

Министерство образования и науки
Российской Федерации
ФГБОУ ВПО Российский химико-технологический университет
им. Д.И. Менделеева

Новомосковский институт (филиал)

Контрольная работа № 4 по математике

**Методические указания
для студентов-заочников**

Новомосковск
2013

УДК 517
ББК 22.161
К 651

Рецензенты:

доцент кафедры «Высшая математика» НИ РХТУ
им. Д.И. Менделеева к.т.н. В.Ф. Исаков
доцент кафедры АПП НИ РХТУ им. Д.И. Менделеева
к.т.н. А.Г. Лопатин

Составители: В.А. Матвеев, В.М. Ульянов

Контрольная работа № 4 по математике. Методические указания для студентов-заочников / ФГБОУ РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Сост.: В.А. Матвеев, В.М. Ульянов, 2013. – 24 с.

Кратко рассмотрены основные теоретические положения и примеры типовых заданий по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Приводятся задачи для самостоятельного решения.

Предназначена для студентов заочного отделения всех специальностей, а также может быть полезна студентам дневного отделения

Табл. 1. Литерат.: 3 назв.

УДК 517
ББК 22.161

© ФГБОУ ВПО Российский
химико-технологический
университет им. Д.И. Менделеева
Новомосковский институт (филиал), 2013.

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Дифференциальные уравнения.	3
§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка.	4
§ 3. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка.	5
1. Уравнения с разделяющимися переменными.	5
2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.	6
3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.	8
§ 4. Дифференциальные уравнения высших порядков.	11
§ 5. Простейшие дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.	11
1. Дифференциальные уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.	11
2. Дифференциальные уравнения, не содержащие в явном виде неизвестную функцию.	12
3. Дифференциальные уравнения, не содержащие в явном виде независимую переменную.	13
§ 6. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.	15
1. Однородные уравнения.	15
2. Неоднородные уравнения.	16
§ 7. Системы однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами.	20
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4.	23
Рекомендуемая литература.	24

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y(x)$ и её производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Символически дифференциальное уравнение можно записать так:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad \text{или} \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \quad (1)$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Решением дифференциального уравнения на некотором промежутке называется всякая функция $y = f(x)$, которая имеет на этом промежутке необходимое количество производных и, будучи подставлена в уравнение, обращает его в тождество, верное на всём данном промежутке.

Например, дифференциальное уравнение $xy' - 2y = 0$ имеет решение $y = x^2$, так как если $y = x^2$, то $y' = 2x$, и тогда $x \cdot 2x - 2x^2 \equiv 0$.

Решение дифференциального уравнения, заданное неявно соотношением $\Phi(x, y) = 0$, называется *интегралом* этого уравнения. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2)$$

Если уравнение разрешить относительно производной, то оно примет вид

$$y' = f(x, y). \quad (3)$$

Такое уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка, *разрешённым относительно производной*.

Теорема Коши. Если функция $f(x, y)$ и её частная производная $f'_y(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy , то какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0) области D , в некоторой окрестности этой точки существует единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условиям $y = y_0$ при $x = x_0$.

Геометрически теорема утверждает, что через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) области D проходит единственная интегральная кривая. Очевидно, что во всей области D уравнение $y' = f(x, y)$ имеет бесконечное множество решений.

Условия $y = y_0$ при $x = x_0$, в силу которого решение $y = \varphi(x)$ принимает заданное значение y_0 в заданной точке x_0 , называют начальными условиями и записывают обычно так:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad \text{или} \quad y(x_0) = y_0. \quad (4)$$

Отыскание решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши*.

С геометрической точки зрения решить задачу Коши – значит из множества интегральных кривых уравнения выделить ту, которая проходит через заданную точку (x_0, y_0) плоскости Oxy .

Общим решением уравнения $y' = f(x, y)$ в некоторой области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от x и произвольной постоянной C , если она является решением уравнения при любом значении постоянной C и, если при любых начальных условиях $y|_{x=x_0} = y_0$ таких, что $(x_0, y_0) \in D$ существует значение постоянной $C = C_0$ такое, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данным начальным условиям.

Частным решением уравнения $y' = f(x, y)$ в области D называется функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при определённом значении $C = C_0$.

В процессе отыскания общего решения дифференциального уравнения нередко приходим к соотношению вида $\Phi(x, y, C) = 0$, не разрешённому относительно y . В таких случаях общее решение оставляется в неявном виде.

§ 3. ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

1. Уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{или} \quad f_1(x)g_2(y)dx + f_2(x)g_1(y)dy = 0. \quad (5)$$

Пример 1. Решить уравнение $x(1 - y^2)dx - y(1 - x^2)dy = 0$.

Деля почленно на $(1 - x^2) \cdot (1 - y^2)$, получим

$$\frac{x dx}{1 - x^2} - \frac{y dy}{1 - y^2} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{y dy}{1 - y^2} = \frac{x dx}{1 - x^2}.$$

Заметим, что в левой части равенства имеется только функция от y с соответствующим дифференциалом dy , а справа — от x с дифференциалом dx . Вот такое „растаскивание“ переменных и называется их разделением, чем и обусловлено название данного типа уравнений. А дальше интегрируем обе части:

$$\begin{aligned} \int \frac{y dy}{1 - y^2} &= \int \frac{x dx}{1 - x^2} \implies -\frac{1}{2} \ln |1 - y^2| = -\frac{1}{2} \ln |1 - x^2| + C \implies \\ &\implies \ln |1 - y^2| = \ln |1 - x^2| - 2C. \end{aligned}$$

Обозначив $-2C$ через $\ln |C_1|$, $C_1 \neq 0$, получаем, что

$$\ln |1 - y^2| = \ln |C_1(1 - x^2)|, \quad \text{или} \quad 1 - y^2 = C_1(1 - x^2).$$

Это и есть общее решение.

Обратим внимание на то, что при делении на произведение $(1 - x^2)(1 - y^2)$ мы можем потерять решения, обращающие в нуль это произведение, то есть, $y = \pm 1$ и $x = \pm 1$. Непосредственной подстановкой в уравнение $y = \pm 1$, $dy = 0$ или $x = \pm 1$, $dx = 0$ убеждаемся, что эти функции являются решениями нашего исходного уравнения; $y = \pm 1$ можно получить из общего решения, полагая формально, что $C_1 = 0$.

Ответ: $1 - y^2 = C_1(1 - x^2)$, $x = \pm 1$.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $(x^2 + 4)y' - 2xy = 0$, удовлетворяющего начальному условию $y(1) = 5$.

Сначала найдём общее решение данного уравнения.

$$\begin{aligned} (x^2 + 4)\frac{dy}{dx} - 2xy &= 0 \implies (x^2 + 4)dy = 2xydx \implies \frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{x^2 + 4} \implies \\ \implies \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{2xdx}{x^2 + 4} \implies \ln |y| = \ln(x^2 + 4) + \ln |C|, \quad C \neq 0 \implies \\ &\implies y = C(x^2 + 4), \quad C \neq 0 \end{aligned}$$

При разделении переменных мы делили обе части уравнения на $y(x^2 + 4)$. Это выражение обращается в 0 при $y = 0$. Очевидно, что $y = 0$ является решением уравнения, не входящим в общее решение (из-за условия $C \neq 0$). Но его можно

получить из общего решения, если формально подставить в него $C = 0$, так что условие $C \neq 0$ в общем решении в действительности не нужно.

Найдём частное решение. Для этого в общее решение вместо x подставим 1, а вместо y — число 5. Тогда $5 = C(1^2 + 4) \implies C = 1$. Получаем искомое частное решение $y = x^2 + 4$.

Ответ: $y = x^2 + 4$.

2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией k -го измерения* (или *порядка*) относительно переменных x и y , если при любом $\lambda \neq 0$ справедливо тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y) \quad (6)$$

(если это верно только при $\lambda > 0$, то функция называется *положительно однородной*).

Например, функция $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ — однородная функция второго порядка, так как

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + 2 \cdot \lambda x \cdot \lambda y + 3(\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2 + 2xy + 3y^2) = \lambda^2 f(x, y), \quad k = 2.$$

Уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (7)$$

называется *однородным относительно x и y* , если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y .

Уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (8)$$

называется *однородным относительно x и y* , если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные одинакового измерения.

Аналогично определяются *положительно однородные* уравнения. Положительно однородные уравнения решаются так же, как однородные, но нужно отдельно рассматривать случаи $x > 0$ и $x < 0$.

Уравнение (8) может иметь решение $x = 0$ (проверяется подстановкой $x = 0$ и $dx = 0$ в уравнение; уравнение (7) не может иметь решений вида $x = \text{Const}$, так как нельзя определить производную по постоянной величине).

Однородное (и положительно однородное) уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными, если ввести новую неизвестную функцию z подстановкой

$$y = xz, \quad y' = xz' + z, \quad dy = x dz + z dx. \quad (9)$$

Пример 3. Решить задачу Коши: $(x + y)dx + xdy = 0$, $y|_{x=1} = -3$.

В этом уравнении функции $M(x, y) = x + y$ и $N(x, y) = x$ являются однородными функциями одинакового (первого) измерения: $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = \lambda M(x, y)$ и $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x = \lambda N(x, y)$. Поэтому заданное уравнение — однородное.

Найдём общее решение. Подставляя выражения (9) в заданное уравнение, получим

$$(x + xz)dx + x(x dz + z dx) = 0 \implies x dx + xz dx + x^2 dz + xz dx = 0 \implies \\ \implies x^2 dz = -2xz dx - x dx \implies x^2 dz = -2x \left(z + \frac{1}{2} \right) dx.$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными. Разделив его на $x^2 \left(z + \frac{1}{2} \right)$, получим

$$\frac{dz}{z + \frac{1}{2}} = -2 \frac{dx}{x} \implies \int \frac{dz}{z + \frac{1}{2}} = -2 \int \frac{dx}{x} \implies \\ \implies \ln \left| z + \frac{1}{2} \right| = -2 \ln |x| + \ln |C|, \quad C \neq 0 \implies \\ \implies z + \frac{1}{2} = \frac{C}{x^2}, \quad C \neq 0 \implies z = \frac{C}{x^2} - \frac{1}{2}, \quad C \neq 0.$$

При делении на $x^2 \left(z + \frac{1}{2} \right)$ мы могли потерять решения $z + \frac{1}{2} = 0$, то есть, $z = -\frac{1}{2}$, и $x = 0$. Подстановкой $x = 0$, $dx = 0$ или $z = -\frac{1}{2}$, $dz = 0$ в уравнение $x^2 dz = -2x \left(z + \frac{1}{2} \right) dx$ убеждаемся, что обе функции являются решениями. Решение $z = -\frac{1}{2}$ получается из общего решения при $C = 0$.

Используя первое из соотношений (9), получим общее решение заданного уравнения в виде $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$. Так как заданное уравнение имеет вид (8), оно может иметь решение $x = 0$. Подставляя в это уравнение $x = 0$, $dx = 0$, видим, что это действительно решение (однако оно не удовлетворяет заданному начальному условию $x = 1$).

Найдём частное решение, используя заданное начальное условие $y|_{x=1} = -3$. Подставляя в общее решение $x = 1$, $y = -3$, получим $-3 = \frac{C}{1} - \frac{1}{2}$, откуда $C = -\frac{5}{2}$. Поэтому искомое частное решение есть $y = -\frac{5}{x} - \frac{x}{2} = -\frac{5+x^2}{2x}$.

Ответ: $y = -\frac{5+x^2}{2x}$.

Пример 4. Найти частное решение уравнения $2xyy' + x^2 - 3y^2 = 0$, удовлетворяющее условию $y(2) = 1$.

Решим уравнение относительно y' :

$$y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}.$$

Проверим его на однородность: $f(x, y) = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$, поэтому

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{3(\lambda y)^2 - (\lambda x)^2}{2 \cdot \lambda x \cdot \lambda y} = \frac{\lambda^2(3y^2 - x^2)}{2\lambda^2 xy} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = f(x, y),$$

то есть, функция $f(x, y)$ является однородной нулевого измерения. Следовательно, заданное уравнение — однородное.

Подставляем в уравнение выражения (9). Получаем

$$z'x + z = \frac{3x^2z^2 - x^2}{2x \cdot xz} \implies x \frac{dz}{dx} = \frac{3z^2 - 1}{2z} - z \implies x \frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - 1}{2z} \implies \frac{2z dz}{z^2 - 1} = \frac{dx}{x}.$$

Получили уравнение с разделёнными переменными. Интегрируем:

$$\int \frac{2z dz}{z^2 - 1} = \int \frac{dx}{x} \implies \ln |z^2 - 1| = \ln |x| + \ln |C|, \quad C \neq 0 \implies z^2 - 1 = Cx, \quad C \neq 0.$$

При разделении переменных пришлось делить на $x(z^2 - 1)$, поэтому могли потеряться решения $z^2 - 1 = 0$, то есть, $z = \pm 1$, и $x = 0$. Вторая функция не является решением уравнения, так как в нём x является независимой переменной и не может быть постоянной, а $z = \pm 1$ являются решениями и получаются из общего решения при $C = 0$.

Из первого равенства (9) находим $z = \frac{y}{x}$. Подставляя это в общее решение, получим $\frac{y^2}{x^2} - 1 = Cx$. Выражая отсюда y , найдём общее решение в виде $y = \pm x\sqrt{1 + Cx}$.

Чтобы найти частное решение, подставляем в общее решение начальные значения $x = 2, y = 1$: $1 = \pm 2\sqrt{1 + 2C}$. Отсюда видим, что перед корнем надо взять знак „+“, и что $C = -\frac{3}{8}$. Поэтому искомое частное решение есть $y = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$.

Ответ: $y = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$.

Замечание. В последнем примере найденное частное решение является единственным только при $0 \leq x < \frac{8}{3}$. В область $x < 0$ его можно продолжить любым решением вида $y = x\sqrt{1 + Cx}$ (на всю полуось $x < 0$ при $C \leq 0$, или на интервал $-\frac{1}{C} < x < 0$ при $C > 0$).

3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{10}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — заданные функции, называется *линейным*.

Если функция $q(x) \equiv 0$, то уравнение принимает вид

$$y' + p(x)y = 0 \tag{11}$$

и называется *однородным линейным дифференциальным уравнением*. Оно является уравнением с разделяющимися переменными.

Общее решение уравнения (10) можно сразу найти по формуле

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right) \tag{12}$$

(здесь под $\int p(x)dx$ подразумевается любая первообразная функции $p(x)$, одна и та же в обоих случаях).

Если имеются начальные условия $y(x_0) = y_0$, то решение задачи Коши будет иметь вид

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} \left(\int_{x_0}^x q(\tau) e^{\int_{x_0}^{\tau} p(t)dt} d\tau + y_0 \right). \quad (13)$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $xy' + 2y = x^2$.

Перепишем исходное уравнение в виде $y' + \frac{2}{x}y = x$. Это линейное уравнение (определяем просто визуально) с $p(x) = \frac{2}{x}$ и $q(x) = x$. По формуле (12) получаем

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left(\int x e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right) = e^{-2 \ln |x|} \left(\int x e^{2 \ln |x|} dx + C \right) = \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\int x^3 dx + C \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^4}{4} + C \right) = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}. \end{aligned}$$

Ответ: $y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$.

Пример 6. Решить задачу Коши: $y' = 2y + e^x - x$, $y(0) = \frac{1}{4}$.

Перепишем уравнение в виде $y' - 2y = e^x + x$. Оно является линейным с $p(x) = -2$ и $q(x) = e^x + x$. По формуле (13) получаем

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int_0^x 2dt} \left(\int_0^x (e^\tau + \tau) e^{\int_0^\tau 2dt} d\tau + \frac{1}{4} \right) = e^{-2t|_0^x} \left(\int_0^x (e^\tau + \tau) e^{2t|_0^\tau} d\tau + \frac{1}{4} \right) = \\ &= e^{-2x} \left(\int_0^x (e^\tau + \tau) e^{2\tau} d\tau + \frac{1}{4} \right) = e^{-2x} \left(\int_0^x (e^{3\tau} + e^{2\tau} \tau) d\tau + \frac{1}{4} \right) = \\ &= e^{-2x} \left(\left(\frac{e^{3\tau}}{3} + \frac{\tau e^{2\tau}}{2} - \frac{e^{2\tau}}{4} \right) \Big|_0^x + \frac{1}{4} \right) = \\ &= e^{-2x} \left(\frac{e^{3x}}{3} + \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{e^x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{-2x}}{6}. \end{aligned}$$

Ответ: $y = \frac{1}{12}(4e^x + 6x - 3 + 2e^{-2x})$.

Кроме этого метода, для решения линейного дифференциального уравнения можно применить подстановку Бернулли

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv', \quad (14)$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — две новые неизвестные функции. Подставляя (14) в уравнение (11), получим $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$, или $(u' + p(x)u)v + uv' = q(x)$. Так как неизвестных функций две, а уравнение только одно, мы можем одну из функций задать произвольно, а другую найти из уравнения. Удобно потребовать, чтобы функция $u \neq 0$ удовлетворяла условию $u' + p(x)u = 0$, тогда из уравнения получим, что $uv' = q(x)$. В результате исходное линейное дифференциальное

уравнение (11) сводится к системе двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} u' + p(x)u = 0, \\ uv' = q(x). \end{cases} \quad (15)$$

Пример 7. Решить линейное уравнение $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ методом Бернулли. Полагаем $y = uv$ и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} u' + u \operatorname{tg} x = 0, \\ uv' = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = -u \operatorname{tg} x &\implies \frac{du}{u} = -\operatorname{tg} x dx \implies \int \frac{du}{u} = - \int \operatorname{tg} x dx \implies \\ &\implies \ln |u| = \ln |\cos x| \implies u = \cos x \end{aligned}$$

Заметим, что в этом случае при интегрировании константу C не прибавляем, так как нам нужна только одна функция $u \neq 0$.

Решаем второе уравнение.

$$\begin{aligned} uv' = \frac{1}{\cos x} &\implies \cos x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos x} \implies dv = \frac{1}{\cos^2 x} \implies \int dv = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \implies \\ &\implies v = \operatorname{tg} x + C \end{aligned}$$

Итак, $y = uv = \cos x(\operatorname{tg} x + C) = \sin x + C \cos x$.

Ответ: $y = \sin x + C \cos x$.

Пример 8. Решить задачу Коши: $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$, $y(e) = e^2$.

Подставляя $y = uv$, получим систему

$$\begin{cases} u' + \frac{u}{x \ln x} = 0, \\ uv' = x \ln x. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x \ln x} &\implies \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x \ln x} \implies \int \frac{du}{u} = - \int \frac{dx}{x \ln x} \implies \ln |u| = -\ln |\ln x| \implies \\ &\implies u = \frac{1}{\ln x} \end{aligned}$$

Решаем второе уравнение.

$$\begin{aligned} uv' = x \ln x &\implies \ln x \frac{dv}{dx} = x \ln x \implies dv = x dx \implies \int dv = \int x dx \implies \\ &\implies v = \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Теперь находим общее решение: $y = uv = \ln x \left(\frac{x^2}{2} + C \right)$.

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, подставим в общее решение начальные значения $x = e$, $y = e^2$:

$$e^2 = \ln e \left(\frac{e^2}{2} + C \right) \implies C = \frac{e^2}{2} \implies y = \frac{1}{2}(x^2 + e^2) \ln x.$$

Ответ: $y = \frac{1}{2}(x^2 + e^2) \ln x$.

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Рассмотрим дифференциальное уравнение n -го порядка (1). Будем предполагать, что это уравнение можно разрешить относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (16)$$

(решений может быть больше одного, тогда уравнение (1) распадается на несколько уравнений вида (16)).

Задача Коши для уравнения (16) ставится следующим образом: найти решение $y = y(x)$ уравнения (16), удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \quad y''|_{x=x_0} = y''_0, \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \quad (17)$$

где $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

Общим решением дифференциального уравнения n -го порядка называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, зависящая от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ такая, что, во-первых, удовлетворяет уравнению при любых значениях $C_1, C_2, \dots, C_n$ и, во-вторых, при заданных начальных условиях $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$ можно подобрать так, что функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ будет удовлетворять данным условиям.

Соотношение вида $\Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, неявно определяющее общее решение, называется общим интегралом.

Всякая функция, получающаяся из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, называется частным решением.

§ 5. ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА.

1. Дифференциальные уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Последовательно интегрируя, получим

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int \left(\int \left(\int f(x) dx \right) dx \right) dx + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3,$$

$\vdots$

$$y = \underbrace{\int (\dots (\int (\int (\int f(x) dx) dx) dx) \dots) dx}_{n \text{ интегралов}} + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \frac{C_3}{(n-3)!} x^{n-3} + \dots + C_n.$$

Пример 9. Решить уравнение $y'' = \sin 2x$.

Дважды интегрируем:

$$y' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C_1,$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + C_1\right) dx = -\frac{1}{4} \sin 2x + C_1 x + C_2.$$

Ответ: $y = -\frac{1}{4} \sin 2x + C_1 x + C_2$.

Пример 10. Решить задачу Коши: $y'' = x^2$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -5$.

Интегрируем первый раз:

$$y' = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1.$$

Подставляем начальные значения $x = 0$ и $y' = -5$:

$$-5 = \frac{0^3}{3} + C_1 \implies C_1 = -5 \implies y' = \frac{x^3}{3} - 5.$$

Интегрируем второй раз:

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - 5\right) dx = \frac{x^4}{12} - 5x + C_2.$$

Подставляем начальные значения $x = 0$ и $y = 4$:

$$4 = \frac{0^4}{12} - 5 \cdot 0 + C_2 \implies C_2 = 4 \implies y = \frac{x^4}{12} - 5x + 4.$$

Ответ: $y = \frac{x^4}{12} - 5x + 4$.

2. Дифференциальные уравнения, не содержащие в явном виде неизвестную функцию.

Уравнение имеет вид

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}). \quad (18)$$

Порядок такого уравнения можно понизить на единицу, приняв за новую неизвестную функцию $z = y'$. Тогда $y'' = z'$, $y''' = z''$, ..., $y^{(n)} = z^{(n-1)}$.

Пример 11. Решить уравнение $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$.

Уравнение не содержит y в своей записи. Полагаем $y' = z$, тогда $y'' = z'$. Уравнение примет вид: $(1 + x^2)z' - 2xz = 0$. Получили уравнение первого порядка (в данном случае — с разделяющимися переменными). Решаем его.

$$\begin{aligned} (1 + x^2) \frac{dz}{dx} = 2xz &\implies \frac{dz}{z} = \frac{2x dx}{1 + x^2} \implies \int \frac{dz}{z} = \int \frac{2x dx}{1 + x^2} \implies \\ &\implies \ln |z| = \ln(1 + x^2) + \ln |C_1| \implies z = C_1(1 + x^2) \end{aligned}$$

Разделяя переменные, мы делили на z , поэтому могли потерять решение $z = 0$ (проверяется подстановкой). Это решение получается из общего при $C_1 = 0$.

Теперь вспоминаем, что $z = y'$, и получаем

$$y' = C_1(1 + x^2) \implies y = C_1 \int (1 + x^2) dx + C_2 \implies y = C_1 \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2.$$

Ответ: $y = C_1 \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$.

Замечание. Если уравнение не содержит в явном виде не только неизвестную функцию y , но и её производные $y', y'', \dots, y^{(k-1)}$ порядка, меньшего k , то порядок уравнения можно понизить на k единиц, приняв в качестве новой неизвестной функции $z = y^{(k)}$.

3. Дифференциальные уравнения, не содержащие в явном виде независимую переменную.

Уравнение имеет вид

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (19)$$

Порядок такого уравнения можно понизить на единицу, если в качестве новой независимой переменной принять y , а в качестве новой неизвестной функции — $p = y' = \frac{dy}{dx}$. Используя формулу производной сложной функции, находим далее $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$,
 $y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy} \left(p \frac{dp}{dy} \right) \frac{dy}{dx} = p \left(p \frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \right),$
 $\dots$

Принимая y за независимую переменную, мы теряем решения вида $y = C$, так как независимая переменная не может иметь постоянное значение. Чтобы найти эти решения, нужно подставить в уравнение (19) $y = C, y' = y'' = \dots = y^{(n)} = 0$.

Пример 12. Решить уравнение $yy'' - (y')^2 = y^2y'$.

Это уравнение не содержит x явно. Полагаем $y' = p(y), y'' = p \frac{dp}{dy}$.

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 = y^2p \implies y \frac{dp}{dy} - p = y^2 \implies \frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = y$$

Получили линейное уравнение. Решаем его с помощью подстановки Бернулли (14): $p = uv, \frac{dp}{dy} = \frac{du}{dy}v + u \frac{dv}{dy}$.

$$\frac{du}{dy}v + u \frac{dv}{dy} - \frac{uv}{y} = y \implies v \left(\frac{du}{dy} - \frac{u}{y} \right) + u \frac{dv}{dy} = y \implies \begin{cases} \frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = 0 \\ u \frac{dv}{dy} = y \end{cases}$$

Решаем первое уравнение:

$$\frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = 0 \implies \frac{du}{u} = \frac{dy}{y} \implies \int \frac{du}{u} = \int \frac{dy}{y} \implies \ln |u| = \ln |y| \implies u = y.$$

Решаем второе уравнение:

$$u \frac{dv}{dy} = y \implies y \frac{dv}{dy} = y \implies dv = dy \implies \int dv = \int dy + C_1 \implies v = y + C_1.$$

Наконец, получаем $p = uv = y(y + C_1)$. Вспоминая, что $p = y'$, получаем уравнение $y' = y(y + C_1)$. Это — уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = y(y + C_1) \implies \frac{dy}{y(y + C_1)} = dx \implies \int \frac{dy}{y(y + C_1)} = \int dx + C_2 \implies$$

$$\implies \int \frac{dy}{y(y+C_1)} = x + C.$$

Если $C_1 = 0$, то получаем

$$\int \frac{dy}{y^2} = x + C \implies -\frac{1}{y} = x + C \implies y = -\frac{1}{x+C}.$$

Если $C_1 \neq 0$, то, умножая обе части уравнения на C_1 , получим

$$\begin{aligned} \int \frac{C_1 dy}{y(y+C_1)} &= C_1(x+C) \implies \int \frac{(y+C_1)-y}{y(y+C_1)} dy = C_1(x+C) \implies \\ \implies \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+C_1} \right) dy &= C_1(x+C) \implies \ln|y| - \ln|y+C_1| = C_1x + C_1C. \end{aligned}$$

Обозначим $\ln|C_2| = C_1C$. Получаем общее решение:

$$\ln \left| \frac{y}{y+C_1} \right| = C_1x + \ln|C_2| \implies \frac{y}{y+C_1} = C_2 e^{C_1x} \implies y = \frac{C_1 C_2 e^{C_1x}}{1 - C_2 e^{C_1x}}.$$

Принимая y за независимую переменную, мы могли потерять решения вида $y = C$. Подставляя $y = C$, $y' = y'' = 0$ в заданное уравнение, видим, что постоянная функция $y = C$ при любом C является решением.

Ответ: $y = \frac{C_1 C_2 e^{C_1x}}{1 - C_2 e^{C_1x}}$, $y = -\frac{1}{x+C}$, $y = C$.

Пример 13. Найти решение уравнения $yy'' = (y')^2 - (y')^3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

Положим $y' = p(y) \implies y'' = p'p$. Получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} yp'p &= p^2 - p^3 \implies y \frac{dp}{dy} = p(1-p) \implies \frac{dp}{p(1-p)} = \frac{dy}{y} \implies \int \frac{dp}{p(1-p)} = \int \frac{dy}{y} \implies \\ \implies \ln \left| \frac{p}{1-p} \right| &= \ln|C_1 y| \implies \frac{p}{1-p} = C_1 y \implies \frac{y'}{1-y'} = C_1 y. \end{aligned}$$

При делении на $p(1-p)$ могли потерять решения $p = 0$ и $p = 1$, что дадут $y' = 0$ и $y' = 1$. Оба этих решения не удовлетворяют начальному условию $y'(1) = -1$, поэтому их далее не рассматриваем.

Найдём значение C_1 , используя начальные условие $y'(1) = -1$ и $y(1) = 1$:

$$\frac{-1}{1+1} = C_1 \cdot 1 \implies C_1 = -\frac{1}{2}.$$

Подставляя в общее решение $C_1 = -\frac{1}{2}$ и $p = y'$, получим

$$\frac{y'}{1-y'} = -\frac{1}{2}y \implies 2y' = yy' - y \implies (2-y)y' = -y \implies (y-2)\frac{dy}{dx} = y.$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, находим

$$\frac{y-2}{y}dy = dx \implies \int \left(1 - \frac{2}{y}\right) dy = \int dx \implies y - 2 \ln |y| = x + C_2.$$

Подставляем начальные значения $x = 1, y = 1$:

$$1 - 2 \ln 1 = 1 + C_2 \implies C_2 = 0 \implies y - 2 \ln |y| = x.$$

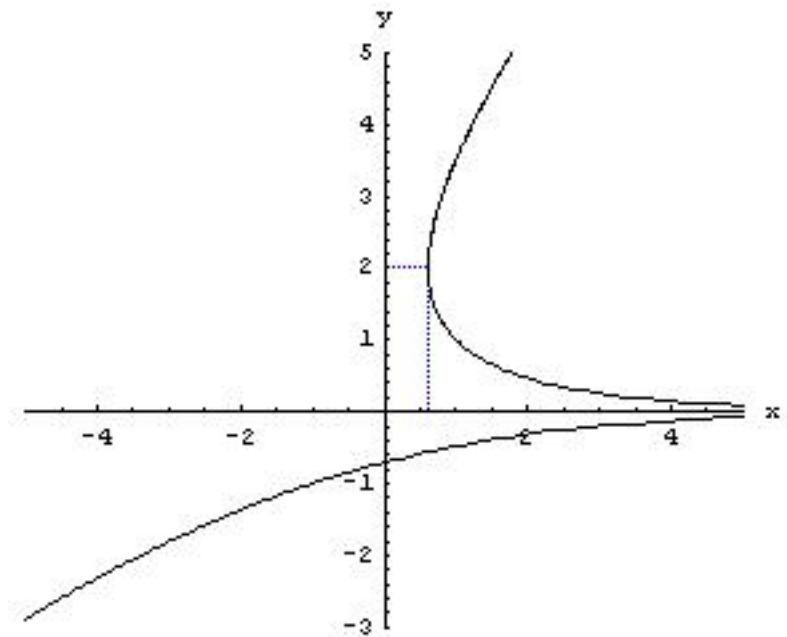
Эта формула на самом деле определяет три решения:

$y - 2 \ln(-y) = x$ при $-\infty < x < +\infty, y < 0$;

$y - 2 \ln y = x$ при $2(1 - \ln 2) < x < +\infty, y > 2$;

$y - 2 \ln y = x$ при $2(1 - \ln 2) < x < +\infty, 0 < y < 2$.

Начальным условиям удовлетворяет только третье из них.



Решения вида $y = C$ не удовлетворяют начальному условию $y'(1) = -1$.

Ответ: $x = y - 2 \ln y, 0 < y < 2$.

§ 6. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

1. Однородные уравнения.

Линейное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (20)$$

где a, b, c — заданные числа, $a \neq 0$.

Квадратное уравнение

$$ak^2 + bk + c = 0 \quad (21)$$

называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (20).

Характеристическое уравнение в области комплексных чисел всегда имеет два корня k_1 и k_2 с учётом кратности. В зависимости от знака дискриминанта квадратного уравнения общее решение исходного уравнения записывается в одном из следующих трёх видов:

1. $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, если k_1 и k_2 действительны и различны ($k_1 \neq k_2$);
2. $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$, если $k_1 = k_2 = k$;
3. $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Пример 14. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 3k + 2 = 0$, его корни $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Пример 15. Решить уравнение $9y'' + 42y' + 49y = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид $9k^2 + 42k + 49 = 0$, его корни $k_1 = k_2 = -\frac{7}{3}$.

Ответ: $y = C_1 e^{-\frac{7}{3}x} + C_2 x e^{-\frac{7}{3}x}$.

Пример 16. Решить уравнение $y'' + y' + y = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k + 1 = 0$, его корни $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ответ: $y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$.

Пример 17. Найти частное решение уравнения $y'' - y' - 6y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 4$, $y'(0) = -1$.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - k - 6 = 0$, его корни $k_1 = -2$, $k_2 = 3$. Общее решение имеет вид $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$. Найдём производную от общего решения: $y' = -2C_1 e^{-2x} + 3C_2 e^{3x}$. Подставляя в последние два равенства начальные условия, получим систему двух уравнений с неизвестными C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} 4 = C_1 + C_2, \\ -1 = -2C_1 + 3C_2. \end{cases}.$$

Решением системы будут значения $C_1 = \frac{13}{5}$, $C_2 = \frac{7}{5}$.

Ответ: $y = \frac{13}{5}e^{-2x} + \frac{7}{5}e^{3x}$.

2. Неоднородные уравнения.

Неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами a , b , c , $a \neq 0$, имеет вид

$$ay'' + by' + cy = f(x); \quad (22)$$

соответствующее ему однородное уравнение имеет вид (20).

Общее решение неоднородного уравнения определяется следующей теоремой о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения: общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма любого его частного решения $\tilde{y}$ и общего решения $\bar{y}$ соответствующего ему однородного уравнения.

Таким образом, $y = \bar{y} + \tilde{y}$.

Нахождение $\bar{y}$ было рассмотрено в предыдущем пункте.

Одним из способов нахождения частного решения $\tilde{y}$ в простейших случаях является метод неопределённых коэффициентов (Таблица 1).

Таблица 1. Структура частного решения $\tilde{y}$

Правая часть дифференциального уравнения $f(x)$	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения $\tilde{y}$
$f(x) = P_m(x)$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m	а) число 0 не является корнем характеристического уравнения	$Q_m(x)$, где $Q_m(x)$ – многочлен с неопределёнными коэффициентами степени m
	б) число 0 является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r Q_m(x)$
$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$, α – действительное число	а) число α не является корнем характеристического уравнения	$Q_m(x) e^{\alpha x}$
	б) число α является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r Q_m(x) e^{\alpha x}$
$f(x) = P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно	а) число $\pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$U_l(x) \cos \beta x + V_l(x) \sin \beta x$, где $U_l(x)$ и $V_l(x)$ – многочлены с неопределёнными коэффициентами степени $l = \max\{m, n\}$
	б) число $\pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r (U_l(x) \cos \beta x + V_l(x) \sin \beta x)$
$f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x)$	а) число $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x} (U_l(x) \cos \beta x + V_l(x) \sin \beta x)$, где $U_l(x)$ и $V_l(x)$ – многочлены с неопределёнными коэффициентами степени $l = \max\{m, n\}$
	б) число $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r e^{\alpha x} (U_l(x) \cos \beta x + V_l(x) \sin \beta x)$

Рассмотрим примеры на применение метода неопределённых коэффициентов.

Пример 18. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 2xe^x$.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 5k + 6 = 0$, его корни $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, тогда $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

В правой части уравнения функция имеет вид произведения многочлена первой степени на e^x . На основании таблицы 1 для $f(x) = e^{\alpha x} P_1(x)$, $\alpha = 1$, полагаем, $\tilde{y} = (Ax + B)e^x$ (случай а), так как $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения). Далее, $y' = Ae^x + (Ax + B)e^x = (Ax + A + B)e^x$, $y'' = Ae^x + (Ax + A + B)e^x = (Ax + 2A + B)e^x$. Подставим полученные выражения в исходное уравнение:

$$(Ax + 2A + B)e^x - 5(Ax + A + B)e^x + 6(Ax + B)e^x = 2xe^x.$$

Сокращая на e^x и приводя подобные члены, получаем равенство

$$2Ax - 3A + 2B = 2x.$$

Сравнивая коэффициенты левой и правой части последнего равенства при одинаковых степенях x , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2A = 2, \\ -3A + 2B = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим $A = 1$, $B = \frac{3}{2}$. Следовательно, $\tilde{y} = (x + \frac{3}{2})e^x$.

Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + (x + \frac{3}{2})e^x$.

Пример 19. Найти общее решения уравнения $y'' - 6y' + 9y = (x^2 + 2x)e^{3x}$.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 6k + 9 = 0$, его корни $k_1 = k_2 = 3$, поэтому $\bar{y} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$. В правой части функция имеет вид произведения многочлена второй степени на e^{3x} . Для функции $f(x) = P_2(x)e^{\alpha x}$, $\alpha = 3$, $P_2(x) = x^2 + 2x$, на основании таблицы 1 (случай б), так как $\alpha = 3$ является корнем характеристического уравнения кратности $r = 2$ полагаем

$$\tilde{y} = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^{3x} = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)e^{3x}.$$

Далее находим производные:

$$\begin{aligned} y' &= (4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx)e^{3x} + (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2) \cdot 3e^{3x} = \\ &= (3Ax^4 + (4A + 3B)x^3 + (3B + 3C)x^2 + 2Cx)e^{3x}, \\ y'' &= (12Ax^3 + (4A + 3B) \cdot 3x^2 + (3B + 3C) \cdot 2x + 2C)e^{3x} + \\ &\quad + (3Ax^4 + (4A + 3B)x^3 + (3B + 3C)x^2 + 2Cx) \cdot 3e^{3x} = \\ &= (9Ax^4 + (24A + 9B)x^3 + (12A + 18B + 9C)x^2 + (6B + 12C)x + 2C)e^{3x}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} &(9Ax^4 + (24A + 9B)x^3 + (12A + 18B + 9C)x^2 + (6B + 12C)x + 2C)e^{3x} - \\ &- 6(3Ax^4 + (4A + 3B)x^3 + (3B + 3C)x^2 + 2Cx)e^{3x} + \\ &\quad + 9(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)e^{3x} = (x^2 + 2x)e^{3x}, \\ &(12Ax^2 + 6Bx + 2C)e^{3x} = (x^2 + 2x)e^{3x}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых выражениях в левой и правой части последнего равенства, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 12A = 1, \\ 6B = 2, \\ 2C = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим $A = \frac{1}{12}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = 0$. Следовательно, $\tilde{y} = \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3}\right)e^{3x}$.

Ответ: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3}\right) e^{3x}$.

В следующих примерах показан подбор частного решения $\tilde{y}$ без нахождения коэффициентов.

Пример 20. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 3 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, поэтому общее решение однородного уравнения есть $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

Для $f(x) = P_0(x)e^{4x}$, $P_0(x) = 1$, из таблицы 1 ($\alpha = 4$ не является корнем характеристического уравнения) находим $\tilde{y} = Ae^{4x}$.

Пример 21. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{-x}$.

Из предыдущего примера следует, что $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. Для $f(x) = P_0(x)e^{-x}$, $P_0(x) = 3$, из таблицы 1 ($\alpha = -1$ является корнем характеристического уравнения кратности 1) находим $\tilde{y} = Axe^{-x}$.

Пример 22. $y'' - 2y' + y = 5e^x$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 1$, тогда $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Для $f(x) = P_0(x)e^x$, $P_0(x) = 5$, из таблицы 1 ($\alpha = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности 2) находим $\tilde{y} = Ax^2 e^x$.

Пример 23. $y'' - y = x^2 + 1$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, тогда $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$. Для $f(x) = P_2(x) = x^2 + 1$ из таблицы 1 ($\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения) находим $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$.

Пример 24. $y'' - 2y' - 3y = \sin 3x$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 3 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, тогда $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. Для $f(x) = P_0(x) \cdot \cos 4x + Q_0(x) \sin 4x$, где $P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$, из таблицы 1 ($\beta = \pm 4$ не является корнем характеристического уравнения) находим $\tilde{y} = A \cos 4x + B \sin 4x$.

Пример 25. $y'' + 4y = \sin 2x - 3 \cos 2x$.

Характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 2i$, тогда $\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Для $f(x) = P_0(x) \cos 2x + Q_0(x) \sin 2x$, где $P_0(x) = 1$, $Q_0(x) = -3$, из таблицы 1 ($\beta = \pm 2$ является корнем характеристического уравнения кратности 1) находим $\tilde{y} = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$.

Встречаются случаи, когда правая часть неоднородного уравнения есть сумма нескольких функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$. Тогда для каждого слагаемого находится частное решение $\tilde{y}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \dots + \tilde{y}_n$.

Пример 26. Найти частное решение уравнения $y'' - 4y' = -20xe^{2x} - 4 + 16x - 25 \cos 5x + 20 \sin 5x$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 5$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 4k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$ и $k_2 = 4$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{4x}$.

Правая часть заданного уравнения имеет вид $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, где $f_1(x) = -20xe^{2x}$, $f_2(x) = 16x - 4$, $f_3(x) = -25 \cos 5x + 20 \sin 5x$. Соответственно, частное решение можно искать в виде $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3$.

1) $f_1(x) = -20xe^{2x} = P_1(x)e^{2x}$, где $P_1(x) = -20x$ - многочлен первой степени. Здесь $\alpha = 2$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $\tilde{y}_1 = (Ax + B)e^{2x}$. Тогда $\tilde{y}'_1 = Ae^{2x} + (Ax + B) \cdot 2e^{2x} = (2Ax + A + 2B)e^{2x}$, $\tilde{y}''_1 = 2Ae^{2x} + (2Ax + A + 2B)2e^{2x} = (4Ax + 4A + 4B)e^{2x}$. Подставим в исходное уравнение и, сократив на e^{2x} , получим $4Ax + 4A + 4B - 4(2Ax + A + 2B) = -20x$, то есть, $-4Ax - 4B = -20x$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем $-4A = -20$ и $-4B = 0$, откуда $A = 5$, $B = 0$, т.е. $\tilde{y}_1 = 5xe^{2x}$.

2) $f_2(x) = 16x - 4 = P_1(x)$ многочлен первой степени. Так как $\alpha = 0$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, находим $\tilde{y}_2 = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$. Тогда $\tilde{y}'_2 = 2Ax + B$, $\tilde{y}''_2 = 2A$. Подставим в исходное уравнение, получим $2A - 4(2Ax + B) = 16x - 4$, то есть, $-8Ax + 2A - 4B = 16x - 4$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем $-8A = 16$, $2A - 4B = -4$, откуда $A = -2$, $B = 0$ и $\tilde{y}_2 = -2x^2$.

3) $f_3(x) = P_0(x) \cos 5x + Q_0(x) \sin 5x$, где $P_0(x) = -25$ и $Q_0(x) = 20$ - многочлены нулевой степени. Так как $\pm 5i$ не являющиеся корнем характеристического уравнения, находим $\tilde{y}_3 = A \cos 5x + B \sin 5x$. Тогда $\tilde{y}'_3 = -5A \sin 5x + 5B \cos 5x$, $\tilde{y}''_3 = -25A \cos 5x - 25B \sin 5x$. Подставим в исходное уравнение: $-25A \cos 5x - 25B \sin 5x - 4(-5A \sin 5x + 5B \cos 5x) = -25 \cos 5x + 20 \sin 5x$. Приравнявая коэффициенты при $\cos 5x$ и $\sin 5x$, получаем $-25A - 20B = -25$, $20A - 25B = 20$, откуда $A = 1$, $B = 0$ и $\tilde{y}_3 = \cos 5x$.

Теперь мы можем написать общее решение нашего уравнения:

$$y = \bar{y} + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 = C_1 + C_2 e^{4x} + 5xe^{2x} - 2x^2 + \cos 5x.$$

Найдём частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$. Так как

$$y' = 4C_2 e^{4x} + 5e^{2x} + 10xe^{2x} - 4x - 5 \sin 5x,$$

то, подставив начальные значения в общее решение и в его производную, получим уравнения $2 = C_1 + C_2 + 1$ и $5 = 4C_2 + 5$. Следовательно, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Частное решение имеет вид $y = 1 + 5xe^{2x} - 2x^2 + \cos 5x$.

Ответ: $y = 1 + 5xe^{2x} - 2x^2 + \cos 5x$.

§ 7. СИСТЕМЫ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Ограничимся рассмотрением систем второго порядка.

Однородная система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами в нормальной форме имеет вид

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (23)$$

или, в матричной форме,

$$X'(t) = AX(t), \quad (24)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Слова „в нормальной форме“ означают, что система разрешена относительно производных неизвестных функций.

Фундаментальной системой решений системы (24) называется совокупность двух произвольных линейно независимых решений

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

а составленная из них матрица

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix} \quad (27)$$

называется *фундаментальной матрицей* системы.

Общее решение системы (24) можно записать в виде

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) = W(t) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Система (25) может быть решена средствами линейной алгебры. Если характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (29)$$

имеет различные действительные корни λ_1 и λ_2 , то соответствующие им собственные векторы $X_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix}$ и $X_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}$ линейно независимы, а решение системы имеет вид

$$X(t) = C_1 X_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 X_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (30)$$

Пример 27. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x' = 5x + 3y, \\ y' = 2x + 6y. \end{cases}$$

В матричной форме система имеет вид
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - 11\lambda + 24 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 8$.

Для нахождения собственного вектора для $\lambda_1 = 3$ по матрице

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 5 - \lambda_1 & 3 \\ 2 & 6 - \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 3 & 3 \\ 2 & 6 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

составим систему уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0, \\ 2\alpha + 3\beta = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что одно уравнение лишнее, а поэтому система имеет бесконечное множество решений. Придадим β любое числовое значение, кроме 0, например, $\beta = 2$, тогда $\alpha = -3$. Получили собственный вектор $X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Аналогично, для нахождения собственного вектора для $\lambda_2 = 8$ по матрице

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 5 - \lambda_2 & 3 \\ 2 & 6 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 8 & 3 \\ 2 & 6 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

составим систему уравнений

$$\begin{cases} -3\alpha + 3\beta = 0, \\ 2\alpha - 2\beta = 0. \end{cases}$$

Придадим β любое числовое значение, кроме 0, например, $\beta = 1$, тогда из любого уравнения выходит $\alpha = 1$. Получили собственный вектор $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Теперь по формуле (30) получаем общее решение:

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8t}.$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = -3C_1 e^{3t} + C_2 e^{8t}, \\ y = 2C_1 e^{3t} + C_2 e^{8t}. \end{cases}$$

Однако при использовании этого метода в случаях, когда корни характеристического уравнения одинаковые или комплексные, возникают определённые осложнения. Поэтому часто используют другой метод – метод исключения.

Пример 28. Решить систему уравнений $\begin{cases} x' = 5x + 3y, \\ y' = 2x + 6y \end{cases}$ методом исключения неизвестной переменной.

Предположим, мы хотим исключить неизвестную x .

Продифференцируем второе уравнение ещё раз:

$$y'' = 2x' + 6y'.$$

Подставим в полученное уравнение вместо x' его выражение из первого уравнения:

$$y'' = 2(5x + 3y) + 6y' \implies y'' = 10x + 6y + 6y'.$$

И, наконец, из второго уравнения заданной системы $y' = 2x + 6y$ выразим $x = \frac{1}{2}(y' - 6y)$ и подставим его в уравнение $y'' = 10x + 6y + 6y'$:

$$y'' = 5y' - 30y + 6y + 6y' \implies y'' - 11y' + 24y = 0.$$

Корни характеристического уравнения $k^2 - 11k + 24 = 0$ равны $k_1 = 3$ и $k_2 = 8$. Тогда $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{8t}$, а

$$x = \frac{1}{2}(y' - 6y) = \frac{1}{2}(3C_1 e^{3t} + 8C_2 e^{8t} - 6C_1 e^{3t} - 6C_2 e^{8t}) = -\frac{3}{2}C_1 e^{3t} + C_2 e^{8t}.$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}C_1 e^{3t} + C_2 e^{8t}, \\ y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{8t}. \end{cases}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4.

1. – 10. Найдите частное решение дифференциального уравнения.

1. $(x^2 - y^2)y' = 2xy$, $y(1) = 1$.
2. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$, $y(0) = 5$.
3. $xy' = y \ln \frac{y}{x}$, $y(1) = e^2$.
4. $xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0$, $y(1) = 2$.
5. $xy' + y = 3$, $y(1) = -2$.
6. $y' \cos x = (y + 1) \sin x$, $y(0) = 3$.
7. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(1) = 0$.
8. $x^2 y' - 2xy = 3$, $y(1) = -3$.
9. $(1 - x^2)y' + xy = 1$, $y(0) = -1$.
10. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$, $y(1) = 1$.

11 – 20. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка.

11. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$.
12. $2yy'' - (y')^2 = 0$.
13. $x(y'' + 1) + y' = 0$.
14. $xy'' - y' = e^x x^2$.
15. $y'' + 2y(y')^3 = 0$.
16. $y'' y^3 = 1$.
17. $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$.
18. $y'' x \ln x - y' = 0$.
19. $2(y')^2 = (y - 1)y''$.
20. $2yy'' = 1 + (y')^2$.

21 – 30. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$.

21. $y'' + 4y' - 12y = 40 \sin 2x + 64e^{2x} - 36x$, $y_0 = -3$, $y'_0 = 0$.
22. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 27x + 3 + 2e^{3x} + 18 \cos 3x$, $y_0 = 0$, $y'_0 = \frac{5}{3}$.
23. $y'' + 4y = 8e^{-2x} + 4x^2 - 4x + 6 + 12 \cos x$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$.
24. $y'' - 2y' + 5y = 25xe^{2x} - 17 \cos 2x + 34 \sin 2x$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 0$.
25. $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x} + 3x + 1 + 52 \cos 2x$, $y_0 = \frac{3}{4}$, $y'_0 = \frac{27}{2}$.
26. $y'' + 6y' + 9y = (12x^2 - 6x)e^{-3x} + 18 \sin 3x$, $y_0 = 1$, $y'_0 = -1$.
27. $y'' - 4y' + 13y = 25e^{-2x} + 13x + 40 \cos 3x$, $y_0 = \frac{17}{13}$, $y'_0 = 0$.
28. $y'' - 4y' = 16e^{4x} + 3x - 6x^2$, $y_0 = 2$, $y'_0 = 0$.
29. $y'' - 2y' + y = 6xe^x + 25 \sin 2x$, $y_0 = 2$, $y'_0 = -1$.
30. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}(2 + 6x) + 78 \sin 3x$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 0$.

31 – 40. Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Требуется: 1) найти общее решение с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и её решение в матричной форме; 3) решить систему способом исключения переменной.

$$\begin{array}{ll}
 31. \begin{cases} x' = 4x + 6y, \\ y' = 4x + 2y. \end{cases} & 32. \begin{cases} x' = -5x - 4y, \\ y' = -2x - 3y. \end{cases} \\
 33. \begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases} & 34. \begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases} \\
 35. \begin{cases} x' = -x + 5y, \\ y' = x + 3y. \end{cases} & 36. \begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases} \\
 37. \begin{cases} x' = -4x - 6y, \\ y' = -4x - 2y. \end{cases} & 38. \begin{cases} x' = -5x - 8y, \\ y' = -3x - 3y. \end{cases} \\
 39. \begin{cases} x' = -x - 5y, \\ y' = -7x - 3y. \end{cases} & 40. \begin{cases} x' = -7x + 5y, \\ y' = 4x - 8y. \end{cases}
 \end{array}$$

Рекомендуемая литература.

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. - т. 2. - М., - Наука, 1985, 2004.
2. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т. и др. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / [К.Н. Лунгу и др.]; под ред. С.Н. Федина. - 5-е изд. - М. : Айриспресс, 2007.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2: Учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. - 6-е изд. - М. ООО "Издательство оникс": ООО "Издательство "Мир и образование, 2006.