $[0 \cdot \infty]$. Здесь удобнее

отправить в знаменатель $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$, так как $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}\right)^{-1} = \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}$. Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)'}{(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2})'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\frac{-1}{\sin^2 \left(\frac{\pi x}{2} \right)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)} = \frac{2}{\pi}.$$

Раскрытие неопределённостей $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$. Такие неопределённости возникают при вычислении пределов вида $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$. Если $f(x) \rightarrow 1$, $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$, то возникает

неопределённость $[1^\infty]$. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ то возникает

неопределённость $[0^0]$. Если же основание степени $f(x) \rightarrow \infty$, а показатель степени $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, то возникает неопределённость типа $[\infty^0]$. Для раскрытия таких неопределённостей представим данный

предел в виде $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)}$ (так как по основному

логарифмическому тождеству $f(x) = e^{\ln f(x)}$). Во всех трёх случаях в показателе степени возникает неопределённость типа $[0 \cdot \infty]$, так как один из сомножителей стремится к 0, а другой сомножитель стремится к ∞ при $x \rightarrow a$. Вычислив, как было показано в предыдущем пункте, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln f(x)$, затем вычисляют $\lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)}$.

Пример. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x = 0$,

то имеем неопределённость $[0^0]$ и $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x)}$.

Вычислим сначала предел показателя степени $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x} = \quad (\text{так как имеем неопределённость } \left[\frac{\infty}{\infty} \right])$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\sin x))'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\left(\frac{-1}{\sin^2 x} \right)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 x = - \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \sin x = 0.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} e^{tgx \cdot \ln(\sin x)} = e^0 = 1$.

Раскрытие неопределённости типа $[\infty - \infty]$. Такого рода неопределённость раскрывается сведением к неопределёностям первых трёх типов тождественными преобразованиями.

Пример. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$. Приведя дробь под знаком

$$\begin{aligned} & \text{предела к общему знаменателю, получим } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \right) = (\text{неопределённость вида } \left[\frac{0}{0} \right]) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = (\text{так как числитель и знаменатель} \\ & \text{стремятся к 0, то ещё раз применяем правило Лопиталя}) = \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\frac{1}{x})'}{(\ln x + 1 - \frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Задание 3. Рассмотрим функцию трёх независимых переменных $f(x, y, z)$. Обозначим Δx , Δy , Δz приращения аргументов x, y, z . Разности $\Delta_x f = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$, $\Delta_y f = f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)$, $\Delta_z f = f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$ называют частными приращениями функции $f(x, y, z)$, соответствующими приращениям аргументов Δx , Δy , Δz .

Определение. Частной производной первого порядка функции $f(x, y, z)$ по переменной x в точке (x, y, z) называют предел отношения частного приращения $\Delta_x f$ функции по переменной x к приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$.

Эту частную производную обозначают f'_x или $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$.

Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$.

Аналогично определяют частные производные первого порядка по

переменным y, z а именно, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y f}{\Delta y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z f}{\Delta z}$. Из определения частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ видно, что при её вычислении изменяется только переменная x , а переменные y, z остаются постоянными. Отсюда вытекает правило вычисления частной производной по переменной x : при вычислении $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ необходимо рассматривать функцию $f(x, y, z)$ как функцию одной переменной x , считая переменные y, z постоянными. Аналогично, при вычислении $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ функцию $f(x, y, z)$ рассматривают как функцию одной переменной y , а переменные x, z считают постоянными. При этом используются правила дифференцирования функции одной переменной.

Пример. Вычислим частные производные первого порядка функции $f(x, y, z) = x^{yz}$. При вычислении $\frac{\partial f}{\partial x}$ данная функция является степенной (x переменная, а y, z являются постоянными), а при вычислении $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$ функция является показательной (основание степени x является постоянной). Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x} = \left(x^{yz}\right)'_x = yz \cdot x^{yz-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \left(x^{yz}\right)'_y = x^{yz} \cdot \ln x \cdot (yz)'_y = x^{yz} z \ln x$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \left(x^{yz}\right)'_z = x^{yz} \ln x (yz)'_z = x^{yz} y \ln x$.

Частные производные более высокого порядка. Из последнего примера видно, что частные производные первого порядка являются функциями x, y, z и следовательно, эти функции можно также дифференцировать по переменным x, y, z . Эти производные называют частными производными второго порядка и обозначают $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$. Аналогично, частную производную первого порядка $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ можно дифференцировать по переменным

x, y, z , а именно, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$.

Дифференцируя $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ по переменным x, y, z , получаем частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$. Следовательно, функция трёх переменных $f(x, y, z)$ имеет девять частных производных второго порядка, но некоторые из этих производных совпадают. Справедлива следующая теорема о смешанных производных.

Теорема. Если функция многих переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ (их называют смешанными производными второго порядка), тогда эти производные равны, то есть $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. Из теоремы следует, что у функции трёх переменных $f(x, y, z)$ равны следующие пары смешанных производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$.

Пример. Вычислим частные производные второго порядка функции $f(x, y, z) = x^{yz}$. Частные производные первого порядка вычислены в предыдущем примере $\frac{\partial f}{\partial x} = yz x^{yz-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{yz} z \ln x$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x^{yz} y \ln x$.

$$\begin{aligned} \text{Имеем, } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(yz \cdot x^{yz-1} \right)'_x = yz(yx-1)x^{yz-2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \\ &= \left(yz \cdot x^{yz-1} \right)'_y = z \left(y x^{yz-1} \right)'_y = z \left(x^{yz-1} + x^{yz-1} y z \ln x \right) = z x^{yz-1} (1 + yz \ln x), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \left(yz x^{yz-1} \right)'_z = y \left(z \cdot x^{yz-1} \right)'_z = y \left(x^{yz-1} + z x^{yz-1} y \ln x \right) = \\ &= y x^{yz-1} (1 + yz \ln x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(x^{yz} z \ln x \right)'_y = z \cdot \ln x \cdot \left(x^{yz} \right)'_y = z \ln x x^{yz-1} z \ln x = \\ &= z^2 \ln^2 x x^{yz-1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \left(x^{yz} z \ln x \right)'_z = \ln x \left(x^{yz} z \right)'_z = \ln x \left(x^{yz} + z x^{yz} y \ln x \right) = \end{aligned}$$

$$\ln x \cdot X^{yz} (1 + \dots + zy \cdot \ln x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(X^{yz} y \ln x \right)_z = y \ln x \left(X^{yz} \right)_z = y \cdot \ln x \cdot X^{yz} \cdot \ln x \cdot y = y^2 \cdot \ln^2 x \cdot X^{yz}.$$

Задание 4. Градиентом функции $f(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ называют вектор из частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}(M)\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(M)\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(M)\bar{k}$ и обозначают $\text{grad}f(M)$. Вычислим, например, градиент функции $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^3 + z^4}$ в точке $M(-1, 1, -1)$. Вычислим сначала частные производные $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^3 + z^4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3 + z^4}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^3 + z^4}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{4z^3}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^3 + z^4}}$. Далее, вычислив значения этих производных в точке M , получим $\frac{\partial f}{\partial x}(M) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(M) = -\frac{4}{2 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}.$

$$\text{Следовательно, } \text{grad}f(M) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\bar{k}.$$

Производная функции $f(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ по направлению вектора $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ обозначается $\frac{\partial f}{\partial \bar{a}}(M)$ и определяется следующим равенством:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{a}}(M) = \text{grad}f(M) \cdot \bar{e}_{\bar{a}} = \frac{\partial f}{\partial x}(M) \frac{a_x}{|\bar{a}|} + \frac{\partial f}{\partial y}(M) \frac{a_y}{|\bar{a}|} + \frac{\partial f}{\partial z}(M) \frac{a_z}{|\bar{a}|},$$

в правой части которого стоит скалярное произведение градиента и единичного орта вектора $\bar{a}$. Понятие производной по направлению вектора является естественным обобщением понятия частных производных. Действительно, $\frac{\partial f}{\partial \bar{i}}(M) = \text{grad}f(M) \cdot \bar{i} = \frac{\partial f}{\partial x}(M)$. То есть частная производная по переменной x равна производной по направлению единичного орта $\bar{i}$ оси Ox .

Вычислим производную по направлению вектора $\bar{a} = (-2, 1, 2)$ функции $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^3 + z^4}$ в точке $M(-1, 1, -1)$. Длина этого

вектора $|\bar{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$, единичный орт вектора $\bar{e}_{\frac{1}{a}} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Следовательно,
$$\frac{\partial f}{\partial a}(M) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}{18} = -\frac{\sqrt{3}}{18}.$$

Экстремум функции двух переменных

Определение. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой локального максимума (локального минимума) функции $f(x, y)$, если существует число

$\Delta > 0$ такое, что для любых точек плоскости $M(x, y)$, удовлетворяющих неравенству $|M - M_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \Delta$, выполняется неравенство $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ для точки локального минимума).

Необходимый признак экстремума. Если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой локального экстремума (точкой локального максимума или минимума) функции $f(x, y)$ и в этой точке существуют частные производные первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, тогда $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0$.

Точки плоскости, в которых частные производные первого порядка равны нулю, называют стационарными точками функции $f(x, y)$. Из необходимого признака экстремума следует, что для отыскания точек локального экстремума функции необходимо сначала найти стационарные точки этой функции.

Например, стационарные точки функции $u = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} + xy$ являются

решением системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2} + y = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + x = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $y = -\frac{1}{x^2}$. Подставив это выражение во второе уравнение вместо y , получим равенство

$-x^4 + x = x(1 - x^3) = 0$, из которого находим два корня $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Первый корень не входит в область определения функции, а по второму корню $x_2 = 1$ находим $y_2 = -1$ и стационарную точку $M_0(1, -1)$.

Достаточный признак экстремума. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ является стационарной точкой функция $f(x, y)$ ($\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0$), и функция имеет в этой точке непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)$, $\Delta = AC - B^2$. Тогда: 1) если $A > 0$ и $\Delta > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ является точкой локального минимума; 2) если $A < 0$ и $\Delta > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ является точкой локального максимума; 3) если $\Delta < 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ не является точкой локального экстремума; 4) если $A = 0$ либо $\Delta = 0$, тогда требуется дополнительное исследование.

Пример. Найдём точки локального экстремума функции $u = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} + xy$. Ранее была найдена единственная стационарная точка этой функции $M_0(1, -1)$. Вычисляем частные производные второго порядка в стационарной точке. Имеем, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2}{x^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}$. Следовательно, $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = -2$, $B = 1$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1) = -2$, $\Delta = AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$.

Таким образом, $A = -2 < 0$, $\Delta = 3 > 0$ и точка $M_0(1, -1)$ является точкой локального максимума рассматриваемой функции.

Пусть поверхность в пространстве задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит этой поверхности, то есть $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Тогда уравнение касательной плоскости, проведенной к этой поверхности в точке M_0 , имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0.$$

В частности, когда уравнение поверхности задано уравнением $z = f(x, y)$, это уравнение можно переписать в виде $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$.

$=0$. Тогда будет $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$, а уравнение касательной плоскости примет следующий вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0, \text{ где } z_0 = f(x_0, y_0).$$

Составим уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $z = \sqrt{x^2 + y^3}$ в точке $(-1, 2)$. Находим, что $z_0 = \sqrt{(-1)^2 + 2^3} = 3$. В

нашем случае $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$, следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^3}}$. Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 2) = -\frac{1}{3}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 2) = 2$ и уравнение

искомой касательной плоскости имеет вид $z - 3 = -\frac{1}{3}(x + 1) + 2(y - 2)$.

Умножив последнее равенство на 3, и перенося всё в левую часть, получим окончательно $x - 6y + 3z = 0$.

Задание 6. Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке (a, b) , если для любых $x \in (a, b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Свойства первообразной. 1). Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, тогда $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, тоже является первообразной для $f(x)$. 2). Если $F_1(x), F_2(x)$ — первообразные для функции $f(x)$, тогда $F_2(x) = F_1(x) + C$, где C — постоянная. 3). Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, тогда $\frac{1}{a}F(ax + b)$ — первообразная для функции $f(ax + b)$. Например, $\sin x$ — первообразная для функции $\cos x$ (так как $(\sin x)' = \cos x$), следовательно, функция $\frac{1}{2}\sin(2x + 3)$ будет первообразной для функции $\cos(2x + 3)$.

Неопределённый интеграл. Из свойств первообразной следует, что множество всех первообразных для функции $f(x)$ можно представить в виде $F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных, C — произвольная постоянная.

Определение. Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ назы-

ваются множество всех первообразных для этой функции; неопределённый интеграл обозначают $\int f(x)dx$. Следовательно, $\int f(x)dx = F(x) + C$, где

$F(x)$ – одна из первообразных. Например, $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Свойства неопределённого интеграла. 1). Линейность $\int C f(x)dx = C \int f(x)dx$ (постоянный множитель можно вынести за знак интеграла);
 $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ (интеграл от суммы функций равен сумме интегралов). Например, $\int (x + 3x^2)dx = \int xdx + 3 \int x^2 dx = \frac{x^2}{2} + x^3 + C$. 2) $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$ (производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции). 3) $d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx$ (дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению).

Таблица неопределённых интегралов

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C;$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ в частности } \int e^x dx = e^x + C;$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \text{ в частности } \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$9. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \text{ в частности } \int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C.$$

Докажем равенство 10. По определению первообразной нужно доказать, что производная правой части этого равенства равна подинтегральной функции. Действительно, имеем $\left(\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \times \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}} 2x\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$

Пример. Вычислим $\int \frac{x + \sqrt{x+x^2} \sin 3x}{x^2} dx$. Поделив числитель подинтегральной дроби на знаменатель, а затем, применив свойство линейности неопределённого интеграла, получаем равенства

$$\int \frac{x + \sqrt{x+x^2} \sin 3x}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-\frac{3}{2}} + \sin 3x \right) dx =$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int x^{-\frac{3}{2}} dx + \int \sin 3x dx = \ln |x| - 2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{\cos 3x}{3} + C = \ln |x| - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\cos 3x}{3} + C.$$

Формула интегрирования по частям. Если $u(x), v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, тогда справедливо равенство

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx, \quad (11)$$

которое называют *формулой интегрирования по частям*.

Рассмотрим интегралы, которые вычисляются только с помощью этой формулы.

1. Интегралы вида $\int P_n(x) \sin ax dx$, $\int P_n(x) \cos ax dx$, $\int P_n(x) e^x dx$, где $P_n(x)$ – полином степени n , вычисляются n – кратным интегрированием по частям (формула интегрирования по частям применяется столько раз, какова степень полинома). При этом полагают $u(x) = P_n(x)$, $v'(x) = \sin ax$,

либо $v'(x) = \cos ax$, либо $v'(x) = e^x$. При каждом интегрировании по частям степень полинома уменьшается на единицу.

Пример. Вычислим $\int (x^2 + 3x - 3) \cos 3x dx$. Воспользовавшись формулой (10), получим $\int (x^2 + 3x - 3) \cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 3x - 3, v' = \cos 3x, \\ u' = 2x + 3, v = \frac{\sin 3x}{3} \end{array} \right|$
 $= (x^2 + 3x - 3) \frac{\sin 3x}{3} - \frac{1}{3} \int (2x + 3) \sin 3x dx =$ (применим ещё раз формулу (11)) $= \left| \begin{array}{l} u = 2x - 3, v' = \sin 3x, \\ u' = 2, v = -\frac{\cos 3x}{3} \end{array} \right| = (x^2 + 3x - 3) \frac{\sin 3x}{3} - \frac{1}{3} \left[- (2x - 3) \frac{\cos 3x}{3} + \right.$
 $\left. + 3 \frac{1}{3} \int \cos 3x dx \right] = (x^2 + 3x - 3) \frac{\sin 3x}{3} + \frac{1}{9} (2x - 3) \cos 3x - \frac{1}{9} \sin 3x + C.$

2. Интегралы вида $\int P_n(x)(\ln x)^m dx$ вычисляются m -кратным интегрированием по частям (формула интегрирования по частям применяется столько раз, какова степень логарифма). При этом полагают $u(x) = (\ln x)^m$, $v'(x) = P_n(x)$. При каждом интегрировании по частям степень логарифма уменьшается на единицу.

Пример. Вычислим с помощью формулы интегрирования по частям

$$\int (x^2 - x + 1) \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, v' = x^2 - x + 3, \\ u' = 2 \frac{1}{x} \ln x, v = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x \end{array} \right| = x \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x \right) \ln^2 x -$$

$$- 2 \int x \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 3 \right) \frac{1}{x} \ln x dx =$$
 (применим опять формулу интегрирования по частям) $= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, v' = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 3, \\ u' = \frac{1}{x}, v = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + 3x \end{array} \right| = x \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x \right) \ln^2 x - 2 \left[x \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{4} + 3 \right) \times \right.$

$$\times \ln x - \int x \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{4} + 3 \right) \frac{1}{x} dx \Big] = x \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x \right) \ln^2 x - 2x \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{4} + 3 \right) \ln x +$$

$$+ 2 \int \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{4} + 3 \right) dx = x \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x \right) \ln^2 x - 2x \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{4} + 3 \right) \ln x + \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} +$$

$$+ 6x + C.$$

3. Интегралы, в которых под знаком интеграла находятся обратные тригонометрические функции, тоже вычисляются интегрированием по частям. Это интегралы вида $\int P_n(x) \arctg x dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arcctg} x dx$,

$\int \arcsin x dx$, $\int \arccos x dx$. При вычислении этих интегралов за $u(x)$ обозначают обратные тригонометрические функции.

Пример. Вычислим $\int x^3 \arctg x dx = \left| \begin{matrix} u(x) = \arctg x, u'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \\ v'(x) = x^3, v(x) = \frac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{x^4}{4} \times$
 $\times \arctg x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4 dx}{x^2+1} = \frac{x^4}{4} \arctg x - \frac{1}{4} \int \frac{(x^4-1)+1}{x^2+1} dx = \frac{x^4}{4} \arctg x - \frac{1}{4} \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x^2+1} dx =$
 $= \frac{x^4}{4} \arctg x - \frac{1}{4} \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{x^4}{4} \arctg x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \arctg x + C.$

Замена переменной в неопределённом интеграле. Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема, а функция $f(x)$ непрерывна, тогда справедливо равенство $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx$, которое называют формулой замены переменной в неопределённом интеграле.

Пример. Для вычисления $\int \cos^5 x dx$ сделаем замену $t = \sin x$,
 $dt = \cos x dx$, тогда получим $\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \times$
 $\times \cos x dx = \int (1 - t^2)^2 dt = \int (1 - 2t^2 + t^4) dt = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} +$
 $+ \frac{\sin^5 x}{5} + C.$

Пример. Для вычисления $\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$ сделаем замену
 $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$, $t = \arcsin \frac{x}{a}$, тогда получим $\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx =$
 $= \int a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = a^4 \int \sin^2 t \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = a^4 \int \sin^2 t \times$
 $\times \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{4} \int \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{a^4}{8} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) = \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{a^4}{32} \times$
 $\times \sin(4 \arcsin \frac{x}{a}) + C.$

Задание 7. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b]$. Точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in [a, b]$ такие, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ называют разбиением промежутка $[a, b]$. Число $\lambda = \max_i \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, называют рангом разбиения $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$. Выберем произвольным образом n точек $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Сумму $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ называют интегральной суммой для функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$, соответствующей данному разбиению.

Определение. Определённым интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$ называют предел интегральных сумм, когда ранг разбиения стремится к 0. Определённый интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$ обозначают $\int_a^b f(x)dx$. Следовательно, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$. Если определённый интеграл существует, то говорят, что функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, b]$.

Свойства определённого интеграла

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, тогда $f(x)$ интегрируема на этом промежутке.
2. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, тогда $f(x)$ интегрируема на этом промежутке.
3. Линейность определённого интеграла. Для любых постоянных c_1, c_2 справедливо равенство $\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)] dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx$.
4. Аддитивность. Если $a < c < b$, тогда $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
5. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$. 6). Если $f(x) \leq g(x)$ на промежутке $[a, b]$, тогда $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ (функциональные неравенства можно интегрировать).

Формула Ньютона–Лейбница. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, тогда у этой функции на промежутке $[a, b]$ существует первообразная $F(x)$ и выполняется равенство

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Методы интегрирования

1. Формула интегрирования по частям для определённого интеграла. Пусть функции $u(x), v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на промежутке $[a, b]$, тогда справедливо равенство

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \quad (12)$$

Равенство (12) называют формулой интегрирования по частям. Рассмотрим некоторые примеры вычисления определённых интегралов при помощи этой формулы. Основные типы интегралов, которые вычисляются только с помощью интегрирования по частям, уже были рассмотрены в примерах к предыдущему заданию. В этом пункте рассмотрим дополнительно ещё несколько интегралов такого вида.

Пример. Вычислим $I = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx$. Применив формулу (11),

$$\text{получим } I = \left| \begin{array}{ll} u = e^x, & u' = e^x, \\ v' = \cos 2x, & v = \frac{\sin 2x}{2} \end{array} \right| = e^x \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \frac{\sin 2x}{2} dx = -$$

$$\int_0^{\pi} e^x \frac{\sin 2x}{2} dx = (\text{применим ещё раз формулу (11)}) = \left| \begin{array}{ll} u = e^x, & u' = e^x, \\ v' = \frac{\sin 2x}{2}, & v = -\frac{\cos 2x}{4} \end{array} \right| =$$

$$e^x \frac{\cos 2x}{2} \Big|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{4} \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx = \left(e^{\pi} \frac{\cos 2\pi}{2} - e^0 \frac{\cos 0}{2} \right) - \frac{1}{4} I = \frac{1}{2}(e^{\pi} - 1) - \frac{1}{4} I.$$

Следовательно, получили уравнение относительно исходного интеграла $I = \frac{1}{2}(e^{\pi} - 1) - \frac{1}{4} I$, из которого находим, что $\frac{5}{4} I = \frac{1}{2}(e^{\pi} - 1)$ или

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx = \frac{2}{5}(e^{\pi} - 1).$$

Пример. Вычислим с помощью формулы интегрирования по частям

$$\int_1^e x \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x, & u' = \frac{2 \ln x}{x}, \\ v' = x, & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e x \ln x dx =$$

$$(\text{применим ещё раз формулу интегрирования по частям}) \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & u' = \frac{1}{x}, \\ v' = x, & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx \right] = \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}.$$

2. Замена переменной в определённом интеграле. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha, \beta]$ и $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (13)$$

Пример. Вычислим интеграл $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx$ с помощью формулы (13).

Сделаем в этом интеграле замену переменной $t = \sqrt{3x+1}$, тогда $t^2 = 3x+1$, $x = \frac{t^2-1}{3}$. Продифференцировав последнее равенство, получим $2tdt = 3dx$

или $dx = \frac{2tdt}{3}$. Пределы интегрирования по новой переменной t находим из

формулы замены $t = \sqrt{3x+1}$, подставляя сначала нижний предел интегрирования $x=0$, а затем верхний предел интегрирования $x=1$. После

этой замены получаем $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx = \int_1^2 \frac{(t^2-1)2tdt}{9t} dt = \frac{2}{9} \int_1^2 (t^2-1) dt =$

$$\frac{2}{9} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^2 = \frac{2}{9} \left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{9} \left(\frac{7}{3} - 1 \right) = \frac{8}{27}.$$

Задание 8. Несобственные интегралы

1. Несобственный интеграл первого рода.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном промежутке $[a, b]$, $a < b$.

Определение. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$ называют $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Если указанный выше предел существует, то говорят, что несобственный интеграл сходится и справедливо равенство $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$.

Если же указанный предел не существует или равен бесконечности, тогда говорят, что несобственный интеграл расходится.

Если $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$, тогда у неё существует первообразная $F(x)$ а этом промежутке и из определения несобственного интеграла вытекает практический способ вычисления этого интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a)) = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty}$, где подстановка на $+\infty$ означает что необходимо вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Из сказанного выше следует, что в несобственном интеграле первого рода можно делать замену переменной и интегрировать по частям также, как и в определённом интеграле.

Пример. Вычислим $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$. Произведём в данном интеграле замену переменной $t = x^2$. Тогда $dt = 2x dx$, $x dx = \frac{1}{2} dt$, а $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = (\text{интегрируем по частям } u = t, du = dt, dv = e^{-t}, v = -e^{-t}) = \frac{1}{2} \left(-te^{-t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \right) = \frac{1}{2} \left(-te^{-t} \Big|_0^{+\infty} - e^{-t} \Big|_0^{+\infty} \right) = \frac{1}{2} \left(-\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t} - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} + 1 \right) = \frac{1}{2}$. Так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t)'}{(e^t)'} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0$.

Следовательно, данный несобственный интеграл сходится и равен $\frac{1}{2}$.

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $[-\infty, b]$, а именно $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$.

Пример. Вычислим $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$. Интегрируя по частям $u = x, du = dx$, $dv = e^x dx, v = e^x$, получим $\int_{-\infty}^0 x e^x dx = x e^x \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^x dx = -\lim_{t \rightarrow -\infty} x e^x - e^x \Big|_{-\infty}^0 = -\lim_{t \rightarrow -\infty} x e^x - 1 + \lim_{t \rightarrow -\infty} e^x = -1$. Так как $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} x e^x = 0$. Следовательно, рассматриваемый интеграл сходится и равен -1 .

Если функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном промежутке $[a, b]$, тогда несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$.

Пример. Вычислим $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$. Выделив полный квадрат, получим $x^2 + 4x + 13 = (x + 2)^2 + 9$, а интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x + 2)^2 + 3} = \frac{1}{3} \arctg \frac{x + 2}{3} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg \frac{x + 2}{3} - \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg \frac{x + 2}{3} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$.

2. Несобственный интеграл второго рода

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном промежутке $[a + \varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$, $a + \varepsilon < b$, а точка $x = a$ является особой точкой функции $f(x)$ (например $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$). Тогда несобственным интегралом от

функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$ называют $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ и обозначают

так же, как и определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Если указанный предел существует, то несобственный интеграл сходится, в противном случае говорят, что несобственный интеграл расходится.

В частности, если существует первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ на промежутке интегрирования $(a, b]$, тогда $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x) \Big|_{a+\varepsilon}^b = F(b) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(a + \varepsilon) = F(b) - \lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(x) \Big|_a^b$, где подстановка в точке $x = a$ означает вычисление $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$.

Пример. Вычислим $\int_0^1 \ln x dx$. Так как $\ln x \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, то рассматриваемый интеграл является несобственным интегралом второго рода и, по определению,

$$\int_0^1 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_0^1 = -1 - \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x - x) = -1 - \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \quad (\text{применим}$$

$$\text{правило Лопиталя}) = -1 - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = -1 - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right)' = -1 -$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = -1 - \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = -1.$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл сходится и равен -1 .

Если же особой точкой функции $f(x)$ является точка $x=b$, тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - F(a). \quad \text{Например, } \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2} \Big|_0^2 =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2} = \infty \text{ и этот интеграл расходится.}$$

Если особая точка $x=c$ лежит внутри промежутка интегрирования $a < c < b$, тогда, по определению, несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1, Т.2/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 2003.– 460с.
2. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие/ Н.М.Матвеев. – СПб.: Издательство «Лань», 2003.–832с.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для вузов. В 2 т.Т.1. и Т.2./ Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2002.- 415 с. и 544с.
4. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник в 3-х т. / Г. М. Фихтенгольц. - 9-е изд., стер. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2009.–608,800, 672с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Задания к контрольной работе 1	4
Методические указания к контрольной работе 1	11
Определители	13
1. Определитель второго порядка	14
2. Определитель третьего порядка	14
3. Определители более высокого порядка	15
Обратная матрица	15
Решение линейных систем с помощью обратной матрицы	18
Таблица производных основных элементарных функций	36
Производные более высокого порядка	38
Дифференциал и его свойства	40
Задания контрольной работы 2	41
Методические указания к контрольной работе 2	47
Экстремум функции двух переменных	62
Таблица неопределенных интегралов	65
Свойства определенного интеграла	69
Методы интегрирования	70
Список литературы	75