

Негосударственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Центросоюза Российской Федерации

СИБИРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Программа, методические указания и задания
контрольной и самостоятельной работ
для студентов заочной формы обучения
направления 080100.62 *Экономика*

Новосибирск 2013

Кафедра статистики и математики

Линейная алгебра: программа, методические указания и задания контрольной и самостоятельной работ для студентов заочной формы обучения / сост.: канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. Брюханов, ст. преподаватель Н. В. Комиссарова, д-р физ.-мат. наук, профессор Л.Г. Гузевский; НОУ ВПО Центросоюза РФ СибУПК. – Новосибирск, 2013. – 53 с.

Рецензент: Н.Г. Орлова канд. физ.-мат. наук, доцент.

Программа, методические указания и задания контрольной и самостоятельной работ рекомендованы к изданию кафедрой статистики и математики, протокол от 24 декабря 2012 г. №5.

© НОУ ВПО Центросоюза РФ
Сибирский университет
потребительской кооперации, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения	3
2. Программа дисциплины	4
2.1. Объем дисциплины и виды учебной работы по срокам обучения	4
2.2. Тематический план	5
2.3. Разделы дисциплины	6
2.4. Темы и их краткое содержание	7
3. Рекомендации по выполнению и оформлению работы	9
4. Задания контрольной работы и методические указания к их выполнению	13
5. Задания самостоятельной работы студентов	42
6. Список рекомендуемой литературы	48

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Математика является универсальным языком науки и частью общей культуры человечества. В настоящее время математика занимает важное положение практически во всех областях человеческих знаний. Поэтому математическое образование – важная составляющая в системе подготовки современного специалиста.

Дисциплина «Линейная алгебра» включена в базовую часть математического и естественнонаучного цикла дисциплин учебных планов подготовки бакалавров многих направлений. Цель изучения дисциплины «Линейная алгебра» в системе подготовки бакалавров – овладение фундаментальными понятиями и методами математики, дающими теоретическое обеспечение для современных компьютерных и информационных технологий. Содержание дисциплины «Линейная алгебра» основывается на преемственности и взаимосвязи с такими дисциплинами, как «Математический анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Методы оптимальных решений», «Теория игр».

Задачами изучения линейной алгебры как фундаментальной дисциплины являются:

- овладение основными понятиями и теоремами линейной алгебры, применяемыми для построения стандартных экономических моделей и описания экономических процессов;
- выработка умения моделировать реальные информационно технологические процессы и применять аппарат линейной алгебры для анализа экономической информации, согласно построенной экономической модели;
- освоение методами линейной алгебры применяемых для построения и анализа стандартных экономических моделей.

Предлагаемая методическая разработка содержит программу, задания контрольной работы и методические указания по их выполнению, где сформулированы основные теоретические положения и даны образцы решения задач контрольной работы. Поскольку эти задачи не охватывают весь программный материал, то в разделе «Задания самостоятельной работы студентов» приведены типовые задачи по каждой теме, входящей в программу дисциплины. Эти задачи студенту рекомендуется использовать для подготовки к экзамену. Ответы на вопросы, возникающие при решении задач, студент может найти также в учебниках из «Списка рекомендуемой литературы».

2. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Объем дисциплины и виды учебной работы по срокам обучения (ч)

Срок обучения – 4 года 6 мес.

Вид занятий	1 курс
Аудиторные занятия:	22
лекции	8
практические	14
Контрольная работа	+
Самостоятельная работа	86
Зачетные единицы	4
<i>в том числе без экзамена</i>	3
<i>Общая трудоемкость</i>	108
Вид итогового контроля	Экзамен

Срок обучения – 3 года 6 мес.

Вид занятий	1 курс
Аудиторные занятия:	20
лекции	8
практические	12
Контрольная работа	+
Самостоятельная работа	88
Зачетные единицы	4
<i>в том числе без экзамена</i>	3
<i>Общая трудоемкость</i>	108
Вид итогового контроля	Экзамен

2.2. Тематический план

Срок обучения – 4 года 6 мес.

№ п.п	Темы дисциплины	Количество часов на изучение			
		всего	в том числе		
			лекции	практика	СРС
1	Основные алгебраические структуры. Числовые поля и многочлены.	6		2	4
2	Матрицы.	10	2		8
3	Системы линейных алгебраических уравнений.	15		2	13
4	Векторные пространства и линейные отображения. Пространство геометрических векторов.	8	2		6
5	Линейные геометрические объекты.	14		2	12
6	Кривые и поверхности второго порядка.	10		2	8
7	Линейные пространства и линейные преобразования.	12	2	2	8
8	Евклидовы пространства и их топология. Многомерная евклидова геометрия.	11		2	9
9	Квадратичные формы.	10	2		8
10	Классификация кривых и поверхностей второго порядка.	12		2	10
	ВСЕГО	108	8	14	86

Срок обучения – 3 года 6 мес.

№ п.п	Темы дисциплины	Количество часов на изучение			
		всего	в том числе		
			лекции	практика	СРС
1	Основные алгебраические структуры. Числовые поля и многочлены.	6		2	4
2	Матрицы.	10	2		8
3	Системы линейных алгебраических уравнений.	14		2	12
4	Векторные пространства и линейные отображения. Пространство геометрических векторов.	8	2		6
5	Линейные геометрические объекты.	14		2	12
6	Кривые и поверхности второго порядка.	10		2	8
7	Линейные пространства и линейные преобразования.	12	2		10
8	Евклидовы пространства и их топология. Многомерная евклидова геометрия.	12		2	10
9	Квадратичные формы.	10	2		8
10	Классификация кривых и поверхностей второго порядка.	12		2	10
	ВСЕГО	108	8	12	88

2.3. Разделы дисциплины

Раздел 1. Основные алгебраические структуры. Векторные пространства и линейные отображения.

Раздел 2. Аналитическая геометрия.

Раздел 3. Многомерная евклидова геометрия. Элементы топологии.

Раздел 4. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей.

2.4. Темы и их краткое содержание

Раздел 1. Основные алгебраические структуры Векторные пространства и линейные отображения

Тема 1. Основные алгебраические структуры.

Числовые поля и многочлены

Числовые множества: кольцо целых чисел, поле рациональных чисел, поле вещественных чисел, поле комплексных чисел. Многочлены, корни многочлена, теорема Безу, Основная теорема алгебры. Разложение рациональных дробей на сумму простейших.

Тема 2. Матрицы

Операции над матрицами. Определитель матрицы и его свойства. Обратная матрица. Ранг матрицы. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью алгоритма Гаусса.

Тема 3. Системы линейных алгебраических уравнений

Основные понятия и определения. Матричный способ решения. Формулы Крамера. Метод Гаусса. Однородная система линейных уравнений, её фундаментальная система решений. Структура общего решения неоднородной системы.

Тема 4. Векторные пространства и линейные отображения.

Пространство геометрических векторов

Линейные операции над векторами и их свойства. Системы координат. Координаты вектора. Линейные операции над векторами в координатной форме. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения. Выражение скалярного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе. Векторное произведение и его свойства. Выражение векторного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе. Смешанное произведение векторов и его свойства. Выражение смешанного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе.

Раздел 2. Аналитическая геометрия

Тема 5. Линейные геометрические объекты

Понятие об уравнениях линий и поверхностей. Алгебраические линии и поверхности. Прямая в плоскости и в пространстве. Векторное уравнение, параметрические и канонические уравнения прямой. Взаимное расположе-

ние прямых Плоскость в пространстве. Векторное, общее, нормальное уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскостей, прямых и плоскостей.

Тема 6. Кривые и поверхности второго порядка

Кривые второго порядка: канонические уравнения и основные свойства. Уравнения кривых 2-го порядка в полярных координатах. Поверхности второго порядка. Их канонические уравнения и основные свойства.

Раздел 3. Многомерная евклидова геометрия.

Элементы топологии

Тема 7. Линейные пространства и линейные преобразования

Основные определения и понятия, аксиомы линейного пространства. Базис и размерность линейного пространства. Разложение вектора по базису. Линейная оболочка векторов. Замена базиса линейного пространства. Матрица перехода. Линейные преобразования. Матрица линейного преобразования. Изменение матрицы линейного преобразования при замене базиса. Собственные числа и собственные векторы линейного преобразования. Матрица линейного преобразования в базисе из собственных векторов. Жорданова форма матрицы линейного преобразования.

Тема 8. Евклидовы пространства и их топология.

Многомерная евклидова геометрия

Определение евклидова пространства. Норма в евклидовом пространстве. Топология нормированного пространства. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортонормированный базис. Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису. Линейный оператор в евклидовом пространстве. Само-сопряженный оператор. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора. Приведение матрицы самосопряженного оператора к диагональному виду.

Раздел 4. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей

Тема 9. Квадратичные формы

Квадратичные формы. Матричная запись. Изменение матрицы квадратичной формы при замене базиса. Классификация квадратичных форм. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Критерий Сильвестра. Закон инерции. Правило Декарта .

Тема 10. Классификация кривых и поверхностей второго порядка

Приведение уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду на основе теории квадратичных форм.

3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Согласно рабочему (индивидуальному) учебному плану студенты заочной формы обучения на первом курсе выполняют одну контрольную работу по дисциплине «Линейная алгебра», которая содержит шесть заданий. В данном методическом пособии представлены образцы решения типовых задач, аналогичных задачам, предлагаемым в контрольной работе.

Оформляя контрольную работу, детально приводите результаты решения задач, не вдаваясь в подробные словесные объяснения. Контрольная работа должна быть выполнена в межсессионный период и представлена на проверку в методкабинет.

Обратите внимание на правила ее оформления.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Выполнять контрольную работу следует в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного и зеленого, оставляя поля для замечаний преподавателя.

2. На обложке тетради нужно *разборчиво* написать фамилию, инициалы, шифр, название дисциплины. В конце работы привести список использованной литературы, дату выполнения и расписаться.

3. Работа должна содержать все задачи именно Вашего варианта.

4. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях.

5. Перед решением каждой задачи следует записать полностью ее условие.

6. Решения задач нужно излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. Получив проверенную работу, следует исправить все отмеченные преподавателем ошибки и недочеты и выполнить все его рекомендации.

Если контрольная работа возвращена на доработку, то необходимо в короткий срок исправить указанные ошибки и недочеты (в той же тетради) и сдать работу на повторную проверку.

После правильного выполнения всех заданий контрольной работы со студентом проводится собеседование, по результатам которого ставится оценка: «зачтено» или «не зачтено». Защита контрольных работ осуществляется в межсессионный период во время субботних консультаций или во время сессии.

Студент обязан выполнить и защитить контрольную работу до сда-

Правило выбора задач контрольной работы

Номера задач контрольной работы определяются с помощью приведенной ниже таблицы по двум последним цифрам номера личного дела (шифра) студента.

В верхней строке (по горизонтали), где помещены цифры от 0 до 9, следует выбрать цифру, являющуюся **последней** в номере вашего шифра.

В левой графе таблицы (по вертикали), где также помещены цифры от 0 до 9, необходимо выбрать цифру, являющуюся **предпоследней** в номере вашего шифра.

На пересечении вертикальной и горизонтальной линий вы найдете номера задач своей контрольной работы.

Например, если шифр Э-10-102-Д то номера задач выбираем по последней цифре шифра 2 и предпоследней цифре 0. Контрольная работа должна включать задачи 1, 15, 30, 32, 47.

Будьте внимательны при выборе варианта задания. Если какая-нибудь задача не соответствует варианту задания, то контрольная работа возвращается на доработку.

По всем вопросам, связанным с изучением данной дисциплины, студент может обратиться на кафедру статистики и математики по адресу: 630087, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 26. СибУПК, корп. 1, к.104, тел. кафедры (8-383) -346-21-87

ТАБЛИЦА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОМЕРОВ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Последняя цифра шифра											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Предпоследняя цифра шифра	0	3	2	1	4	5	7	9	10	6	8
		13	17	15	16	14	12	18	11	20	19
		27	29	30	21	22	24	25	26	28	23
		31	33	32	34	35	36	39	37	40	38
		46	45	47	48	50	49	41	42	43	44
	1	1	2	3	10	4	5	6	7	8	9
		11	12	13	20	14	15	16	17	18	19
		30	21	28	29	27	26	24	25	23	22
		39	40	31	38	32	33	34	35	36	37
		44	41	46	45	49	47	50	48	43	42
	2	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
		40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
		43	44	45	46	47	48	49	50	41	42
	3	2	1	6	7	3	8	4	5	10	9
		12	13	14	11	19	16	15	17	20	18
		28	30	22	23	24	25	26	27	29	21
		40	38	39	36	31	37	32	33	34	35
		45	46	42	41	43	44	50	47	48	49
	4	6	10	8	9	7	1	2	3	4	5
		11	12	13	20	14	15	16	17	18	19
		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
		32	33	34	31	35	36	37	38	39	40
		42	46	45	49	48	47	50	41	49	44

Последняя цифра шифра											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Предпоследняя цифра шифра	5	4	3	7	2	1	8	9	10	6	5
		14	15	13	12	17	16	11	20	19	18
		26	29	30	21	22	16	23	24	25	27
		32	31	34	35	36	37	38	33	39	40
		47	48	49	50	42	43	44	45	46	41
	6	5	4	3	2	1	10	7	9	8	6
		15	14	13	12	11	16	20	19	18	17
		25	27	28	30	29	21	22	23	24	26
		40	32	33	34	35	36	37	31	38	39
		45	48	47	50	49	44	46	41	43	42
	7	6	10	8	9	7	1	2	3	4	5
		16	15	14	13	12	10	18	19	17	11
		22	24	26	27	28	29	30	21	23	25
		36	37	40	31	32	33	34	35	39	38
		49	50	41	42	43	44	45	46	47	48
	8	7	6	9	10	3	2	1	8	5	4
		17	18	19	16	20	11	12	14	13	15
		23	24	25	26	27	28	29	30	22	21
		37	38	31	32	33	34	35	36	40	39
		49	50	48	47	41	42	43	44	45	46
	9	8	7	10	5	4	6	2	1	9	3
		18	19	17	20	12	14	13	15	11	16
		22	23	24	25	21	27	28	29	30	26
		32	33	34	31	35	36	37	38	39	40
		42	46	45	49	48	47	50	41	49	44

4. ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

Комплексные числа

Задачи 1-10

Выполнить арифметические действия с комплексными числами. Результат записать в алгебраической форме.

1. а) $\frac{(2+3i)(3-2i)}{(2+3i)+(3-2i)}$; б) $(1+i\sqrt{3})^9$.
2. а) $\frac{(4+3i)(2-i)}{(4+3i)+(2-i)}$; б) $(1-i\sqrt{3})^6$.
3. а) $\frac{(-2+3i)(4-2i)}{(-2+3i)+(4-2i)}$; б) $(\sqrt{3}+i\sqrt{3})^6$.
4. а) $\frac{(-2+3i)(3-2i)}{(-2+3i)+(3-2i)}$; б) $(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{12}$.
5. а) $\frac{(2+3i)(-3+2i)}{(2+3i)+(-3+2i)}$; б) $(\sqrt{3}+i)^9$.
6. а) $\frac{(5+3i)(-4-2i)}{(5+3i)+(-4-2i)}$; б) $(1+i\sqrt{3})^3$.
7. а) $\frac{(3+5i)(-4-i)}{(3+5i)+(-4-i)}$; б) $(\sqrt{3}-i)^3$.
8. а) $\frac{(-3+5i)(4-3i)}{(-3+5i)+(4-3i)}$; б) $(2+i\sqrt{12})^3$.
9. а) $\frac{(-2+7i)(4-6i)}{(-2+7i)+(4-6i)}$; б) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^{12}$.
10. а) $\frac{(2-7i)(-4+6i)}{(2-7i)+(-4+6i)}$; б) $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^4$.

Методические указания к решению задач 1-10

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – множество *натуральных* чисел.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ – множество *целых* чисел.

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p - \text{целое число, } q - \text{натуральное число}\}$ – множество *рациональных* чисел.

$\mathbb{R}$ – множество **вещественных** (или **действительных**) чисел. Это множество состоит из всех рациональных чисел, и чисел, которые представляются бесконечными непериодическими десятичными дробями (**иррациональные** числа).

Число $x = -a$ называют **противоположным** к числу a . Число $x = a^{-1} = \frac{1}{a}$ называют **обратным** к ненулевому числу a .

Комплексные числа получают добавлением к вещественным числам $\mathbb{R}$ специального «числа» i , которое называют **мнимой единицей**. Для мнимой единицы выполняется равенство $i^2 = -1$. Множество выражений

$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b - \text{вещественные числа} \}$$

называют множеством **комплексных чисел**, а выражение $z = a + ib$ – **алгебраической формой** записи комплексного числа z , при этом

$a = \operatorname{Re} z$ – **вещественная (действительная) часть** комплексного числа z ,

$b = \operatorname{Im} z$ – **мнимая часть** комплексного числа z .

Если $\operatorname{Im} z = 0$, то комплексное число z является вещественным, если же $\operatorname{Re} z = 0$, то его называют **чисто мнимым**. Комплексное число $z = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Im} z = 0$.

Комплексные числа можно складывать друг с другом, умножать, а также делить одно на другое при условии, что последнее не равно нулю.

Если $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, то

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Обратным комплексному числу $z = a + ib$ является комплексное число

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2},$$

а противоположным будет комплексное число $-z = -a - ib$.

Комплексные числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называют **сопряженными**. Произведение взаимно сопряженных комплексных чисел есть вещественное неотрицательное число:

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = (a^2 + b^2) + 0i = a^2 + b^2.$$

Используя понятие комплексно сопряженного числа, формулу для нахождения числа, обратного комплексному числу z , можно записать в следующем виде:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}.$$

При записи комплексного числа, допустимо писать $z = a + bi$ вместо $z = a + ib$. Также принято опускать символ произведения « $\cdot$ », то есть писать $z_1 z_2$ вместо $z_1 \cdot z_2$.

Если числа z_1 и z_2 являются вещественными, то операции сложения и умножения их как комплексных чисел совпадают с обычными арифметическими операциями сложения и умножения.

У п р а ж н е н и е. Вычислить комплексное число $\frac{(-1 + 5i)(2 - 3i)}{(-1 + 5i) + (2 - 3i)}$.

Р е ш е н и е.

$$\begin{aligned} \frac{(-1 + 5i)(2 - 3i)}{(-1 + 5i) + (2 - 3i)} &= \frac{-2 + 3i + 10i - 15i^2}{1 + 2i} = \frac{13 + 13i}{1 + 2i} = \\ &= \frac{(13 + 13i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{13 - 26i + 13i - 26i^2}{1 - 4i^2} = \frac{39 - 13i}{5} = \frac{39}{5} - \frac{13}{5}i. \end{aligned}$$

Каждому комплексному числу $z = a + ib$ можно сопоставить направленный отрезок (вектор) $\overrightarrow{OM}$ на координатной плоскости, где точка O – начало координат, а точка M обладает координатами (a, b) (рис. 4.1). В этом случае: ось OX называют **вещественной осью** и обозначают Re ; ось OY называют **мнимой осью** и обозначают Im ; саму плоскость называют **комплексной плоскостью**.

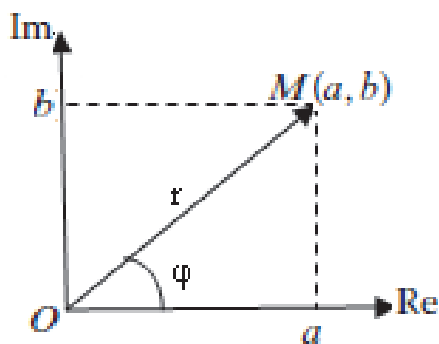


Рис. 4.1: Комплексная плоскость

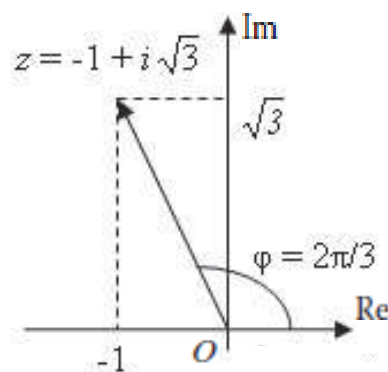


Рис. 4.2: Комплексное число

Такое представление комплексных чисел называют **геометрическим**. С этим представлением связана **тригонометрическая форма** комплексного числа:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Здесь $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – **модуль** ($|z|$) комплексного числа z , он равен длине вектора $\overrightarrow{OM}$, угол φ , при котором выполнены равенства

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

называют **аргументом** ($\text{Arg} z$) комплексного числа z . При условии, что $-\pi < \varphi \leq \pi$, этот аргумент называют **главным** и обозначают $\arg z$.

Пример. Для комплексного числа $z = -1 + i\sqrt{3}$ (рис. 4.2) получается

- $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2,$
- $\cos \varphi = -\frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},$
- $\arg z = \varphi = \frac{2\pi}{3},$
- $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right).$

Если известны модуль $|z| = r$ и аргумент $\text{Arg} z = \varphi$ комплексного числа z , то $a = r \cos \varphi$ и $b = r \sin \varphi$.

Для модулей и аргументов комплексных чисел выполнены свойства: **при произведении комплексных чисел, их модули перемножаются, а аргументы складываются.**

Следующие формулы задают правила произведения, деления, возведения в степень и извлечения корней, для комплексных чисел в тригонометрической форме. Эти формулы называют **формулами Муавра**:

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right),$$

здесь k может принимать n различных целых значений от 0 до $n - 1$. Например, в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ существует пять различных корней пятой степени из числа $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$. Этими корнями будут:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}, \quad z_1 = \cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5},$$

$$z_2 = -1 = \cos \pi + i \sin \pi, \quad z_3 = \cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5}, \quad z_4 = \cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5}.$$

У п р а ж н е н и е. Вычислить комплексное число $(-1+i\sqrt{3})^6$. Результат записать в алгебраической форме.

Р е ш е н и е. Комплексные числа возводят в степень используя формулы Муавра. По этому необходимо записать комплексное число $-1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме. Из предыдущего примера известно, что $-1+i\sqrt{3} = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$. Следовательно

$$(-1+i\sqrt{3})^6 = 2^6(\cos 6\frac{2\pi}{3} + i \sin 6\frac{2\pi}{3}) = 64(\cos 4\pi + i \sin 4\pi) = 64(1+i\cdot 0) = 64.$$

Матрицы и определители

Задачи 11-20

Найти обратную матрицу для матрицы A и сделать проверку.

$$11. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$14. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$15. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$16. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$20. A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Методические указания к решению задач 11-20

Матрицей называют прямоугольную таблицу, составленную из r строк и n столбцов (матрица размера $r \times n$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}),$$

где **матричные элементы** a_{ij} – действительные или комплексные числа.

Множество всех матричных элементов a_{ij} с одинаковым первым индексом i называют **строкой** (**i -й строкой**) матрицы, а множество всех матричных элементов a_{ij} с одинаковым вторым индексом j называют **столбцом** (**j -м столбцом**) матрицы.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ 4 & 16 & -7 & \mathbf{18} & 9 \\ 0 & 6 & 0 & \mathbf{8} & 10 \end{pmatrix} - \text{жирным шрифтом выделены 2-я строка и 4-й столбец.}$$

Матрица $A^T = (b_{ij})$, **транспонированная** по отношению к матрице $A = (a_{ij})$ размера $r \times n$, есть матрица размера $n \times r$ с матричными элементами $b_{ij} = a_{ji}$. При этом $(A^T)^T = A$.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad (A^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Если $r = n$, то матрица A называется **квадратной порядка n** . Диагональ этой матрицы, составленная из элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, называется **главной диагональю**. Квадратная матрица, у которой над главной диагональю стоят одни нули, называется **нижней треугольной**. Квадратная матрица, у которой под главной диагональю стоят одни нули, называется **верхней треугольной**. Квадратная матрица, все элементы которой, кроме стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**. Диагональная матрица, у которой на диагонали стоят единицы, называется **единичной**. Единичную матрицу обозначают через E .

П р и м е р.

• $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 4 \\ 5 & \mathbf{6} & 7 & 8 \\ 4 & 16 & -\mathbf{7} & 18 \\ 0 & 6 & 0 & \mathbf{8} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица 4-го порядка, (жирным шрифтом выделены диагональные элементы).

• $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ – нижняя треугольная матрица.

• $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ – верхняя треугольная матрица.

• $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ – диагональная матрица.

• $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица.

Две матрицы A и B , называются **равными** $A = B$, если они имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$.

Суммой матриц A и B (одного размера) называется матрица $C = A + B$ (того же размера), элементы которой находят по правилу $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ **на число** α называется матрица $\alpha A = (\alpha a_{ij})$. Эта матрица того же размера, что и матрица A .

Пусть заданы прямоугольные матрицы A и B , причем всякая строка матрицы A содержит столько же элементов, сколько их во всяком столбце матрицы B . Тогда **произведением матриц** A и B называется матрица $C = AB$, в которой:

- число строк равно числу строк матрицы A ;
- число столбцов равно числу столбцов матрицы B ;
- каждый элемент, стоящий в i -й строке и k -м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i -й строки матрицы A и k -го столбца матрицы B , т. е.

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk}.$$

П р и м е р.

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 3 & 5 \cdot 0 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 26 & 43 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 6 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 7 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet 2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 & 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 & 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-6) \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 & 2 \cdot 7 - 3 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 30 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}.$$

Операции сложения и умножения между матрицами обладают следующими свойствами;

- если матрица A размера $r \times n$, а матрицы B, C размера $n \times t$, то $A(B + C) = AB + AC$;
- если матрицы A, B размера $r \times n$, и матрица C размера $n \times t$, то $(A + B)C = AC + BC$;
- если матрица A размера $r \times n$, матрицы B размера $n \times t$, а матрица C размера $t \times l$, то $ABC = (AB)C = A(BC)$;
- для единичной матрицы E и квадратной матрицы A того же размера выполняются равенства $EA = AE = A$.

Определителем квадратной матрицы A называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn} - a_{12}a_{21}a_{33} \dots a_{nn} + \dots$$

(в сумме ***n-факториал*** $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ слагаемых). Каждое слагаемое – это произведение n матричных элементов, которые выбирают по одному из каждой строки, так чтобы они стояли в разных столбцах. Чтобы определить

знаки слагаемых в этой сумме поступают следующим образом. В произведениях подсчитывают количество пар сомножителей a_{ij} и a_{kl} у которых $i < k$, но $j > l$. Если таких пар в произведении четное число, то перед ним ставят «+». В противном случае ставят знак «-». Саму формулу, по которой вычисляют определитель матрицы размера $n \times n$, называют **определителем n -го порядка**.

Например:

определитель 1-го порядка –

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11} ;$$

определитель 2-го порядка –

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} ;$$

определитель 3-го порядка –

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

У п р а ж н е н и е. Вычислить определители матриц:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \text{б) } B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$\text{а) } \det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 4 = 2 + 12 = 14.$$

$$\text{б) } \det B = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - \\ - (-4) \cdot 3 \cdot 1 = 2 + 0 + 9 - 0 - 0 + 12 = 23.$$

Определитель любой диагональной, нижней треугольной или верхней треугольной матрицы равен произведению её диагональных элементов.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы A называют величину равную произведению $(-1)^{i+j}$ на определитель квадратной матрицы оставшейся после удаления i -й строки и j -го столбца из матрицы A .

П р и м е р.

$$\bullet \text{ Если } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } a_{23} = 2, \text{ и } A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -12.$$

Вычислив алгебраические дополнения к элементам из некоторой фиксированной строки (или столбца) матрицы A , её определитель можно найти по **формуле разложения определителя по строке (столбцу)**

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

В первой сумме матричные элементы a_{ij} берутся из i -ой строки, а во второй сумме – из j -го столбца.

Квадратная матрица, определитель которой не равен нулю, называется **невырожденной**.

Матрица $A^{-1} = (b_{ij})$ называется **обратной** к невырожденной матрице A , если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Матричные элементы обратной матрицы находят по формуле

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}.$$

Матрицу $\bar{A} = (A_{ij})^T$ составленную из алгебраических дополнений A_{ij} называют **присоединённой** матрицей. Для этой матрицы выполняются равенства

$$\bar{A}A = A\bar{A} = (\det A)E,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\bar{A}.$$

Последнее равенство также задаёт правило нахождения обратной матрицы.

Если матрица A – **вырожденная** ($\det A = 0$), то для неё не существует обратной матрицы.

У п р а ж н е н и е. Найти обратную матрицу к невырожденной матрице

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Во-первых, вычислим определитель матрицы A . Так как матрица A является нижней треугольной, её определитель равен произведению диагональных элементов, т. е. $\det A = 4 \cdot 5 \cdot 1 = 20$.

Теперь вычислим все алгебраические дополнения A_{ij} матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -24, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 20.$$

Составим из найденных алгебраических дополнений обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 0 \\ -24 & -12 & 20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -7/20 & 1/5 & 0 \\ -6/5 & -3/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы проверить, верно-ли найдена обратная матрица, надо её перемножить с исходной.

$$A^{-1}A = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 0 \\ -24 & -12 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Так как получилась единичная матрица, то обратная матрица найдена верно.

Аналитическая геометрия в пространстве

Задачи 21-30

Даны вершины пирамиды: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$.
Найти:

- а) длину ребра AD ;
- б) площадь грани ABC ;
- в) объем пирамиды;
- г) каноническое и параметрическое уравнения прямой AD ;
- д) общее уравнение плоскости ABC ;
- е) каноническое уравнение высоты пирамиды опущенной из вершины D на грань ABC ;
- ж) расстояние от вершины D до плоскости ABC .

21. $A(6, 2, 2)$, $B(-6, 4, -2)$, $C(2, 4, 5)$, $D(3, 6, -1)$.

22. $A(1, 1, 2)$, $B(-1, 1, 3)$, $C(2, -2, 4)$, $D(-1, 0, -2)$.

23. $A(1, 3, 2)$, $B(0, 6, 2)$, $C(4, 0, 0)$, $D(3, 2, 7)$.

24. $A(3, 1, 1)$, $B(-1, -2, 4)$, $C(7, 4, 4)$, $D(4, -2, -2)$.

25. $A(7, 2, 2), B(5, 7, 7), C(5, 3, 1), D(2, 3, 7)$.
26. $A(1, 0, 2), B(1, 2, -1), C(2, -2, 1), D(2, 1, 2)$.
27. $A(4, 2, 5), B(0, 7, 1), C(0, 2, 7), D(1, 5, 0)$.
28. $A(1, 2, 0), B(1, -1, 2), C(0, 1, -1), D(-3, 1, 1)$.
29. $A(1, 1, 1), B(3, 4, 0), C(-1, 5, 6), D(4, 0, 5)$.
30. $A(8, 4, 1), B(7, 7, 3), C(6, 5, 8), D(3, 5, 8)$.

Методические указания к решению задач 21-30

Любые две точки A и B трехмерного пространства, взятые в определенном порядке так, что, например, A является первой, а B – второй точкой, определяют **направленный отрезок** с началом A и концом B , или **вектор** $\overrightarrow{AB}$. Если $A = B$, то получаем **нулевой вектор**: $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$. Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются равными, если их можно совместить друг с другом путём параллельного переноса. Поэтому векторы ещё обозначают и прописными латинскими буквами со стрелкой сверху: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Если $(x, y, z), (\alpha, \beta, \gamma)$ – декартовы координаты точек A и B , то $\{\alpha - x; \beta - y; \gamma - z\}$ – **декартовы координаты вектора** $\overrightarrow{AB}$; в этом случае пишут $\overrightarrow{AB} = \{\alpha - x; \beta - y; \gamma - z\}$. У равных векторов соответствующие декартовы координаты совпадают.

П р и м е р. Если $A(1, 2, 3)$ и $B(4, 2, 7)$, то

- $\overrightarrow{AB} = \{4 - 1; 2 - 2; 7 - 3\} = \{3; 0; 4\}$,
- $\overrightarrow{BA} = \{1 - 4; 2 - 2; 3 - 7\} = \{-3; 0; -4\}$.

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$, обозначаемой $|\overrightarrow{AB}|$, называется длина отрезка AB . Если $\vec{u} = \{x; y; z\}$, то $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

П р и м е р. Если $\vec{u} = \{5; 1; 3\}$, то

- $|\vec{u}| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{35}$.

Если A, B, C – точки пространства, то вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Суммой векторов $\vec{u} = \{x; y; z\}, \vec{v} = \{\alpha; \beta; \gamma\}$ является вектор $\vec{u} + \vec{v} = \{x + \alpha; y + \beta; z + \gamma\}$.

П р и м е р. Если $\vec{u} = \{5; 1; 3\}, \vec{v} = \{-4; 3; 7\}$, то

- $\vec{u} + \vec{v} = \{5 - 4; 1 + 3; 3 + 7\} = \{1; 4; 10\}$.

Если λ – вещественное число и $\overrightarrow{AB}$ – вектор, то вектор $\overrightarrow{AC}$, получающийся умножением $\overrightarrow{AB}$ на λ : $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, есть такой вектор, что $|\overrightarrow{AC}| = |\lambda| |\overrightarrow{AB}|$, причем C лежит на прямой AB по ту же сторону от точки A , что и B , в случае $\lambda > 0$, и по другую сторону от этой точки, если $\lambda < 0$. При этом выполняются следующие соотношения:

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}, \quad (\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}, \quad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}.$$

Декартовы координаты вектора $\vec{u} = \{x; y; z\}$ при умножении на вещественное число λ меняются по правилу: $\lambda\vec{u} = \{\lambda x; \lambda y; \lambda z\}$.

П р и м е р. Для векторов $\vec{u} = \{5; 1; 3\}$, $\vec{v} = \{-4; 3; 7\}$ получаем, что

- $2\vec{u} = \{2 \cdot 5; 2 \cdot 1; 2 \cdot 3\} = \{10; 2; 6\}$,
- $2\vec{u} - 3\vec{v} = \{2 \cdot 5 - 3 \cdot (-4); 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3; 2 \cdot 3 - 3 \cdot 7\} = \{22; -7; -15\}$.

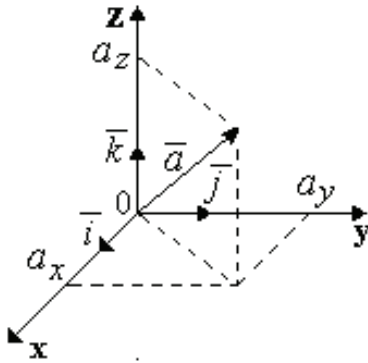


Рис. 4.3: Координаты вектора

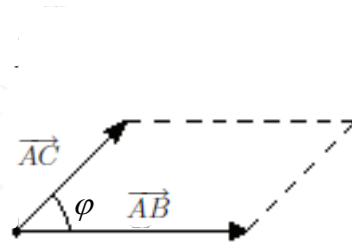


Рис. 4.4: Угол между векторами

Если $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, то $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – векторы единичной длины, направления которых совпадают с направлениями взаимно перпендикулярных осей Ox , Oy и Oz соответственно т. е. $\vec{i} = \{1; 0; 0\}$, $\vec{j} = \{0; 1; 0\}$, $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$ (рис. 4.3).

Под **углом** между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ понимается угол $\angle BAC$, по величине заключенный между 0 и π (рис. 4.4).

Скалярным произведением векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними; оно обозначается $(\vec{u}, \vec{v})$ и обладает следующими свойствами:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u}), \quad (\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w}),$$

$$(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \lambda(\vec{u}, \vec{v}), \quad (\vec{u}, \vec{u}) = |\vec{u}|^2,$$

$(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$ перпендикулярны друг другу.

П р и м е р.

- $(\vec{i}, \vec{i}) = (\vec{j}, \vec{j}) = (\vec{k}, \vec{k}) = 1.$
- $(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{j}, \vec{k}) = (\vec{i}, \vec{k}) = 0.$

Если известны декартовы координаты векторов $\overrightarrow{AB} = \{x; y; z\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{\alpha; \beta; \gamma\}$, то их скалярное произведение можно вычислить по формуле

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

а косинус угла между ними – по формуле

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{x\alpha + y\beta + z\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

П р и м е р. Для векторов $\overrightarrow{AB} = \{2; -3; 1\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{5; 2; 0\}$:

- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 10 - 6 + 0 = 4,$
- $\cos \widehat{BAC} = \frac{2 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \sqrt{5^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{4}{\sqrt{14} \sqrt{29}} = \frac{4}{\sqrt{406}}.$

Векторным произведением вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$ называется вектор $\overrightarrow{AD}$, длина которого равна произведению длин векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ на синус угла между ними; этот вектор перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, и направлен в ту сторону, откуда поворот от $\overrightarrow{AB}$ к $\overrightarrow{AC}$ на угол, не превосходящий π , виден против часовой стрелки. Полезно помнить, что длины вектора $\overrightarrow{AD}$ равна площади параллелограмма построенного на векторах-сомножителях (рис. 4.5).

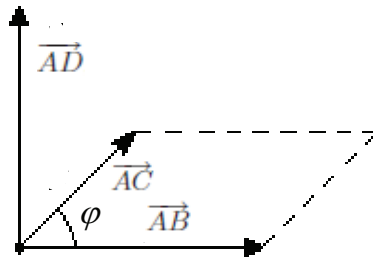


Рис. 4.5: Векторное произведение

Векторное произведение вектора $\vec{u}$ на вектор $\vec{v}$ обозначается $\vec{u} \times \vec{v}$; оно обладает следующими свойствами:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}, \quad \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}, \quad (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v}),$$

$$\vec{u} \times \vec{u} = 0, \quad (\vec{u}, \vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}) = 0.$$

Векторы, параллельные одной прямой, называются **коллинеарными**. Два вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ являются коллинеарными тогда и только тогда, когда $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$. В общем случае длина вектора $\vec{u} \times \vec{v}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

П р и м е р.

- $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$;
- $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$;
- $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$;
- $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

Если известны декартовы координаты векторов $\vec{u} = \{x; y; z\}$, $\vec{v} = \{\alpha; \beta; \gamma\}$, то их векторное произведение можно вычислить по формуле

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = (y\gamma - z\beta)\vec{i} + (z\alpha - x\gamma)\vec{j} + (x\beta - y\alpha)\vec{k}.$$

У п р а ж н е н и е. Найти площадь треугольника $\triangle ABC$, если $\overrightarrow{AB} = \{1; 2; 3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{3; 2; 1\}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся тем, что площадь треугольника $\triangle ABC$ равна $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Для этого вычислим векторное произведение

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2)\vec{i} + (3 \cdot 3 - 1 \cdot 1)\vec{j} + (1 \cdot 2 - 2 \cdot 3)\vec{k} = \\ &= -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} = \{-4; 8; -4\}. \end{aligned}$$

В итоге, получаем:

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 8^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{6}.$$

Смешанным произведением $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ называется величина $(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w})$.

Смешанное произведение обладает свойствами:

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = \\ &= -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}). \end{aligned}$$

П р и м е р.

- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = 1$, $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}) = -1$.

- $(\alpha \vec{i}, \beta \vec{j}, \gamma \vec{k}) = \alpha \beta \gamma$.
- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}) = (\vec{k}, \vec{j}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{j}, \vec{k}) = 0$.

Векторы, параллельные одной плоскости, называются **компланарными**. Три вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ являются компланарными тогда и только тогда, когда их смешанное произведение $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$. В общем случае $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ равен объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах (рис. 4.6).

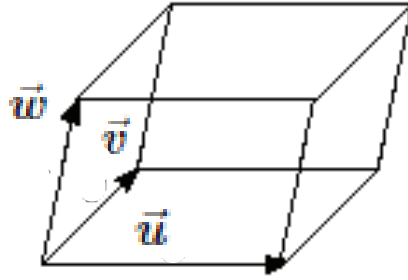


Рис. 4.6: Объём параллелепипеда

Если известны декартовы координаты векторов $\vec{u} = \{x; y; z\}$, $\vec{v} = \{\alpha; \beta; \gamma\}$, $\vec{w} = \{i; j; k\}$, то их смешанное произведение можно вычислить по формуле

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ i & j & k \end{vmatrix} = (y\gamma - z\beta)i + (z\alpha - x\gamma)j + (x\beta - y\alpha)k.$$

У п р а ж н е н и е. Найти объём пирамиды, вершинами которой являются точки $A(1, 1, 1)$, $B(3, 2, 5)$, $C(1, 4, 7)$, $D(1, 1, 0)$.

Р е ш е н и е. Объём пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Вычислим координаты этих векторов:

$$\overrightarrow{AB} = \{3 - 1; 2 - 1; 5 - 1\} = \{2; 1; 4\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{1 - 1; 4 - 1; 7 - 1\} = \{0; 3; 6\},$$

$$\overrightarrow{AD} = \{1 - 1; 1 - 1; 0 - 1\} = \{0; 0; -1\}.$$

$|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right| = |2 \cdot 3 \cdot (-1)| = 6$. Следовательно, объём параллелепипеда равен 6, а объём пирамиды 1.

Прямая в пространстве. Линия L в пространстве называется **прямой**, если она состоит из всех точек, куда можно попасть из некоторой

фиксированной точки M_0 , двигаясь (назад и вперед) вдоль некоторого фиксированного вектора $\vec{v}$.

Любой вектор $\vec{v}$, параллельный прямой L , называют **направляющим вектором** этой прямой.

Если известен направляющий вектор $\vec{v} = \{v_1; v_2; v_3\}$ и некоторая точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой L , то эту прямую задаёт **каноническое уравнение прямой**:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

Произвольная точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой L только в том случае, когда её координаты удовлетворяют уравнению, которое задаёт эту прямую.

Пример. Если прямая L с направляющим вектором $\vec{v} = \{3; 2; 1\}$ проходит через точку $M_0(1, 2, 3)$, то:

- точка $M(4, 4, 4)$ лежит на прямой L , так как её координаты удовлетворяют каноническому уравнению $\frac{4-1}{3} = \frac{4-2}{2} = \frac{4-3}{1}$ прямой L ;
- точка $M(3, 4, 3)$ не лежит на прямой L , так как её координаты не удовлетворяют каноническому уравнению прямой: $\frac{3-1}{3} = \frac{4-2}{2} \neq \frac{3-3}{1}$.

Если известны две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, через которые проходит прямая L , то её направляющим вектором будет вектор

$$\vec{v} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\},$$

а её каноническое уравнение можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \quad - \text{уравнение прямой по двум точкам.}$$

Плоскость в пространстве. Поверхность S в пространстве называется **плоскостью**, если она состоит из всех точек, куда можно попасть из некоторой фиксированной точки M_0 , двигаясь (назад и вперед) вдоль некоторых двух фиксированных неколлинеарных (непараллельных) векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

Множество всех точек лежащих на плоскости S задаёт **общее уравнение плоскости**

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

При этом, произвольная точка $M(x, y, z)$ лежит на плоскости S только в том случае, когда её координаты удовлетворяют уравнению, которое задает эту плоскость.

П р и м е р.

- Точка $M(1, -2, 3)$ лежит на плоскости, заданной уравнением $5(x - 1) + 4(y + 2) - 7(z - 3) = 0$, так как

$$5(1 - 1) + 4(-2 + 2) - 7(3 - 3) = 0.$$

- Точка $M(1, -2, 3)$ не лежит на плоскости, заданной уравнением $5x + 4y - 7z + 10 = 0$, так как

$$5 \cdot 1 + 4(-2) - 7 \cdot 3 + 10 = 5 - 8 - 21 + 10 = -14 \neq 0.$$

Любой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости S , называют **вектором нормали** к этой плоскости.

Если известны два неколлинеарных вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ с плоскости S , то её вектор нормали $\vec{n}$ находят по формуле $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$. Вектором нормали к плоскости заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ будет вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$

П р и м е р.

- Общее уравнение плоскости $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ задает плоскость с вектором нормали $\vec{n} = \{2; -3; 4\}$.

Если известны некоторая точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с плоскости S и вектор нормали $\vec{n} = \{A; B; C\}$ к ней, то общее уравнение плоскости S можно получить из **уравнения плоскости по вектору нормали и точке**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Общее уравнение плоскости S можно получить, если известны три её точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой. В этом случае его можно получить из **уравнения плоскости по трём точкам**:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

У п р а ж н е н и е. Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 1, 1)$, $B(3, 2, 5)$, $C(1, 4, 7)$.

Р е ш е н и е. Вычислим в начале определитель

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 3 - 1 & 2 - 1 & 5 - 1 \\ 1 - 1 & 4 - 1 & 7 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= (x-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (y-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + (z-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \\
&= -6(x-1) - 12(y-1) + 6(z-1) = -6x - 12y + 6z + 12.
\end{aligned}$$

Тогда общим уравнением плоскости будет

$$-6x - 12y + 6z + 12 = 0.$$

Если это уравнение разделить на -6 , то получим другое общее уравнение

$$x + 2y - z - 2 = 0$$

той же самой плоскости.

Прямая L перпендикулярна плоскости S , если направляющий вектор $\vec{v}$ прямой L является вектором нормали плоскости S .

Пример. Если прямая L проходит через точку $M_0(1, -4, 2)$ и перпендикулярна плоскости S с общим уравнением $-5x + 3y + 9z - 11 = 0$, то она задаётся каноническим уравнением

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-2}{9}.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости S , заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, можно найти по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример.

- Расстояние от точки $M(1, -2, 3)$ до плоскости, заданной уравнением $5x + 4y - 7z + 10 = 0$, равно

$$d = \frac{|5 \cdot 1 + 4(-2) - 7 \cdot 3 + 10|}{\sqrt{5^2 + 4^2 + (-7)^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{25 + 16 + 49}} = \frac{14}{3\sqrt{10}}.$$

Системы линейных уравнений

Задачи 31-40

Решит систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\mathbf{31.} \begin{cases} x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 9, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 7, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases} \quad \mathbf{32.} \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 13, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + 3x_3 = -13, \\ 6x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -10. \end{cases} \quad 34. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -9, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -21. \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 20, \\ 6x_1 + 3x_2 - x_3 = 18, \\ -5x_1 + 2x_2 + x_3 = -19. \end{cases} \quad 36. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 = -8. \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 16, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4, \\ -x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases} \quad 38. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 11, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \quad 40. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 12, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

Методические указания к решению задач 31-40

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащей m уравнений и n неизвестных, называется выражение следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Здесь a_{ij} и b_j – произвольные числа ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$), которые называются соответственно **коэффициентами** и **свободными членами** системы. Первый индекс у коэффициентов при неизвестных означает номер уравнения, второй индекс соответствует номеру неизвестного x_j . Все неизвестные входят в уравнения только в первой степени, причем уравнения не содержат членов с произведениями из разных неизвестных. Отсюда и происходит название системы – **линейная**. Матрица $A_{m \times n} = (a_{ij})$ составленная из коэффициентов этой системы, называется **матрицей системы**, матрица $B_{m \times 1} = (b_i)$ составленная из свободных членов – **столбцом свободных членов**. Если к матрице A добавить справа столбец B , то полученную мат-

рицу

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

называют **расширенной матрицей системы**.

Решением данной системы уравнений называется n значений неизвестных $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, при подстановки которых в эту систему, каждое из уравнений системы превращается в верные равенства.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет решений, то она называется **несовместной**. Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения. Две СЛАУ называются **равносильными**, или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Метод Гаусса решения СЛАУ. Метод состоит в выполнении ряда однотипных шагов, на каждом из которых производится исключения одного из неизвестных, с помощью **элементарных преобразований**, к которым относятся следующие:

- 1) умножить правую и левую части одного уравнения на ненулевое число;
- 2) прибавить к одному уравнению другое умноженное на некоторое число (это действие делают одновременно с правыми и левыми частям уравнений).

Элементарные преобразования системы не меняют множества её решений. При помощи этих преобразований любую СЛАУ можно заменить на систему ей эквивалентную, особого вида.

З а м е ч а н и е. Если после некоторого элементарного преобразования в системе появится уравнение вида $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$, где $b \neq 0$, то исходная СЛАУ не имеет решений т.е. не совместна.

Каждый шаг в методе Гаусса разделяется на действия.

Во-первых, выбираем уравнение и в нём переменную, которую назначают **базисной**.

Во-вторых, прибавляя поочерёдно ко всем оставшимся уравнениям системы выбранное уравнение, каждый раз умноженное на подходящее число, добиваемся того, чтобы в этих уравнениях отсутствовала назначенная базисная переменная.

На первом шаге можно выбрать любое уравнение, а на втором и последующих шагах выбирают из тех уравнений, в которых ещё не назначена

базисная переменная.

Через конечное число шагов мы получим СЛАУ, в которой у каждого уравнения есть своя базисная переменная. Все оставшиеся переменные, не попавшие в этот набор базисных, называют **свободными**.

Если в этой СЛАУ, каждую базисную переменную выразить из своего уравнения через оставшиеся свободные, то такую систему называют **общим решением** СЛАУ.

Например,

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 + a'_{1k+1}x_{k+1} + \dots + a'_{1n}x_n, \\ x_2 = b'_2 + a'_{2k+1}x_{k+1} + \dots + a'_{2n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_k = b'_k + a'_{kk+1}x_{k+1} + \dots + a'_{kn}x_n. \end{cases}$$

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_k$ – базисные переменные, а переменные $x_{k+1}, \dots, x_n$ – свободные.

Придавая свободным переменным произвольные значения, из системы общего решения, находят соответствующие значения для базисных переменных. Таким образом, можно найти любое **частное решение** СЛАУ. Частное решение у которого все свободные переменные равны нулю, называют **базисным**. Для общего решения приведённого выше таким базисным решением будет:

$$x_1 = b'_1, x_2 = b'_2, \dots, x_k = b'_k, x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0.$$

У п р а ж н е н и е. Решить методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ -x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Элементарные преобразования системы приводят к элементарным преобразованиям над строками расширенной матрицы системы. По расширенной матрице системы можно всегда восстановить саму систему линейных уравнений. Поэтому будем совершать элементарные преобразования над строками расширенной матрицы системы.

На первом шаге, в первом уравнении, в качестве первой базисной переменной возьмем x_1 и исключим её из 3-го уравнения:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 - 1 & 2 - 1 & 1 - 0 & 0 - 1 & -3 - 0 \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right).$$

На втором шаге будем выбирать вторую базисную переменную из оставшихся 2-го и 3-го уравнений. В качестве второй базисной переменной возьмем x_3 из 2-го уравнения и исключим её из 3-го уравнения, поскольку в 1-м уравнении этой переменной уже нет:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right) &\mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0+0 & 1+(-1) & 1+(-1) & -1+1 & -3+3 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

В предпоследней матрице 3-я строка состоит из одних нулей. Это означает, что 3-е уравнение в системе полностью сократилось, поэтому в последней матрице отсутствует 3-я строка.

Таким образом, в каждой строке последней матрицы выделена своя базисная переменная. Выпишем систему, соответствующую этой матрице:

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} + x_2 + x_4 = 0, \\ -x_2 - \mathbf{x_3} + x_4 = 3. \end{cases}$$

В итоге, выражая каждую базисную переменную из своего уравнения, получим систему общего решения СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 = 0 - x_2 - x_4, \\ x_3 = -3 + x_2 - x_4. \end{cases}$$

Здесь x_1, x_3 – базисные переменные, а x_2, x_4 являются свободными. Так как в системе общего решения присутствуют свободные переменные, то СЛАУ является неопределенной. Вычислим два её частных решения.

Во-первых, базисным частным решением будет:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = 0.$$

Если придать свободным переменным значения $x_2 = 1$ и $x_4 = -2$, то получим другое частное решение системы:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = -2.$$

Приведение к каноническому виду

Задачи 41-50

Привести общее уравнение кривой второго порядка $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ к каноническому виду. Определить вид кривой и координаты смещенного центра.

41. $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$.

42. $3x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$.

43. $2x^2 + 3y^2 + 12x - 6y + 15 = 0$.

44. $2x^2 + 3y^2 - 12x + 12y + 24 = 0$.

45. $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$.

46. $x^2 - 2y^2 + 4x + 4y = 0$.

47. $3x^2 - 4y^2 + 18x + 16y - 1 = 0$.

48. $-9x^2 + 6x + y - 2 = 0$.

49. $-3x^2 + 12x + y - 13 = 0$.

50. $-5x^2 + 5x + y + \frac{3}{4} = 0$.

Методические указания к решению задач 41-50

Кривые второго порядка. *Кривые второго порядка* определяются уравнениями второй степени относительно декартовых прямоугольных координат на плоскости. Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c_0 = 0,$$

где a_{11} , a_{12} , a_{22} , a_{13} , a_{23} , a_{33} , b_1 , b_2 , c_0 – некоторые вещественные числа. Каждая кривая второго порядка, имеющая хотя бы одну точку на декартовой плоскости, в подходящей прямоугольной системе координат описывается своим каноническим уравнением:

а) невырожденные кривые:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – *эллипс* с полуосями a и b (рис. 4.7),

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – *гипербола* (рис. 4.8),

3) $y^2 = 2px$ – *парабола* ($p > 0$) (рис. 4.9);

б) вырожденные кривые:

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – *точка*,

5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – *две пересекающиеся прямые*,

6) $\frac{x^2}{a^2} = 1$ – *две параллельные прямые*,

7) $x^2 = 0$ – *прямая*.

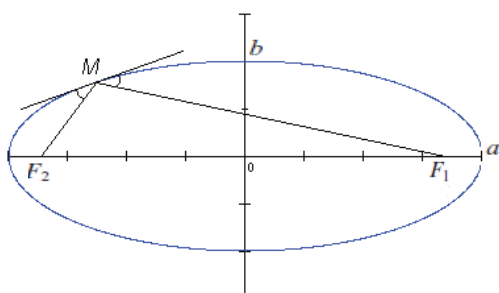


Рис. 4.7: Эллипс

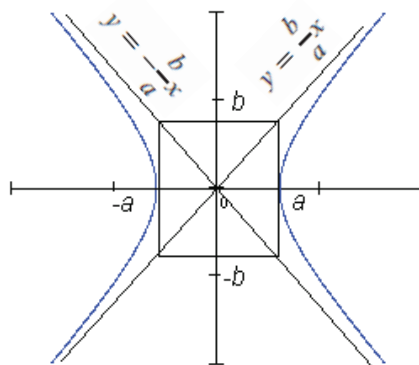


Рис. 4.8: Гипербола

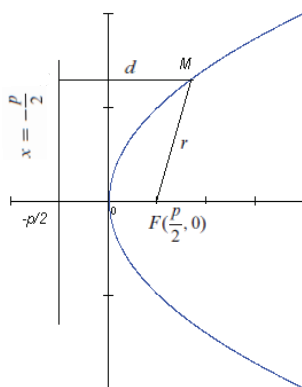


Рис. 4.9: Парабола

Невырожденные кривые имеют следующую геометрическую характеристику. Для каждой невырожденной кривой определены точка, которую называют **фокусом**, и прямая, которую называют **директрисой**. Отношение $\frac{r}{d}$ расстояния r от точки на кривой до фокуса к расстоянию d от этой же точки на кривой до директрисы является одним и тем же для всех точек на кривой (рис. 4.9). Это отношение $\frac{r}{d}$ называют **эксцентриситетом** кривой и обозначают через ε .

- У любого эллипса эксцентриситет $\varepsilon < 1$. При этом у эллипса две пары, состоящие из фокуса и директрисы, которые определяют этот эллипс с заданным эксцентриситетом.

- У любой гиперболы эксцентриситет $\varepsilon > 1$. При этом у гиперболы две пары, состоящие из фокуса и директрисы, которые определяют ветви этой гиперболы с заданным эксцентриситетом.
- У любой параболы эксцентриситет $\varepsilon = 1$. При этом у параболы одна пара, состоящая из фокуса и директрисы, которая определяет эту параболу.

Каноническое уравнение полностью определяет геометрическую характеристику невырожденной кривой.

Если эллипс задан каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, у которого $a > b$, то:

- параметры a , b – **полуоси эллипса**;
- эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$;
- фокус $F_1(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, 0)$ и директриса, заданная уравнением $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, определяют этот эллипс;
- фокус $F_2(-\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, 0)$ и директриса, заданная уравнением $x = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, также определяют этот эллипс.

Если эллипс задан каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, у которого $a < b$, то:

- параметры a , b – **полуоси эллипса**;
- эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$;
- фокус $F_1(0, \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b})$ и директриса, заданная уравнением $y = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$, определяют этот эллипс;
- фокус $F_2(0, -\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b})$ и директриса, заданная уравнением $y = -\frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$, также определяют этот эллипс.

Исключением будет эллипс, заданный каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, который является окружностью радиуса $r = a$. У окружности эксцентриситет $\varepsilon = 0$, фокус $F(0, 0)$ только один, а директрисы не существуют.

Если гипербола задана каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то:

- параметр a – **вещественная полуось** гиперболы, параметр b – **мнимая полуось**;
- эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$;
- фокус $F_1(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ и директриса, заданная уравнением $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, определяют правую ветвь этой гиперболы;
- фокус $F_2(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ и директриса, заданная уравнением $x = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, определяют левую ветвь этой гиперболы.

Если гипербола задана каноническим уравнением $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то:

- параметр a – **мнимая полуось** гиперболы, параметр b – **вещественная полуось**;
- эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$;
- фокус $F_1(0, \sqrt{a^2 + b^2})$ и директриса, заданная уравнением $y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, определяют верхнюю ветвь этой гиперболы;
- фокус $F_2(0, -\sqrt{a^2 + b^2})$ и директриса, заданная уравнением $y = -\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, определяют нижнюю ветвь этой гиперболы.

В обоих случаях прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ называют **асимптотами** гиперболы (см. рис. 4.8).

Если парабола задана каноническим уравнением $y^2 = 2px$, то:

- параметр p задает расстояние $r = |p|$ от фокуса до директрисы, при этом, если $p > 0$, то ветви параболы направлены вправо, если $p < 0$, – влево;
- фокус $F(\frac{p}{2}, 0)$ и директриса, заданная уравнением $x = -\frac{p}{2}$, определяют эту параболу.

Если парабола задана каноническим уравнением $x^2 = 2py$, то:

- параметр p задаёт расстояние $r = |p|$ от фокуса до директрисы, при этом, если $p > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $p < 0$, – вниз;
- фокус $F(0, \frac{p}{2})$ и директриса, заданная уравнением $y = -\frac{p}{2}$, определяют эту параболу.

П р и м е р.

У эллипса, заданного каноническим уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$:

- полуоси $a = \sqrt{16} = 4$, $b = \sqrt{9} = 3$ и $a > b$;
- эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{4^2 - 3^2}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}$;
- фокусы $F_1(\sqrt{7}, 0)$ и $F_1(-\sqrt{7}, 0)$;
- директрисы заданы уравнениями $x = \frac{16}{\sqrt{7}}$ и $x = -\frac{16}{\sqrt{7}}$.

У гиперболы, заданной каноническим уравнением $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$:

- вещественная полуось $a = \sqrt{9} = 3$,
мнимая полуось $b = \sqrt{16} = 4$;
- эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{4^2 + 3^2}}{3} = \frac{5}{3}$;
- фокусы $F_1(5, 0)$ и $F_1(-5, 0)$;
- директрисы заданы уравнениями $x = \frac{9}{5}$ и $x = -\frac{9}{5}$;
- асимптоты заданы уравнениями $y = \frac{4}{3}x$ и $y = -\frac{4}{3}x$.

У параболы, заданной каноническим уравнением $y^2 = -5x$:

- параметр $p = -\frac{5}{2}$;
- фокус $F(-\frac{5}{2}, 0)$;
- директриса задана уравнением $x = \frac{5}{2}$.

Приведение к каноническому виду. Если уравнение кривой второго порядка отличается от одного из канонических уравнений только тем, что вместо переменных x и y в нём стоят соответственно $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$,

то кривая является кривой того же типа, который определяет каноническое уравнение.

П р и м е р.

- Уравнение $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ задаёт эллипс.
- Уравнение $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{16} = 1$ задаёт гиперболу.
- Уравнение $(y+3)^2 = -5(x+7)$ задаёт параболу.

Кривая задаваемая таким уравнением будет отличаться от канонической кривой только сдвигом на вектор $\vec{v} = \{x_0; y_0\}$. При таком сдвиге центр координат сместится в точку $O'(x_0, y_0)$. При этом координаты фокуса канонической кривой увеличатся на x_0 и y_0 . Чтобы найти уравнения директрисы (асимптоты) надо в уравнение директрисы (асимптоты) соответствующей канонической кривой подставить вместо переменных x и y выражения $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$. Эксцентриситет и полуоси такой кривой совпадают с эксцентриситетом и полуосями канонической кривой.

Такие уравнения также называют каноническими.

Если общее уравнение кривой второго порядка не содержит слагаемого с произведением xy , то выделяя полные квадраты по каждой переменной его можно привести к каноническому уравнению описанного вида.

У п р а ж н е н и е. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка $y^2 + 5x + 6y + 44 = 0$ и определить тип кривой.

Р е ш е н и е. В уравнении присутствует квадрат только переменной y , поэтому выделим полный квадрат по этой переменной.

$$y^2 + 5x + 6y + 44 = 5x + (y^2 + 2 \cdot 3y + 3^2) - 3^2 + 44 = 5x + (y + 3)^2 + 35 = 0$$

Следовательно,

$$(y + 3)^2 = -5x - 35 = -5(x + 7).$$

Поэтому получаем каноническое уравнение параболы

$$(y + 3)^2 = -5(x + 7).$$

Смещенный центр находится в точке $O'(-7, -3)$.

Фокус канонической параболы $y^2 = -5x$ находится в точке $F(-\frac{5}{2}, 0)$, следовательно, фокус нашей параболы находится в точке $F(-\frac{5}{2} - 3, 0 - 7) = F(-\frac{11}{2}, -7)$.

Директриса канонической параболы $y^2 = -5x$ задаётся уравнением $x = \frac{5}{2}$, следовательно директриса нашей параболы будет задаваться уравнением $x + 7 = \frac{5}{2}$ или $x = -\frac{9}{2}$.

Эксцентриситет любой параболы равен единице.

5. ЗАДАНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Тема 1. Основные алгебраические структуры.

Числовые поля и многочлены

1. Выполнить арифметические действия с комплексными числами:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \left(\frac{3}{2} - 2i\right) + \left(-\frac{1}{2} + 3i\right); & \text{б) } (7 - 2i)(3 + 3i); & \text{в) } \frac{7 - 2i}{3 - 3i}; \\ \text{г) } \left(\frac{3}{2} - 2i\right) - \left(-\frac{3}{2} + 5i\right); & \text{д) } (5 + 2i)(-3 + 7i); & \text{е) } \frac{1}{7 - 2i}. \end{array}$$

2. Представить комплексное число в тригонометрической форме и изобразить его на комплексной плоскости:

$$\text{а) } 2 - 2i; \quad \text{б) } 3 + 3i; \quad \text{в) } 3 - i\sqrt{3}; \quad \text{г) } 7; \quad \text{д) } 7i; \quad \text{е) } \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

3. Используя формулы Муавра, найти:

$$\text{а) } (1 + i)^8; \quad \text{б) } (3 + 3i)^3; \quad \text{в) } (3 - i\sqrt{3})^4; \quad \text{г) } (-\sqrt{3} + i)^6; \quad \text{д) } (1 + i\sqrt{3})^3.$$

4. Найти все корни. Ответ записать в алгебраической форме и изобразить на комплексной плоскости.

$$\text{а) } \sqrt[3]{27}; \quad \text{б) } \sqrt[6]{\frac{i}{64}}; \quad \text{в) } \sqrt[3]{-27 + 27i}; \quad \text{г) } \sqrt[4]{8 + 8\sqrt{3}i}.$$

5. Определить кратность корня x_0 многочлена $p(x)$:

$$\begin{array}{l} \text{а) } p(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, \quad x_0 = 2; \\ \text{б) } p(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x - 8, \quad x_0 = -1; \\ \text{в) } p(x) = x^6 - 9x^5 + 26x^4 - 10x^3 - 99x^2 + 243x - 216, \quad x_0 = 3; \\ \text{г) } p(x) = x^7 - 5x^6 + 11x^5 - 15x^4 + 15x^3 - 11x^2 + 5x - 1, \quad x_0 = 1. \end{array}$$

6. Разложить многочлен $p(x)$ над полем комплексных чисел:

$$\begin{array}{l} \text{а) } p(x) = x^2 + 2x + 5; \\ \text{б) } p(x) = x^4 + 9x^2 + 20. \end{array}$$

Тема 2. Матрицы

7. Найти произведение матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

8. Найти произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить определитель 3-го порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 11 & 9 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 11 & 9 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

10. Найти матрицу, обратную матрице:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. Вычислить ранг матрицы

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 8 & 3 \\ 1 & -5 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тема 3. Системы линейных алгебраических уравнений

12. Показать, что система линейных уравнений имеет единственное решение, и найти его по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -4, \\ -3x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 7, \\ -5x_1 - x_2 + 14x_3 = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 19x_3 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 8, \\ -5x_1 - x_2 + 28x_3 = 9; \end{cases}$$

13. Показать, что система линейных уравнений имеет единственное решение, и найти его матричным способом:

$$\text{а) } \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 6, \\ -3x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 8, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 7; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 10x_3 = 11, \\ -3x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 6, \\ -5x_1 - x_2 + 28x_3 = 23; \end{cases}$$

14. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 6, \\ -3x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 8, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 7, \\ -5x_1 - x_2 + 14x_3 = 15; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 10x_3 = 11, \\ -3x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 6, \\ -5x_1 - x_2 + 28x_3 = 23, \\ -6x_1 + 4x_2 + 18x_3 = 12; \end{cases}$$

Тема 4. Векторные пространства и линейные отображения. Пространство геометрических векторов

15. Найти длину вектора $2\vec{u} - 3\vec{v}$, если:

а) $|\vec{u}| = 1, |\vec{v}| = 3, \varphi = \frac{2\pi}{3};$

б) $|\vec{u}| = \sqrt{2}, |\vec{v}| = 3, \varphi = \frac{3\pi}{4}.$

16. Для векторов $\vec{u} = \{-1; 3; 0\}$ и $\vec{v} = \{2; -4; 1\}$ найти скалярные произведения: $(\vec{u}, \vec{v}), (\vec{u}, \vec{u}), (\vec{v}, \vec{v}), (\vec{u} - \vec{v}, 2\vec{v} + 3\vec{u})$.

17. Найдите $|\vec{u} \times \vec{v}|$, если $|\vec{u}| = 10, |\vec{v}| = 2$ и $(\vec{u}, \vec{v}) = 12$.

18. Найти векторные произведения: $\vec{u} \times \vec{v}, 3\vec{v} \times 2\vec{u}, (\vec{u} - 3\vec{v}) \times (2\vec{u} + \vec{v})$, если $\vec{u} = \{-1; 3; 0\}$ и $\vec{v} = \{2; -4; 1\}$.

19. Для векторов $\vec{u} = \{-1; 3; 0\}, \vec{v} = \{2; -4; 1\}$ и $\vec{w} = \{-2; 0; 1\}$ найти смешанные произведения: $(2\vec{u}, \vec{v}, -3\vec{w}), (2\vec{u} + \vec{v}, \vec{v}, \vec{v} - 3\vec{w})$.

Тема 5. Линейные геометрические объекты

20. Определить вершины треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x + 3y = 0, x = 3, x - 2y + 3 = 0$.

21. В треугольнике с вершинами $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ найти: .

- 1) общее уравнение прямой AB ;
- 2) общее уравнение медианы, проведенной из вершины A ;
- 3) общее уравнение высоты опущенной из вершины B ;
- 4) внутренний угол A ;

5) длину высоты опущенной из вершины C на сторону AB .

а) $A(-2, 2)$, $B(1, 8)$, $C(8, 0)$; б) $A(-2, 4)$, $B(6, 5)$, $C(4, -2)$.

22. Найти каноническое уравнение прямой, полученной пересечением плоскостей $x + y - z = 0$ и $5x - 3y + 12z = 0$.

23. Найти расстояние между параллельными прямыми:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

24. Напишите общее уравнение плоскости проходящей через параллельные прямые:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}.$$

25. Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0, 0, 3)$ перпендикулярно к плоскостям $x - 2y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

26. Найти расстояние от точки $M(4, 3, 0)$ до плоскости, проходящей через точки $A(1, 3, 0)$, $B(4, -1, 2)$, $C(3, 0, 1)$.

27. Выясните взаимное расположение прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{1}$ и плоскости $x + y - z - 4 = 0$.

28. Покажите, что прямая $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$ лежит в плоскости $4x + 3y + 7z - 17 = 0$.

29. Выясните взаимное расположение плоскостей: $-4x - 6y + 2z + 14 = 0$ и $2x + 3y - z - 4 = 0$.

Тема 6. Кривые и поверхности второго порядка

30. Найти все геометрические характеристики кривой второго порядка, заданной уравнением:

а) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$; в) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$; г) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$.

31. Составить уравнение геометрического места точек:

а) отношение расстояний от которых до точки $F(3/2, 0)$ и до прямой $X = 6$ равно $\frac{1}{2}$;

- б) отношение расстояний от которых до точки $F(7, 0)$ и до прямой $X = 1, 4$ равно $\sqrt{5}$;
- в) равноудаленных от точки $F(-2, 0)$ и от прямой $Y = 2$.

Тема 7. Линейные пространства и линейные преобразования

32. Линейное преобразование имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Вычислить матрицу этого линейного преобразования в новом базисе:

- а) $\vec{e}'_1 = \{1; 0; 1\}$, $\vec{e}'_2 = \{0; 1; 0\}$, $\vec{e}'_3 = \{0; 0; 1\}$;
- б) $\vec{e}'_1 = \{1; 0; 1\}$, $\vec{e}'_2 = \{0; 1; 1\}$, $\vec{e}'_3 = \{0; 0; 1\}$.

33. Найти все собственные векторы линейного преобразования, которому соответствует матрица:

- а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

34. Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов этого преобразования:

- а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

35. Найти все собственные числа и собственные векторы линейных преобразований пространства:

- а) $\varphi(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- б) $\varphi(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{i})\vec{i}$;
- в) $\varphi(\vec{x}) = \vec{i} \times \vec{x}$.

Тема 8. Евклидовы пространства и их топология. Многомерная евклидова геометрия

36. Проверить, будет ли ортонормированным базис из векторов

$$\vec{e}'_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad \vec{e}'_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad \vec{e}'_3 = (0, 0, 1)?$$

37. Применяя процесс ортогонализации, постройте ортогональный базис пространства, исходя из базиса:

а) $\vec{e}'_1 = (1, -2, 2)$, $\vec{e}'_2 = (-1, 0, -1)$, $\vec{e}'_3 = (5, -3, -7)$;

б) $\vec{e}'_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}'_2 = (3, 3, -1)$, $\vec{e}'_3 = (-2, 0, 6)$.

38. Найти координаты вектора $\vec{w} = (0, 2, 0)$ в базисе из векторов:

а) $\vec{e}'_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $\vec{e}'_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $\vec{e}'_3 = (0, 0, 1)$;

б) $\vec{e}'_1 = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$, $\vec{e}'_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$, $\vec{e}'_3 = (0, 1, 0)$.

39. Проверить, является ли матрица ортогональной:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Тема 9. Квадратичные формы

40. Найти канонический вид квадратичной формы:

а) $x^2 + 12xy + y^2$; б) $7x^2 + 16xy - 23y^2$; в) $25x^2 - 14xy + 25y^2$.

41. Чему равны ранг и сигнатура квадратичной формы:

а) $2x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 9x_4^2$;

б) $2x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 9x_4^2 - 3x_5^2$;

в) $-5x_1^2 + x_3^2 - 3x_5^2$?

42. Будет ли положительно (отрицательно) определенной квадратичная форма:

а) $F(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 2xy$;

б) $F(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 8xy$;

в) $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$?

Тема 10. Классификация кривых и поверхностей второго порядка

43. Привести к каноническому виду уравнения кривых второго порядка, и построить эти кривые:

а) $\frac{(x-2)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$; б) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$;

в) $y = -(x+2)^2$; г) $y = x^2 + x$.

44. Напишите канонические уравнения кривых второго порядка. Найдите канонические системы координат. Постройте кривые:

а) $3x^2 - 6x + 4y^2 + 16y + 7 = 0$;

б) $3x^2 + 18x - 2y^2 + 4y + 19 = 0$;

в) $x^2 - 4x - 6y - 2 = 0$;

г) $y^2 + 3x + 10y + 31 = 0$;

д) $25x^2 - 50x + 4y^2 + 16y - 59 = 0$.

6. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П.С. Александров. – СПб.: Лань, 2009.
2. *Геворкян П.С.* Высшая математика для экономистов: Курс лекций, пособие для ВУЗов / П.С. Геворкян и др. – Москва.: ЗАО «Издательство «Эконом», 2010.
3. *Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г.* Математика в экономике: учебник. Ч 1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2011.

Дополнительная литература

4. *Ивлева А.М.* Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: Учеб. пособие, 3-е издание, исправленное и дополненное / А.М. Ивлева, П.И. Прилуцкая, И.Д. Черных. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009.
5. *Ивлева А.М.* Готовимся к контрольной работе: Учеб. пособие / А.М. Ивлева, П.И. Прилуцкая, И.Д. Черных. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010.
6. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре / И.М. Гельфанд. – М.: Добросвет, МЦНМО, 2007.