

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального
образования
РОССИЙСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Г.В.ПЛЕХАНОВА
НОВОСИБИРСКИЙ ФИЛИАЛ

Математика

Программа, методические указания и задания контрольной и
самостоятельной работы №2 для студентов заочной формы обучения
направления:

«Торговое дело-100700.62»

Квалификация выпускника - бакалавр

Сокращенная образовательная программа

Новосибирск 2014

Кафедра социально экономических и правовых дисциплин

Математика : Программа, методические указания и задания контрольной работы 2
для студентов заочной формы обучения направления «Торговое дело-100700.62»

Составитель: Вахромеев Ю.М., к.ф.-м.н., доцент, Новосибирск: НФ РГТЭУ - 2014,
стр.

Рецензент: доцент

Методические указания рекомендованы к изданию кафедрой социально экономических
и правовых дисциплин, протокол от « » 2014г.

Правила выбора варианта контрольной работы, ее оформление и зачета

1. В процессе изучения курса «Математика» студент первого курса должен выполнить контрольную работу, задачи которой содержатся в разделе «Варианты контрольной работы». Не следует приступать к выполнению контрольного задания до решения достаточного количества задач по учебному материалу, соответствующему этому заданию. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

2. Контрольная работа должна быть оформлена в соответствии с настоящими правилами. ***Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не засчитываются и возвращаются студенту для переработки.***

3. Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради, чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента. Работы принимаются **только в рукописном виде.**

4. На обложке тетради должны быть разборчиво написаны фамилия, имя, и отчество студента, факультет (институт), номер группы, название дисциплины (высшая математика), номер контрольной работы, номер варианта и домашний адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и расписаться.

5. Номер варианта контрольной работы, которую выполняет студент, должен совпадать с последней цифрой номера его зачетной книжки.

6. Решения задач надо располагать в порядке возрастания номеров. Условия задач следует переписать в тетрадь.

7. При решении задач нужно обосновать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса.

Решение задач и примеров следует излагать подробно, объясняя все выполненные действия и используемые формулы. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие. В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π , e и т. д.

Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Так, например, решив систему уравнений нужно проверить, удовлетворяют ли полученные решения каждому уравнению исходной системы. Полезно также, если это возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

8. Срок проверки контрольных работ – 10 рабочих дней. ***Студенты обязаны сдавать письменные контрольные работы не позднее, чем за 10 дней до начала экзаменационной сессии. В противном случае они не будут допущены к зачетам и экзаменам.***

9. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты, внести в решения задач рекомендуемые рецензентом изменения или дополнения и

прислать работу для повторной проверки. В связи с этим рекомендуем при выполнении контрольной работы оставить в конце тетради несколько чистых листов для внесения исправлений и дополнений впоследствии.

В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента на то, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

При представленных на повторную проверку исправлениях обязательно должны находиться прорецензированная работа и рецензия на нее. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

10. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять.

На экзамен студент должен явиться с рецензией на выполненную контрольную работу. **Без предъявления преподавателю прорецензированных контрольных работ студент к экзамену не допускается.**

Варианты контрольной работы

Вариант 0

Задача 1. Найти указанные пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 4x^2 + 1}{2x^5 + 3x - 4}; \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x - 3} \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2} \text{ е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{5x}$$

Задача 2. Найти точки разрыва функции и определить характер точек разрыва. Построить график.

$$y = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \leq 0, \\ x + 2, & \text{если } 0 < x \leq 3, \\ 5, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Задача 3. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Задача 4. Исследовать и построить график функции $y = \frac{1}{6}x^3 - x^2$

Задача 5. Дана функция $z = x^2 + xy + y^2$, точка $A(1;1)$ и вектор $\vec{a} = (2;-1)$. Найти $\text{grad } z$ в точке A и производную в точке A в направлении вектора $\vec{a}$.

Вариант 1

Задача 1. Найти указанные пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x - 3}{x^2 + x - 1}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x+1} - 3}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 3x}$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{4x}$$

Задача 2. Найти точки разрыва функции и определить характер точек разрыва. Построить график.

$$y = \begin{cases} x^3, & \text{если } x < 2, \\ x^2, & \text{если } 2 \leq x < 3, \\ 9, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

Задача 3. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^3 - 2x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Задача 4. Исследовать и построить график функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$

Задача 5. Дана функция $z = 2x^2 + 3xy + y^2$, точка $A(2;1)$ и вектор $\vec{a} = (3;-4)$.

Найти $\text{grad } z$ в точке A и производную в точке A в направлении вектора $\vec{a}$.

Вариант 2

Задача 1. Найти указанные пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{4x^5 + 5}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-3x} - \sqrt{4+3x}}{7x}$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3}$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin 2x \operatorname{ctg}^2 5x$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{3x - 6}$$

Задача 2. Найти точки разрыва функции и определить характер точек разрыва. Построить график.

$$y = \begin{cases} 2^{-x}, & \text{если } x < 0, \\ 1 - x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ x + 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Задача 3. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^2 - 2x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Задача 4. Исследовать и построить график функции $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2$

Задача 5. Дана функция $z = \ln(5x^2 + 3y^2)$, точка $A(1;1)$ и вектор $\vec{a} = (3;2)$. Найти $\operatorname{grad} z$

в точке A и производную в точке A в направлении вектора $\vec{a}$.

Вариант 3

Задача 1. Найти указанные пределы

$$а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 3x^2 + 1}{3x^5 + 2x - 3}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x+4} - 3}{\sqrt{2x-1} - 1}$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 6x + 5}$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 7x$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x^2}$$

Задача 2. Найти точки разрыва функции и определить характер точек разрыва. Построить график.

$$y = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \leq 0, \\ 3x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Задача 3. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции

$y = \frac{x}{x^2 + 3}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Задача 4. Исследовать и построить график функции $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

Задача 5. Дана функция $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$, точка $A(1;1)$ и вектор $\vec{a} = (2;-1)$.

Найти $\text{grad } z$ в точке A и производную в точке A в направлении вектора $\vec{a}$.

Вариант 4

Задача 1. Найти указанные пределы

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 7x^2 + 4}{3x^3 - 2x^4 + 1}$

б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{3}}$

в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x \operatorname{tg} 2x}$

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{\sin 5x}$

Задача 2. Найти точки разрыва функции и определить характер точек разрыва. Построить график.

$$y = \begin{cases} x-1, & \text{если } x < 0, \\ x^2-1, & \text{если } 0 \leq x < 3, \\ \sqrt{x+1}, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

Задача 3. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции

$y = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Задача 4. Исследовать и построить график функции $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$.

Задача 5. Дана функция $z = 5x^2 + 6xy$, точка $A(2;1)$ и вектор $\vec{a} = (1;2)$. Найти

$\text{grad } z$ в точке A и производную в точке A в направлении вектора $\vec{a}$.

Вариант 5

Задача 1. Найти указанные пределы

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 5}{3x^3 + 2x^2 - x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{4x + 1} - 3}$

в) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 13x - 7}{x^2 - 9x + 14}$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 8x \operatorname{ctg} 3x$

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{e^{3x} - 1}$

Задача 2. Найти точки разрыва функции и определить характер точек разрыва. Построить график.

$$y = \begin{cases} 2x, & \text{если } x < 0, \\ x^2 - 1, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ \sqrt{x-1}, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

Задача 3. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^2(x-1)$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$

Задача 4. Исследовать и построить график функции $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$

Задача 5. Дана функция $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$, точка $A(2;3)$ и вектор $\vec{a} = (4;-3)$. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке A и производную в точке A в направлении вектора $\vec{a}$.

Вариант 6

Задача 1. Найти указанные пределы

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x + 1}{x^3 - 2x - 1}$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+10} - 4}{x - 2}$

в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 7x + 10}$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x}$

е) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x^2 - 4}$

Задача 2. Найти точки разрыва функции и определить характер точек разрыва. Построить график.

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{если } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Задача 3. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Задача 3. Исследовать и построить график функции $y = x^3 - 10x^2 + 28x - 24$

Задача 5. Дана функция $z = \arcsin(x^2 y)$, точка $A(1; 2)$ и вектор $\vec{a} = (5; -12)$. Найти $\text{grad } z$ в точке A и производную в точке A в направлении вектора $\vec{a}$.

Вариант 7

Задача 1. Найти указанные пределы

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 2x + 10}{4x^2 + 5x + 12}$

б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{\sqrt{2x + 11} - 5}$

в) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x^2 - 17x - 28}{x^2 - 9x + 14}$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arctg 6x}$

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{5x^2}$

Задача 2. Найти точки разрыва функции и определить характер точек разрыва. Построить график.

$$y = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \leq 0, \\ 3x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Задача 3. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^3 - 2x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Задача 4. Исследовать и построить график функции $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 20$.

Задача 5. Дана функция $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$, точка $A(1; 3)$ и вектор $\vec{a} = (2; -1)$.

Найти $\text{grad } z$ в точке A и производную в точке A в направлении вектора $\vec{a}$.

Вариант 8

Задача 1. Найти указанные пределы

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{6x^2 + 3x - 4}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin 2x \operatorname{ctg}^2 3x$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

Задача 2. Найти точки разрыва функции и определить характер точек разрыва. Построить график.

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Задача 3. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^2 - 2x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Задача 4. Исследовать функцию и построить график $y = x^3 - 11x^2 + 39x - 45$.

Задача 5. Дана функция $z = 3x^4 + 2x^2y^3$, точка $A(-1; 2)$ и вектор $\vec{a} = (4; -3)$. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке A и производную в точке A в направлении вектора $\vec{a}$.

Вариант 9

Задача 1. Найти указанные пределы

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 3}{5x^2 + 5x - 2}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x-2} - 1}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 5x + 3}$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos^2 3x}{x^2}$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x^2-9} - 1}{\arctg(x-3)}$$

Задача 2. Найти точки разрыва функции и определить характер точек разрыва. Построить график.

$$y = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \leq 0, \\ 2x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ x, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

Задача 3. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = \frac{x}{x^2 + 3}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Задача 4. Исследовать функцию и построить график $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 54$.

Задача 5. Дана функция $z = 3x^2y^2 + 5xy^2$, точка $A(1;1)$ и вектор $\vec{a} = (2;1)$. Найти $\text{grad } z$ в точке A и производную в точке A в направлении вектора $\vec{a}$.

Методические указания для решения задач

Задача 1. Найти указанные пределы

Приступая к решению данного задания, обязательно нужно повторить теорию (определение предела, бесконечно малой и бесконечно большой величины, свойства бесконечно малых, связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами, теоремы о пределах, свойства односторонних пределов). Повторяя теорию, старайтесь представить себе поведение функции в окрестности данной точки (в виде картинки).

Если теоремы о пределах применимы, то вычисление пределов сводится к подстановке вместо x его предельного значения:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 1} = \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 5}{2^2 + 1} = \frac{1}{5}.$$

Но в другом примере: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4}$ подставить вместо x двойку нельзя, так как нельзя делить на 0. Начинаем рассуждать: $(x^2 - 4)$ величина бесконечно малая при $x \rightarrow 2$; числитель при $x = 2$ является числом, вся дробь $\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4}$ при $x \rightarrow 2$ будет величиной, обратной бесконечно малой, т.е. величиной бесконечно большой и, поэтому, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4} = \infty$.

Заметим, что ∞ – не число, а символ, обозначающий бесконечно большую величину. Пределом же функции называется некоторое число (см. определение). Символ ∞ говорит о том, что при $x \rightarrow 2$ функция предела не имеет и является бесконечно большой величиной.

При вычислении односторонних пределов функции необходимо учитывать знак бесконечно большой величины:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-2)(x+2)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-2)(x+2)} = +\infty.$$

Знак при символе ∞ разный, так как при $x \rightarrow 2-0$ величина $x-2 < 0$, а при $x \rightarrow 2+0$ величина $x-2 > 0$.

Нельзя подставить вместо x его предельное значение x_0 и в том случае, если под знаком предела бесконечно малая величина стоит не только в знаменателе, но и в числителе. В этом случае говорят, что имеется неопределенность $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Чтобы раскрыть неопределенность $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, нужно в числителе и в знаменателе выделить бесконечно малую $(x - x_0)$ и на нее сократить.

Например:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2} &\equiv \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2 \cdot 1 + 3}{1 + 2} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{\sqrt{x-2} - 1} \equiv \left\{ \frac{0}{0} \right\}. \text{ Следовательно, нужно выделить бесконечно малую } (x -$$

3) и на нее сократить. Но x стоит под корнем, поэтому нужно умножить числитель и знаменатель на выражения, им сопряженные, чтобы убрать корни.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{5x+1} - 4)(\sqrt{5x+1} + 4)(\sqrt{x-2} + 1)}{(\sqrt{x-2} - 1)(\sqrt{x-2} + 1)(\sqrt{5x+1} + 4)} \equiv$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \lim_{x \rightarrow 3} \frac{((\sqrt{5x+1})^2 - 4^2)(\sqrt{x-2}+1)}{((\sqrt{x-2})^2 - 1)(\sqrt{5x+1}+4)} \equiv \\
&\equiv \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(5x+1-16)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-2-1)(\sqrt{5x+1}+4)} \equiv \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)} \equiv \\
&\equiv \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(\sqrt{x-2}+1)}{\sqrt{5x+1}+4} = \frac{5(\sqrt{3-2}+1)}{\sqrt{5 \cdot 3+1}+4} \equiv \frac{5 \cdot 2}{8} = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Если в неопределенности $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ есть тригонометрические функции, то нужно выделять первый замечательный предел, т.е. предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, который равен 1.

$$\begin{aligned}
3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin 3x} &\equiv \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \cdot \sin 3x} \equiv \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \sin x}{x \cdot x \cdot 3 \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Раскрытие неопределенности $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ называется сравнением бесконечно малых.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые величины (б.м.в.) при $x \rightarrow 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$

$= 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми

величинами и при вычислении пределов в произведениях и в частном одну бесконечно малую можно заменять б.м. величиной, ей эквивалентной.

$$4) \text{ Например: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{e^{3x}-1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \mid \text{ в таблице эквивалентных бесконечно}$$

малых находим, что при $\alpha \rightarrow 0$: $e^\alpha - 1 \approx \alpha$, при $\alpha \rightarrow 0$: $\ln(1 + \square) \sim \square$ и, воспользовавшись этим, получаем $\mid =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Нельзя подставить под знак предела предельное значение x и в том случае, если x – бесконечно большая величина (т.е. $x \rightarrow \infty$, следовательно, числового значения x_0 нет).

Если получается неопределенность вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, то нужно перейти к величинам бесконечно малым, свойства которых нами хорошо изучены. Для этого нужно в выражении под знаком предела числитель и знаменатель разделить на «старшую» бесконечно большую величину (в наших примерах это, как правило, старшая степень x). Например:

$$\begin{aligned} 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x+1}-4}{\sqrt{x-2}-1} &= \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{5x+1}}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{5x+1}{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x-2}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5+\frac{1}{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

(при вычислении предела воспользовались соображением, что при $x \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{x}$,

$\frac{4}{\sqrt{x}}$, $\frac{2}{x}$ и $\frac{1}{\sqrt{x}}$ – величины бесконечно малые, предел которых равен нулю).

6) Еще одна неопределенность, встречающаяся при вычислении пределов: $\{1^\infty\}$. Она раскрывается с помощью второго замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Здесь под знаком предела стоит показательно-степенная функция, у которой основанием является сумма единицы и некоторой бесконечно малой величины, а показателем – бесконечно большая величина, обратная этой бесконечно малой.

Поэтому при раскрытии неопределенности $\{1^\infty\}$ в основании обязательно выделяют 1 (например, прибавив и отняв ее от того выражения, которое стоит в основании).

Например:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (7 - 3x)^{\frac{x}{2x-4}} = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow 2} (1 + 6 - 3x)^{\frac{x}{2x-4}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (1 + 3(x-2))^{\frac{x}{2(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} (1 + 3(x-2))^{\frac{1}{3(x-2)} \cdot \frac{3x}{2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{3x}{2}} = e^3.$$

Замечание: В заданиях подобного вида обязательно нужно проверять, стремится ли (по условию) основание к 1.

В качестве примера рассмотрим $\lim_{x \rightarrow 1} (7 - 3x)^{\frac{x}{x-1}}$. Предел, очень похожий по виду на предыдущий, не будет вторым замечательным пределом, так как основание стремится к 4 и результат будет зависеть от того, как $x \rightarrow 1$ – слева или справа:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (7 - 3x)^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} 4^{\frac{1}{1-0-1}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (7 - 3x)^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1+0} 4^{\frac{1}{1+0-1}} = +\infty$$

Задача 2. Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики

$$1) y(x) = \begin{cases} 2-x, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 3 \\ x-2, & 3 \leq x \end{cases} \quad 2) y(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x+1, & 0 < x \leq 2 \\ x^2-1, & 2 < x \end{cases}$$

Решение. 1) На интервалах $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; \infty)$ функция непрерывна, так как на каждом она является элементарной функцией. Исследуем функцию в пограничных точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. Для точки $x_1 = 0$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x-2) = -2; \quad \lim_{x \rightarrow 0+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1$$

Согласно правилу в точке $x_1 = 0$ разрыв первого рода. Разрыв-скачок.

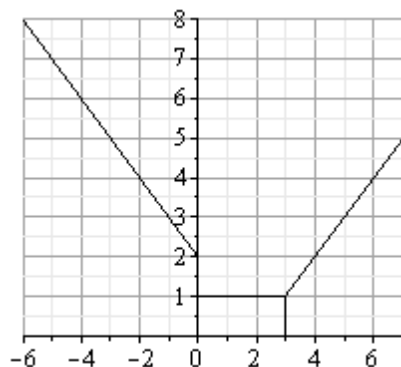


Рис.1

Для точки $x_2 = 3$ имеем $\lim_{x \rightarrow 3-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} 1 = 1$; $\lim_{x \rightarrow 3+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (x-2) = 1$

Значение функции в точке 3 равно $y(3) = (3-2) = 1$. Следовательно, в точке $x_2 = 3$ функция непрерывна. График функции приведён на рис.1.

2) На интервалах $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \infty)$ функция непрерывна, так как на каждом она является элементарной функцией. Исследуем функцию в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

Для точки $x_1 = 0$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x+1) = 1$$

Согласно правилу в точке $x_1 = 0$ разрыв первого рода. Разрыв-скачок.

Для точки $x_2 = 2$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow 2-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x+1) = 3; \quad \lim_{x \rightarrow 2+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2 + 1) = 5$$

Значение функции в точке 2 равно $y(2) = (2+1) = 3$. Следовательно, в точке $x_2 = 2$ функция терпит разрыв. Разрыв-скачок. График функции приведён на рис.2.

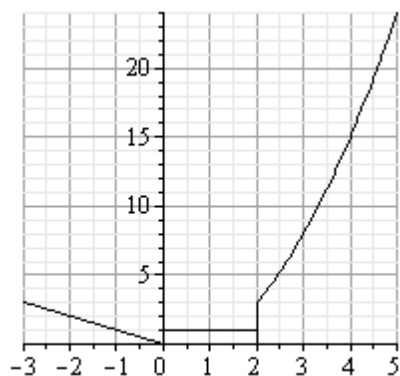


Рис.2

Задача 3. Написать уравнение касательной к графику функции

$$y = x^3 - 2x + 5.$$

Решение.

Уравнение касательной имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$.

Вычисляем $y_0, y'(x_0)$: $y_0 = 2^3 - 2 \cdot 2 + 5 = 9$, $y'(x) = 3x^2 - 2$, $y'(2) = 10$

Подставляем полученные данные в уравнение касательной и получаем:

$$y - 9 = 10(x - 2) \Rightarrow y = 10x - 11;$$

Задача 5. Найти производную функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке $M_0(1; 1)$:

а) в направлении вектора $\vec{\ell} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$;

б) определить градиент z в точке $M_0(1; 1)$, его величину и направление.

РЕШЕНИЕ:

а) Функцией $z = x^2 - xy + y^2$ определено плоское скалярное поле в точке $(x; y)$. Производная функции $z = f(x; y)$ по данному направлению $\vec{\ell}$ определяется формулой:

$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0} \cdot \cos \beta$, где $\cos \alpha, \cos \beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{\ell}$.

В задаче направление определено вектором $\vec{\ell} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$, его направляющие косинусы

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{\ell}|} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 0,6, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{\ell}|} = 0,8.$$

Определим частные производные функции в точке $M_0(1; 1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2x - y)_{M_0} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (-x + 2y)_{M_0} = 1.$$

Тогда производная по направлению равна $\frac{\partial z}{\partial \ell} = 1 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,8 = 1,4 >$

0. Производная по направлению определяет скорость изменения функции $z(x, y)$ в этом направлении. Так как $\frac{\partial z}{\partial \ell} > 0$, то в этом направлении функция z возрастает.

б) $\text{grad } z$ есть вектор, указывающий направление наибольшего возрастания поля в данной точке и имеющий модуль, равный скорости этого возрастания. Этот вектор определяется по формуле:

$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0} = 1.$$

Следовательно, $\text{grad } z = \vec{i} + \vec{j}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов / под. ред. проф. Н.Ш.Кремера. 2007г. 479с.
2. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс /К.Н. Лунгу, Д.Т.Письменный, С.Н.Федин, Ю.А.Шевченко.- 8-е изд.-М.: Айрис пресс, 2012.-576с.
3. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс /К.Н. Лунгу, Д.Т.Письменный, С.Н.Федин, Ю.А.Шевченко.- 8-е изд.-М.: Айрис пресс, 2012.-592с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : (в 2 ч.) ч.1.10изд.-М.: Айрис-пресс, 2010.-288с.

5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : (в 2 ч.)
ч.2.10изд.-М.: Айрис-пресс, 2011.-256с.