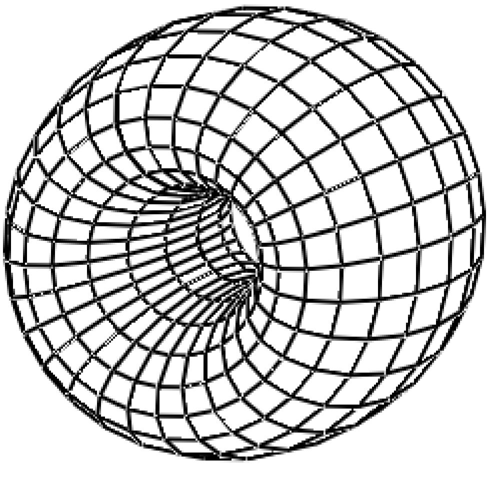
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРОТИВОПОЖАРНОЙ СЛУЖБЫ МЧС РОССИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для слушателей заочного и дистанционного обучения
направление подготовки 280705.65 – Пожарная безопасность
квалификация (степень) – специалист



Санкт-Петербург
2013

Санкт-Петербургский университет государственной противопожарной службы МЧС России

Калинина Е.С., Крюкова М.С., Медведева О.М.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для слушателей 1 курса заочного и дистанционного обучения
направление подготовки 280705.65 – Пожарная безопасность
квалификация (степень) – специалист

Санкт-Петербург
2013

СОДЕРЖАНИЕ

Рекомендации по решению типовых задач по контрольной работе № 1

1. Матрицы и операции над ними. Определители квадратных матриц.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например A, B, C, …, а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца. Матрица записывается в виде

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{n\times m}$ есть матрицы разного порядка.

Две матрицы A и B одного размера называются равными, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е. $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$, где $i = 1, 2, 3, \dots, m$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Виды матриц.

1. Матрица-строка – матрица, состоящая из одной строки. Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ – матрица-строка.
2. Матрица-столбец – матрица, состоящая из одного столбца. Например, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец.
3. Квадратная матрица – матрица, у которой число строк равно числу столбцов. Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 8 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица третьего порядка.
4. Диагональная матрица – квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю. Например, $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ – диагональная матрица третьего порядка.

5. Единичная матрица – диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице. Например, $E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ – единичная матрица четвертого порядка.

6. Нулевая матрица – матрица, все элементы которой равны нулю. Например, $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ – нулевая матрица третьего порядка.

7. Транспонированная матрица – матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером. Например, для матрицы $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\6&0&5\end{pmatrix}$, транспонированная матрица имеет вид $A^T=\begin{pmatrix}1&6\\-2&0\\3&5\end{pmatrix}$.

Над матрицами, как и над числами можно производить ряд операций, причем.

Умножение матрицы на число. Произведением матрицы A на число k (или числа k на матрицу A) называется матрица $B=A\cdot k$, элементы которой $b_{ij}=a_{ij}\cdot k$, $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$.

Пример 1.1. Умножить матрицу $A=\begin{pmatrix}1&3&0\\2&4&1\end{pmatrix}$ на число 4.

Решение. $4A=4\cdot\begin{pmatrix}1&3&0\\2&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot1&4\cdot3&4\cdot0\\4\cdot2&4\cdot4&4\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&12&0\\8&16&4\end{pmatrix}$.

Сложение матриц. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m\times n$ называется матрица $C=A+B$, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $(i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n})$.

Пример 1.2. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&3\\6&2\\5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4\\0&8\\3&4\end{pmatrix}$. Найти $A+B$.

Решение. $A+B=\begin{pmatrix}1&3\\6&2\\5&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&4\\0&8\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2&3+4\\6+0&2+8\\5+3&1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&7\\6&10\\8&5\end{pmatrix}$.

Вычитание матриц. Разность двух матриц одинакового размера $m\times n$ определяется через операции сложения матриц и умножения матрицы на число: $A-B=A+(-1)\cdot B$.

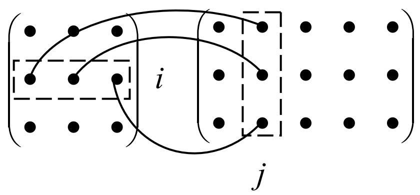
Пример 1.3. Пусть $A=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Найти $A-B$.

Решение. $A-B=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -4\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-2 & 2-4\\ 1-1 & 3-2\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Произведение матриц. Произведение матриц имеет место только для матриц определенных размерностей. Матрицу A можно умножить на матрицу B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, т.е. если A имеет размерность $m\times k$, то матрица B должна иметь размерность $k\times n$. Произведением будет матрица размерности $m\times n$.

Произведением матриц $\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times n}{B}$ называется матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов $i-й$ строки матрицы A на соответствующие элементы $j-го$ столбца матрицы B.

Получение элемента c_{ij} схематично изображается так:



Пример 1.4. Вычислить произведение матриц $A\cdot B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$,
$B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

Решение. Найдем размер матрицы-произведения: $\underset{1\times 3}{A}\cdot\underset{3\times 2}{B}=\underset{1\times 2}{C}$. Вычислим элементы матрицы-произведения C, умножая элементы строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B: $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}1\cdot 3+3\cdot 2+4\cdot 0 & 1\cdot 1+3\cdot 0+4\cdot 2\\ 2\cdot 3+0\cdot 2+1\cdot 0 & 2\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 9\\ 6 & 4\end{pmatrix}$.

Пример 1.5. Найти матрицу $D = AB + 2C$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Произведение матриц A и B возможно. Умножая элементы строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B, получим $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 3\cdot 2 & 1\cdot 1 + 3\cdot 7 \\ 4\cdot 0 + 0\cdot 2 & 4\cdot 1 + 0\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 22 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Умножим матрицу C на число 2, получим $2C = 2\cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 4 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. Найдем сумму матриц AB и $2C$: $D = AB + 2C = \begin{pmatrix} 6 & 22 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 6+2 & 22+6 \\ 0+4 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 28 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

Определитель (детерминант) – это число, соответствующее данной квадратной матрице и вычисленное по определенному правилу.

Для обозначения определителей используются следующие символы: $|A|$, Δ, $\det A$. Символ A обозначает таблицу (матрицу), для которой вычисляется определитель.

Определитель матрицы первого порядка $A = (a_{11})$ или просто определитель первого порядка равен самому числу a_{11}: $\Delta = |a_{11}| = a_{11}$.

Например, пусть $A = (5)$, тогда $|A| = |5| = 5$.

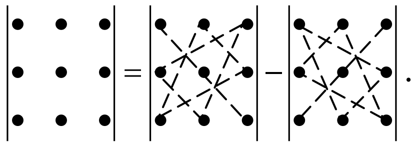
Определителем матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, или определителем второго порядка называется число, которое вычисляется по формуле: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$.

Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, тогда $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 6 - 5\cdot 2 = -4$.

Определителем матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ или определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из 6 слагаемых, или 6 членов определителя. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы.

Вычисление определителя третьего порядка иллюстрируется схемой:



Пример 1.6. Вычислить определители третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 0 + 3\cdot(-2)\cdot(-2) + 2\cdot 1\cdot(-1) - (-2)\cdot 5\cdot(-1) - 3\cdot 2\cdot 0 -$
$-(-2)\cdot 1\cdot 1 = 2$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы $n-$*го* порядка называется определитель матрицы $(n-1)-$*го* порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием $i-$*ой* строки и $j-$*го* столбца.

Пример 1.7. Найти минор элемента a_{13} матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение. Из полученной матрицы A вычеркнем первую строку, и третий столбец, получим $M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 5\cdot 3 = -13$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы $n-$*го* порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Пример 1.8. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{12} матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Из полученной матрицы A вычеркнем первую строку, и второй столбец, полученный минор возьмем со знаком $(-1)^{1+2}$, т.е. $A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -(8\cdot 4 - 1\cdot(-2)) = -34$.

2. Обратная матрица.

Матрица A^{-1} называется *обратной по отношению к квадратной матрице* A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$.

Не каждая квадратная матрица имеет обратную. Для существования матрицы A^{-1} необходимым и достаточным условием существования является требование $|A|\neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля $(|A|\neq 0)$, то такая квадратная матрица называется невырожденной, в противном случае (при $|A|=0$) – вырожденной.

Алгоритм нахождения вычисления обратной матрицы.

1. Вычислить определитель исходной матрицы. Если $|A|=0$, то матрица A – вырожденная, и обратная матрица A^{-1} не существует. Если $|A|\neq 0$, то матрица A – невырожденная, и обратная матрица существует.
2. Найти матрицу A^T, транспонированную к матрице A.
3. Найти алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A_{ij}^T = A_{ji}$ ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$).
4. Из полученных алгебраических дополнений составить присоединенную матрицу $\tilde{A}$.
5. Вычислить обратную матрицу по формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}$.
6. Проверить правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$.

Пример 2.1. Найти обратную матрицу к матрице $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -1\end{pmatrix}$.

Решение. Найдем определитель исходной матрицы A: $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix} = -3+0-8-6-0+6=-11$. Так как $|A|\neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует. Транспонированная матрица к матрице A имеет вид $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 3 & -3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

Найдем алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы: $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=3$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5$, $A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7$,
$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=4$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2$,

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6$, $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1$, $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3$.

Из полученных алгебраических дополнений составим присоединенную матрицу $\tilde{A}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -7 \\ 4 & -3 & -2 \\ -6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & -7 \\ 4 & -3 & -2 \\ -6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Рассмотрим систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Решением данной системы называется такая совокупность чисел $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, $x_3 = k_3$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Для исследования вопроса о нахождении решения данной системы необходимо предварительно вычислить следующие четыре определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ называется определителем системы. Вспомогательные определители Δ_1, Δ_2, Δ_3 получаются из определителя системы Δ заменой свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

При решении системы возможны три различные ситуации.

1. Если определитель Δ системы отличен от нуля $(\Delta \neq 0)$, то система линейных уравнений имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

2. Если определитель системы равен нулю $(\Delta = 0)$ и хотя бы один из определителей Δ_1, Δ_2, Δ_3 отличен от нуля, то система решений не имеет, т.е. несовместна.

3. Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система линейных уравнений неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Пример 3.1. Решить систему уравнений $\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -6 \\ -4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$.

Решение. Найдем определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 4 & 5 \\ -4 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 30 + 20 + 24 -$

$-60 - 15 - 16 = -17$. Так как $\Delta \neq 0$, то система линейных уравнений имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц Δ_1, Δ_2, Δ_3, полученных из определителя системы Δ заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов свободных членов: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & 4 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 36 + 15 + 48 - 120 - 18 - 12 = -51$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -6 & 5 \\ -4 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -15 - 80 - 36 + 30 + 60 + 24 = -17,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & 4 & -6 \\ -4 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -120 - 24 - 24 + 72 + 15 + 64 = -17.$$

По формулам Крамера находим единственное решение системы линейных уравнений: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-51}{-17} = 3$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-17}{-17} = 1$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-17}{-17} = 1$.

4. Элементы векторной алгебры.

Вектором называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой A и конечной точкой B.

Векторы могут обозначаться как двумя прописными буквами, так и одной строчной с чертой или стрелкой, т.е. $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$.

Длиной (или модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка, изображающего вектор и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* и обозначается через $\vec{e}$.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Сложение векторов. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных вектора, рис. 4.1а. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. От точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, рис. 4.1б. Это правило сложения векторов называют правилом треугольника. Сумму двух векторов можно построить также по правилу параллелограмма, рис. 4.1в.

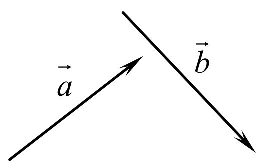


Рис. 4.1а

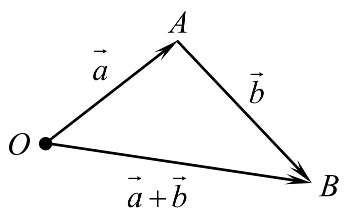


Рис. 4.1б

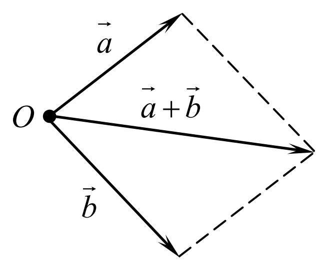


Рис. 4.1в

Вычитание векторов. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных вектора, рис. 4.2а. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{BA}$, соединяющий конец второго вектора с концом первого, называется разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 4.2б).

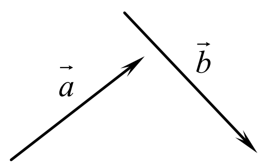


Рис. 4.2а

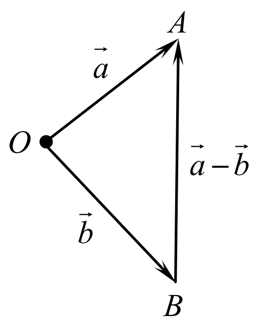


Рис. 4.2б

Умножение вектора на число. Произведением вектора на скаляр (число) λ называется вектор $\lambda \cdot \vec{a}$ (или $\vec{a} \cdot \lambda$), имеющий длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, коллинеарный вектору $\vec{a}$ и направленный в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и в противоположную сторону, если $\lambda < 0$.

Пример 4.1. Даны три вектора $\vec{a}=(2;4;0)$, $\vec{b}=(0;-3;1)$, $\vec{c}=(5;-1;2)$. Найти координаты вектора $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

Решение. Так как при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, то $2\vec{a}=(4;8;0)$, $-3\vec{b}=(0;9;-3)$. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, следовательно, $\vec{d}=(9;16;-1)$.

Зная координаты вектора можно определить его длину. Длина вектора $\vec{a}=(x;y;z)$ вычисляется по формуле $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Пример 4.2. Даны точки $A(3;3;2)$ и $B(0;1;2)$. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=(0-3;1-3;2-2)=$ $=(-3;-2;0)$. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+0^2}=5$.

Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\alpha$.

Пример 4.3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\alpha=60^\circ$.

Решение. Так как $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\alpha=60^\circ$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно $\vec{a}\cdot\vec{b}=5\cdot2\cdot\cos60^\circ=10\cdot\dfrac{1}{2}=5$.

Скалярное произведение векторов можно выразить через координаты векторов $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$, тогда угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле $\cos\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

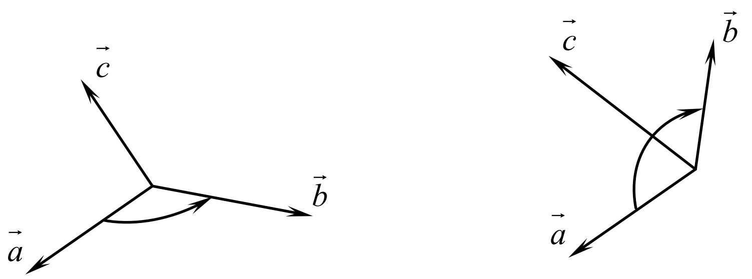
Пример 4.4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и угол между ними, если $\vec{a}=(2;-5;4)$, $\vec{b}=(-1;2;7)$.

Решение. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-1)+$ $+(-5)\cdot2+4\cdot7=16$.

Длина вектора $\vec{a}$ равна $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2^2+(-5)^2+4^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$, длина вектора $\vec{b}$ – $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+7^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$. Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\cos\alpha=\dfrac{16}{3\sqrt{5}\cdot3\sqrt{6}}=\dfrac{16}{9\sqrt{30}}=\dfrac{8\sqrt{30}}{135}$, откуда $\alpha=\arccos\dfrac{8\sqrt{30}}{135}$.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и левую, если по часовой, рис. 4.3.



Правая тройка Левая тройка

Рис. 4.3

Векторным произведением вектора a на вектор $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, который определяется тремя условиями:

1. длина вектора $\vec{c}$ равна $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\alpha$ где α угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2. вектор $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Векторное произведение $\vec{a}$ на $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}\times\vec{b}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в декартовой системе координат: $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ можно найти с помощью разложения определителя: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$.

Пример 4.5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(1;1;2)$, $\vec{b}=(2;1;0)$.

Решение. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=4\vec{j}+\vec{k}-2\vec{k}-2\vec{i}=-2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ или $\vec{a}\times\vec{b}=(-2;4;-1)$.

Согласно определению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\alpha$, тогда площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна модулю векторного произведения этих векторов, т.е. $S_{пар}=|\vec{a}\times\vec{b}|$, а площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Пример. 4.6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(3;-2;6)$, $\vec{b}=(6;3;-2)$.

Решение. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 6\\ 6 & 3 & -2\end{vmatrix}=4\vec{i}+36\vec{j}+9\vec{k}+12\vec{k}-18\vec{i}+6\vec{j}=-14\vec{i}+42\vec{j}+21\vec{k}$ или $\vec{a}\times\vec{b}=(-14;42;21)$.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ равна $S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=$ $=\sqrt{(-14)^2+42^2+21^2}=49$ кв. ед.

Смешанными произведением векторов трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т.е. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами в декартовой системе координат: $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$, то смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ можно найти по формуле: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$.

Пример 4.7. Найти смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, если $\vec{a}=(1;1;2)$, $\vec{b}=(1;-2;3)$, $\vec{c}=(2;1;1)$.

Решение. Смешанное произведение векторов равно $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=$ $=-2+2+6+8-3-1=10$.

Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку, т.е. $V_{парал.}=\pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Объем тетраэдра, построенного на этих же векторах, равен $V_{тетр.}=\pm\frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Пример 4.8. Найти объем тетраэдра с вершинами в точках $A(-1;1;0)$, $B(2;-2;1)$, $C(3;1;-1)$, $D(1;0;-2)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB}=(3;-3;1)$, $\overrightarrow{AC}=(4;0;-1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;-1;-2)$. Искомый объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Таким образом, $V_{тетр}=\pm\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}3&-3&1\\4&0&-1\\2&-1&-2\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{6}\cdot(-4+6-3-24)=\frac{25}{6}$ куб. ед.

5. Элементы аналитической геометрии.

Уравнение линии (или кривой) на плоскости Oxy называется такое уравнение $F(x;y)=0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Уравнение линии позволяет изучить ее геометрические свойства с помощью исследования ее уравнения. Простейшим из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат разные виды ее уравнений.

Уравнение первой степени относительно x и y вида $Ax+By+C=0$ называется общим уравнением прямой на плоскости, где A, B и C – произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно.

Если в общем уравнении прямой $B\neq 0$, то, разрешив его относительно y, получим уравнение вида $y=kx+b$, где $k=-{}^{A}\!/\!{}_{B}$, $b=-{}^{C}\!/\!{}_{B}$. Его называют уравнением прямой с угловым коэффициентом, поскольку $k=tg\,\alpha$, α – угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox. Свободный член уравнения b равен ординате точки пересечения прямой с осью Oy.

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M(x_0;y_0)$ записывается в виде $y-y_0=k(x-x_0)$.

Если известны координаты точек $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, то уравнение прямой, проходящей через две точки имеет вид $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Пример 5.1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(-3;5)$ и $M_2(7;-2)$.

Решение. Воспользуемся уравнением $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$: $\frac{x-(-3)}{7-(-3)}=\frac{y-5}{-2-5}$ или $\frac{x+3}{10}=\frac{y-5}{-7}$, откуда $7x+10y-29=0$.

Острый угол между двумя прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ определяется по формуле $tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Если прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельны, то условие параллельности имеет вид $k_1=k_2$. Если прямые перпендикулярны, то условие перпендикулярности имеет вид $k_1=-\frac{1}{k_2}$.

Пример 5.2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;4)$ параллельно прямой $2x+3y+5=0$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой равен $k_1=-\frac{2}{3}$. Искомая прямая параллельна данной, поэтому ее угловой коэффициент равен $k_2=k_1=-\frac{2}{3}$.

Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом, получим уравнение искомой прямой: $y-4=-\frac{2}{3}\left(x-(-1)\right)$ или $y-4=-\frac{2}{3}(x+1)$, откуда $2x+3y-10=0$.

Пример 5.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4;3)$ перпендикулярно прямой $2x-3y-4=0$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой равен $k_1=\frac{2}{3}$. Искомая прямая перпендикулярна данной, поэтому ее угловой коэффициент равен $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{3}{2}$.

Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом, получим уравнение искомой прямой: $y-3=-\frac{3}{2}\left(x-(-4)\right)$ или $y-3=-\frac{3}{2}(x+4)$, откуда $3x+2y+6=0$.

Под расстоянием от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ понимается длина перпендикуляра, опущенного из точки M на данную прямую. Расстояние от точки M до прямой находится по формуле $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Пример 5.4. Даны координаты точек $A(1;2)$, $B(2;0)$, $C(-1;1)$. Найти:

1. уравнения сторон треугольника ABC;
2. уравнение медианы, опущенной из вершины A;
3. длину и уравнение высоты, опущенной из вершины B.

Решение.

1. Для нахождения уравнений сторон треугольника ABC воспользуемся формулой $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Найдем уравнение стороны AB: $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{0-2}$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}$, $-2(x-1)=y-2$, $-2x+2=y-2$, $2x+y-4=0$. Найдем уравнение стороны BC: $\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-0}{1-0}$,

$\frac{x-2}{-3}=\frac{y}{1}$, $x-2=-3y$, $x+3y-2=0$. Найдем уравнение стороны AC: $\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-2}{1-2}$, $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-1}$, $-(x-1)=-2(y-2)$, $-x+1=-2y+4$, $x-2y+3=0$.

2. Пусть точка M середина стороны BC, тогда координаты точки M равны $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$, $y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$. Уравнение медианы AM определим по формуле $\frac{x-x_A}{x_M-x_A}=\frac{y-y_A}{y_M-y_A}$. Найдем уравнение медианы AM: $\frac{x-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{y-2}{\frac{1}{2}-2}$, откуда $3x-y-1=0$.

3. Найдем уравнение прямой, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AC.

Разрешив уравнение прямой AC относительно y, получим $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. Угловой коэффициент прямой AC равен $k_1=\frac{1}{2}$. Искомая прямая перпендикулярна прямой AC, поэтому ее угловой коэффициент равен $k_2=-\frac{1}{k_1}=-2$.

Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом, получим уравнение искомой прямой: $y-0=-2(x-2)$, откуда $2x+y-4=0$.

Расстояние от точки B до прямой AC равно $d=\frac{|1\cdot 2-2\cdot 0+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$.

Уравнение плоскости, записанное в виде $Ax+By+Cz+D=0$, называется общим уравнением плоскости, где A, B, C, D – произвольные числа, причем A, B и C не равны нулю одновременно, причем $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Три точки пространства $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Уравнение $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-x_1 & z_3-x_1 \end{vmatrix}=0$ есть уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Пусть даны уравнения двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Условием параллельности двух плоскостей является пропорциональность коэффициентов при одноименных переменных $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, а условием их перпендикулярности $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Острый угол между плоскостями определяется по формуле $\cos\alpha = \dfrac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Пример 5.5. Найти острый угол между плоскостями $7x - 11y + 8z + 19 = 0$ и $x + 4y - 10z - 5 = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой $\cos\alpha = \dfrac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$. Так как $\cos\alpha = \dfrac{\left|7\cdot 1 + (-11)\cdot 4 + 8\cdot(-10)\right|}{\sqrt{7^2 + 11^2 + 8^2}\sqrt{1^2 + 4^2 + 10^2}} = \dfrac{117}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{117}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то угол между плоскостями $7x - 11y + 8z + 19 = 0$ и $x + 4y - 10z - 5 = 0$ равен $\alpha = 45^\circ$.

Пример 5.6. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $ABCD$: $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Требуется найти: длину ребра AB; уравнение плоскости ABC; площадь грани ABC; объем пирамиды.

Решение. Так как $\overrightarrow{AB} = (2;-2;-3)$, то длина ребра AB равна $|AB| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$.

Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$: $\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12x - 24y + 8z + 88$. Уравнение плоскости ABC имеет вид $3x + 6y - 2z - 22 = 0$.

Определим площадь грани ABC. Координаты векторов равны $\overrightarrow{AB} = (2;-2;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (4;0;6)$, векторное произведение равно $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}$. Площадь грани ABC равна $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{144 + 576 + 64} = \dfrac{1}{2}\sqrt{784} = 14$ кв. ед.

Объем треугольной пирамиды равен $V = \pm\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \dfrac{154}{3}$ куб. ед.

Рекомендации по решению типовых задач по контрольной работе № 2

6. Предел функции.

Число A называется пределом числовой последовательности a_1, $a_2,\ldots,$ $a_n,\ldots$, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N (зависящий от ε, $N = N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство: $|a_n - A| < \varepsilon$.

Предел числовой последовательности обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ или $a_n \to A$ при $n \to \infty$. Последовательность, имеющая предел, называется сходящийся, в противном случае – расходящейся.

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $S > 0$ (зависящее отε; $S = S(\varepsilon)$), что для всех x таких, что $|x| > S$, верно неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0 (или в точке x_0), если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее отε; $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме пределов этих функций, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) + \varphi(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

2. Предел произведений конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

3. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций (при условии, что предел делителя не равен нулю), т.е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$ $\left(\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) \neq 0\right)$.

Пример 6.1. Найти следующие пределы: а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x-1}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-1}{2x^2-3x+2}$.

Решение.

а) Так как $x \to 4$, то числитель дроби стремиться к числу $5 \cdot 4 + 2 = 22$, а знаменатель – к числу $2 \cdot 4 + 3 = 11$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 4} \frac{5x+2}{2x+3} = \frac{22}{11} = 2$.

б) Числитель и знаменатель дроби при $x \to 1$ стремиться к нулю (неопределенность вида $0/0$). Разложим на множители числитель дроби: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-5)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x-5) = -4$.

в) Умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $\left(\sqrt{x+4}+2\right)$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+4}\right)^2 - 2^2}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{\sqrt{0+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

г) Числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при $x \to \infty$. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида ∞/∞. Разделив на x^2 числитель и знаменатель дроби, получаем $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 2} =$ $= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{6 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{6}{2} = 3$, так как при $x \to \infty$ каждая из дробей $1/x^2$, $3/x$, $2/x^2$ стремиться к нулю.

Первым замечательным пределом называется $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, вторым замечательным пределом $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Пример 6.2. Используя первый замечательный предел вычислить: а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{\sin 2x}$, б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 5x}{x^2}$.

Решение.

а) Используя первый замечательный предел, имеем: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{\sin 2x} =$ $= \frac{9}{2} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{9x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{9}{2}$.

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 6x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2 3x}{x^2} = 2\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2 = 2 \cdot 3^2 \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 = 2 \cdot 3^2 = 18$.

Пример 6.3. Используя второй замечательный предел вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{2x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3+1}{x+3}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+3}+\frac{1}{x+3}\right)^{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{x+3-3}\right)^{2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{x+3}\cdot\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{-3}\right)^{2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{x+3}\right)^{2}=e^{2}.$

7. Непрерывность функции.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она удовлетворяет следующим трем условиям: 1) определена в точке x_0 (т.е. существует $f(x_0)$); 2) имеет конечный предел функции при $x\to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Пример 7.1. Для каждой из заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер: а) $f(x)=\frac{x+1}{x-6}$, б) $f(x)=\begin{cases}x^2, & при\ \ x\le 1\\ x-2, & при\ \ x>1\end{cases}$.

Решение.

а) Функция $f(x)=\frac{x+1}{x-6}$ не определена в точке $x=6$ и, следовательно, в этой точке функция терпит разрыв. Найдем односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to 6-0}\frac{x+1}{x-6}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 6+0}\frac{x+1}{x-6}=+\infty$. Так как односторонние пределы равны бесконечности, значит, точка $x=6$ – точка разрыва 2-го рода, точка бесконечного разрыва.

б) Функция $f(x)=\begin{cases}x^2, & при\ \ x\le 1\\ x-2, & при\ \ x>1\end{cases}$ в точке $x=1$ не является непрерывной – первое условие непрерывности выполнено – существует $f(1)=1^2=1$, но нарушено второе условие отсутствует $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (точнее говоря, здесь существуют односторонние пределы функции слева $\lim\limits_{x\to 1-0} x^2=1$ и справа $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-2)=-1$, но общего предела при $x\to 1$ не существует).

8 Производная функции.

Производной функции $y=f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Производная функции имеет несколько обозначений: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$. Иногда в обозначении производной используется индекс, указывающий, по какой переменной взята производная, например, y'_x.

Нахождение производной функции называется дифференцированием этой функции.

Таблица производных основных элементарных функций

$(x)'=1$	$\left(e^x\right)'=e^x$	$(\sin x)'=\cos x$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$	$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(tg)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{arc}\,tgx)'=\frac{1}{1+x^2}$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(ctg)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{arc}\,ctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Пример 8.1. Найти производные функций: а) $y=x^7$, б) $y=4^x$.

Решение.

а) $y=x^7$ – степенная функция. Используя формулу производной для степенной функции, получим $y'=\left(x^7\right)'=7x^{7-1}=7x^6$.

б) $y=4^x$ – показательная функция. Используя формулу производной для показательной функции, получим $y'=\left(4^x\right)'=4^x\ln 4$.

Основные правила дифференцирования:

1. Производная постоянной равна нулю, т.е. $(c)'=0$.
2. Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же сумме производных этих функций, т.е. $(u+v)'=u'+v'$.
3. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, т.е. $(uv)'=u'v+uv'$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной $(cu)' = cu'$.

4. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Пример 8.2. Найти производные функций: а) $y = \sin x + \sqrt{x}$, б) $y = x^5 \sin x$, в) $y = \frac{e^x}{\cos x}$.

Решение.

а) По правилу дифференцирования суммы двух функций, получим $y' = (\sin x)' + \left(\sqrt{x}\right)' = \cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

б) По правилу дифференцирования произведения двух функций, получим $y' = \left(x^5\right)' \cdot \sin x + x^5 \cdot (\sin x)' = 5x^4 \sin x + x^5 \cos x$.

в) б) По правилу дифференцирования частного двух функций, получим $y' = \frac{\left(e^x\right)' \cdot \cos x - e^x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$.

Пусть переменная y есть функция от переменной u, а переменная u в свою очередь есть функция от независимой переменной x, т.е. задана сложная функция $y = f\left[\varphi(x)\right]$.

Теорема. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу и умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x, т.е. $y' = f'(u) \cdot u'$.

Пример 8.3. Найти производные функций: а) $y = \left(x^2 + 3x\right)^4$, б) $y = \ln\left(x^3 + 4x\right)$, в) $y = \sin^2 x$.

Решение.

а) Функцию $y = \left(x^2 + 3x\right)^4$ можно представить в виде $y = u^4$, где $u = x^2 + 3x$, тогда $y' = 4u^3 \cdot u' = 4\left(x^2 + 3x\right)^3 \cdot \left(x^2 + 3x\right)' = 4\left(x^2 + 3x\right)^3 \cdot (2x + 3)$.

б) Имеем $y = \ln u$, где $u = x^3 + 4x$, тогда $y' = \frac{u'}{u} = \frac{\left(x^3 + 4x\right)'}{x^3 + 4x} = \frac{3x^2 + 4}{x^3 + 4x}$.

в) Имеем $y = u^2$, где $u = \sin x$, тогда $y = 2u \cdot u' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = $ $= 2\sin x \cos x = \sin 2x$.

Производная y' сама является функцией, которая также может иметь производную. *Производной* $n-го$ *порядка* называется производная от производной $(n-1)-го$ порядка.

Пример 8.4. Найти производную второго порядка от функции $y = x\sin x$.

Решение. Дифференцируя данную функцию, получим $y' = \sin x + x\cos x$. Дифференцируя производную y', найдем вторую производную $y'' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$.

9. Дифференциал функции.

Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной $dy = f'(x)\Delta x$.

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной. Поэтому формулу для дифференцирования функции можно записать в виде $dy = f'(x)dx$, откуда $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Пример 9.1. Найти дифференциал функции $y = \sin\left(x + x^3\right)$.

Решение. Дифференциал функции $dy = \left(\sin\left(x + x^3\right)\right)' dx =$

$= \cos\left(x + x^3\right)\cdot\left(x + x^3\right)' dx = \left(1 + 3x^2\right)\cos\left(x + x^3\right)dx$.

Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) d^2y функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, т.е. $d^2y = d(dy)$.

Аналогичного дифференциалом $n-го$ порядка (или $n-м$ дифференциалом) $d^n y$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)-го$ порядка этой функции, т.е. $d^n y = d\left(d^{n-1}y\right)$.

Итак, по определению $d^2y = d(dy)$. Найдем выражение второго дифференциала функции $y = f(x)$. Так как $dx = \Delta x$ не зависит от x, то при дифференцировании считаем dx постоянным: $d^2y = d\left(f'(x)dx\right) = \left(f'(x)dx\right)' dx =$ $= f''(x)dxdx = f''(x)dx^2$, т.е. $d^2y = f''(x)dx^2$. Аналогично, выражение $n-го$ дифференциала функции имеет вид $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Пример 9.2. Найти d^2y, если $y = e^{x^2+3}$.

Решение. Так как $y' = 2xe^{x^2+3}$, $y'' = 2e^{x^2+3} + 4x^2e^{x^2+3}$, то $d^2y = \left(2e^{x^2+3} + 4x^2e^{x^2+3}\right)dx^2$.

10. Исследование функций.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке X, если для любых x_1, $x_2 \in X$, $x_2 > x_1$ верно неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ $\left(f(x_2) < f(x_1)\right)$.

Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка X, то она возрастает на этом промежутке.

Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка X, то она убывает на этом промежутке.

Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$.

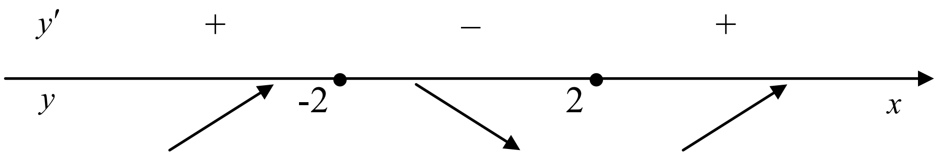
Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции. Максимумы и минимумы функции называются экстремумами функции.

Для того чтобы дифференцируемая функция $y = f(x)$ имела в точке x_0 экстремум, необходимо, чтобы $y'(x_0) = 0$ и достаточно, чтобы при переходе через точку x_0 происходила смена знака первой производной.

Пример 10.1. Найти экстремумы функции $y = x^3 - 12x - 1$.

Решение.

1. Дифференцируя данную функцию, находим $y' = 3x^2 - 12$.
2. Приравнивая производную к нулю, находим критические точки функции $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет – $f'(x)$ определена на всей числовой оси.
3. Нанесем критические точки на числовую прямую и определим знак производной на каждом интервале.



Согласно достаточному условию точка $x = -2$ является точкой максимума, точка $x = 2$ – точкой минимума.

4. Находим $y_{\min} = y(2) = -17$, $y_{\max} = y(-2) = 15$.

График функции $y = f(x)$ называется выпуклым (вогнутым) на интервале (a, b), если он расположен ниже (выше) любой касательной к графику функции на этом интервале.

Достаточное условие существования точки перегиба. Пусть график функции определяется уравнением $y = f(x)$. Если $f''(x_0) = 0$ или не существует, и при переходе через значение $x = x_0$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $x = x_0$ есть точка перегиба.

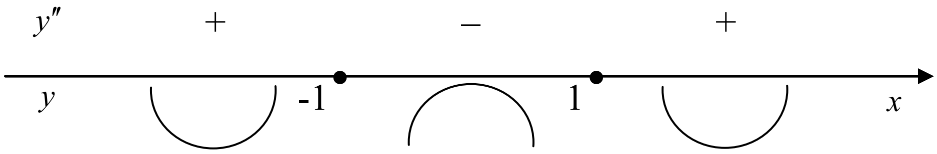
Пример 10.2. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба график функции $y = x^4 - 6x^2 + 1$

Решение.

1. Дифференцируя данную функцию дважды, находим $y' = 4x^3 - 12x$, $y'' = 12x^2 - 12x$.

2. Приравнивая вторую производную к нулю, и находим точки, в которых вторая производная равна нулю $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

3. Нанесем точки на числовую прямую и определим знак второй производной на каждом интервале.



4. Функция выпукла вниз на интервалах $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$, вверх – $(-1;1)$. Точки $x = -1$, $x = 1$ являются точками перегиба.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на графике функции, стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат вдоль графика.

Для нахождения асимптот пользуются следующими положениями:

1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, возможно, саму эту точку) и хотя бы один из пределов функции $x \to x_0 - 0$ (слева) или при $x \to x_0 + 0$ (справа) равен бесконечности, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$. Тогда прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

2. Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существует конечный предел функции $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$. Тогда прямая $y = b$ есть горизонтальная асимптота графика функции $y = f(x)$.

3. Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существует конечные пределы $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right] = b$. Тогда прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Пример. 10.3. Найти вертикальные асимптоты графика функции $y=\dfrac{3}{x+1}$.

Решение. Точка $x=-1$ – точка разрыва II рода. Так как $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{3}{x+1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{3}{x+1}=+\infty$, то прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

Пример 10.4. Найти горизонтальные асимптоты графика функции $y=\dfrac{3x^2-1}{x^2+1}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=3$, то прямая $y=3$ является горизонтальной асимптотой.

Пример 10.5. Найти наклонные асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2+4}{x+1}$.

Решение. Так как $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4}{x^2+x}=1$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x+1}-x\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4-x^2-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-x}{x+1}=-1$, то прямая $y=x-1$ является наклонной асимптотой.

При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность.
3. Найти вертикальные асимптоты.
4. Исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные или наклонные асимптоты.
5. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.
6. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.
7. Найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Пример 10.6. Исследовать функцию $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$ и построить ее график.

Решение.

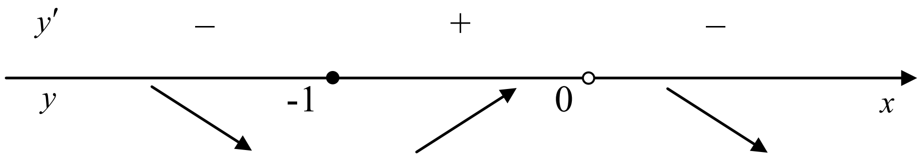
1. Область определения функции: $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
2. Функция общего вида, так как $y(-x)=\dfrac{1-2(-x)^3}{(-x)^2}=\dfrac{1+2x^3}{x^2}$.

3. Вертикальные асимптоты могут пересекать ось абсцисс в точке $x=0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1-2x^3}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-2x^3}{x^2}=+\infty$, то прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой.

4. Поведение функции в бесконечности. Вычислим: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^3}-2}{\frac{1}{x}}=-\infty$. Функция горизонтальных асимптот не имеет.

Так как $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}-2\right)=-2$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x^3}{x^2}+2x\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^3+2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, то прямая $y=-2x$ является наклонной асимптотой.

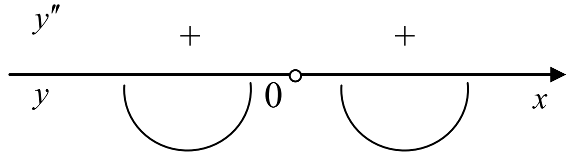
5. Найдем экстремумы и интервалы монотонности функции. Дифференцируя данную функцию, находим $y'=\left(\dfrac{1-2x^3}{x^2}\right)'=$ $=\dfrac{-6x^2\cdot x^2-2x\cdot\left(1-2x^3\right)}{x^4}=\dfrac{-6x^4-2x+4x^4}{x^4}=-\dfrac{2x^3+2}{x^3}$. Приравнивая производную к нулю, находим критические точки функции $x=-1$. В точке $x=0$ производная не существует. Определим знак производной на каждом интервале.



Функция возрастает на интервале $(-1;0)$, убывает – $(-\infty;-1)$, $(0;+\infty)$. Точка $x=-1$ является точкой минимума $y_{\min}=y(-1)=3$.

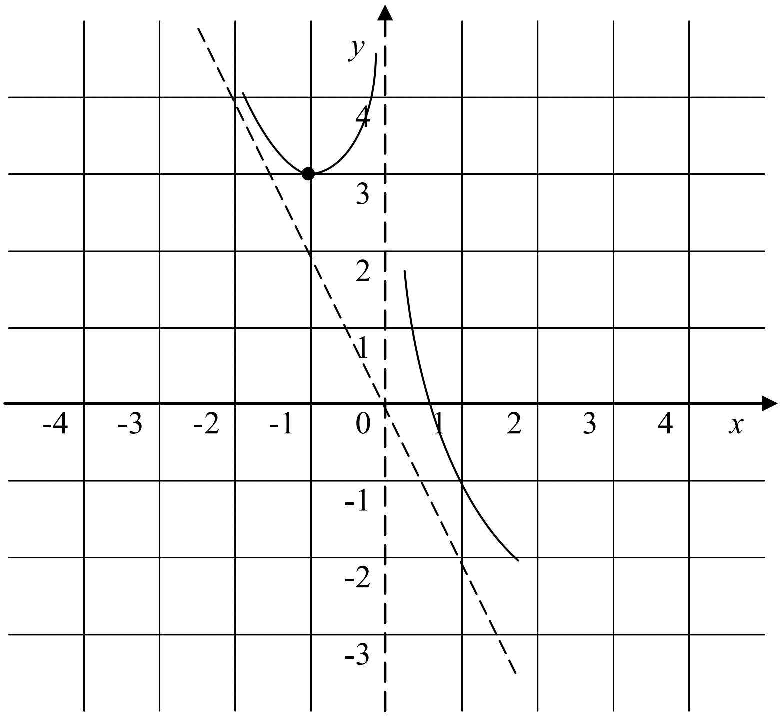
6. Определим интервалы выпуклости функции и точки перегиба.

Найдем производную второго порядка $y''=\left(-\dfrac{2x^3+2}{x^3}\right)'=$ $=-\dfrac{6x^2\cdot x^3-3x^2\cdot\left(2x^3+2\right)}{x^6}=-\dfrac{6x^3-3\left(2x^3+2\right)}{x^4}=-\dfrac{6x^3-6x^3-6}{x^4}=\dfrac{6}{x^4}$. Приравнивая вторую производную к нулю, и находим точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует $x\neq 0$. Знаки производной второго порядка указаны на рисунке.



Функция выпукла вниз на интервалах $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$. Точек перегиба нет.

7. Точка $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2};0\right)$ является точкой пересечения функции с осью абсцисс.



Рекомендации по решению типовых задач по контрольной работе № 3

11. Неопределенный интеграл.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функцией для функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$, если в каждой точке этого промежутка $F'(x)=f(x)$.

Например, $F(x)=\frac{x^4}{4}$ является первообразной для функции $f(x)=x^3$, так как $\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3$.

Если для данной функции $f(x)$ найдена какая-нибудь одна первообразная $F(x)$, то любая другая первообразная для $f(x)$ имеет вид $F(x)+C$, где $C=const$.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Знак $\int$ – называется знаком интеграла; $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Если $F(x)$ является какой-либо первообразной для функции $f(x)$, то неопределенный интеграл равен $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $C=const$.

Таблица основных интегралов

$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $n\neq -1$	$\int \sin x dx=-\cos x+C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
$\int \frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int \cos x dx=\sin x+C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert+C$
$\int e^x dx=e^x+C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$.

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$, где k – некоторое число.

4. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

Пример 11.1. Найти интегралы: а) $\int\left(x^2-5\right)^2 dx$, б) $\int\frac{1-6x+4x^2}{x^2}dx$, в) $\int\frac{5-4\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$.

Решение.

а) $\int\left(x^2-5\right)^2 dx=\int\left(x^4-10x^2+25\right)dx=\int x^4dx-10\int x^2dx+25\int dx=\frac{1}{5}x^5-\frac{10}{3}x^3+$ $+25x+C$.

б) $\int\frac{1-6x+4x^2}{x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}+4\right)dx=\int x^{-2}dx-6\int\frac{dx}{x}+4\int dx=-\frac{1}{x}-6\ln|x|+$ $+4x+C$.

в) $\int\frac{5-4\cos^3 x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{5}{\cos^2 x}-4\cos x\right)dx=5\int\frac{dx}{\cos^2 x}-4\int\cos x=5tgx-4\sin x+C$.

Если $\int f(x)dx$ не может быть вычислен непосредственно по формулам таблицы основных неопределенных интегралов, то во многих случаях введение новой переменной t позволяет преобразовать подынтегральное выражение $f(x)dx$ к такому виду, интегрирование которого можно провести либо по таблице, либо известным приемом.

Независимую переменную x заменим по формуле $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – дифференцируемая функция. Затем определим $dx=\varphi'(t)dt$ и $\int f(x)dx=\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt$.

Полученная формула носит название формулы замены переменной (подстановки) в неопределенном интеграле.

Пример 11.2. Найти интегралы: а) $\int\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$, б) $\int\frac{x^3dx}{\left(x^4+1\right)^3}$, в) $\int\frac{e^{4x}}{5+2e^{4x}}dx$.

Решение.

а) Пусть $t=1+3\cos x$, $dt=-3\sin xdx$, $\sin xdx=-\frac{1}{3}dt$, тогда $\int\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx=$ $=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{3}\ln|t|+C=-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$.

б) Пусть $t=x^4+1$, $dt=4x^3dx$, $x^3dx=\frac{1}{4}dt$, тогда $\int\frac{x^3dx}{\left(x^4+1\right)^3}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^3}=$
$=\frac{1}{4}\int t^{-3}dt=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-3+1}}{-3+1}+C==\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{8t^2}+C=-\frac{1}{8\left(x^4+1\right)^2}+C$.

в) Пусть $t=5+2e^{4x}$, $dt=8e^{4x}dx$, $e^{4x}dx=\frac{1}{8}dt$, тогда $\int\frac{e^{4x}}{5+2e^{4x}}dx=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t}=$
$=\frac{1}{8}\ln|t|+C=\frac{1}{8}\ln\left|5+2e^{4x}\right|+C$.

Интегрирование по частям называется нахождение интеграла по формуле $\int udv=uv-\int vdu$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int udv$ сводиться к отысканию другого интеграла $\int vdu$, ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще или может быть найден.

Пример 11.3. Найти интегралы: а) $\int x^3\ln xdx$, б) $\int x^2\sin xdx$

Решение.

а) Пусть $u=\ln x$, $du=\frac{dx}{x}$, $dv=x^3dx$, $v=\frac{x^4}{4}$, тогда $\int x^3\ln xdx=$
$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int\frac{x^4}{x}dx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C$.

б) Пусть $u=x^2$, $du=2xdx$, $dv=\sin xdx$, $v=-\cos x$, тогда $A=\int x^2\sin xdx=$
$=-x^2\cos x+2\int x\cos xdx$. Пусть $u=x$, $du=dx$, $dv=\cos xdx$, $v=\sin x$, тогда $A=-x^2\cos x+2\left(x\sin x-\int\sin xdx\right)=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$. Итак, $\int x^2\sin xdx=$
$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$.

12. Определенный интеграл.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n}f\left(k_i\right)\Delta x_i$ при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю, т.е. $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f\left(k_i\right)\Delta x_i$.

Основные свойства определенного интеграла.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е. $\int_a^b\alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$.

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций, т.е. $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный, т.е. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю, т.е. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

5. Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей, т.е. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, используют формулу Ньютона–Лейбница.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a;b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Нахождение определенных интегралов с использованием формулу Ньютона–Лейбница осуществляется в два шага: на первом шаге, используя технику нахождения неопределенного интеграла, находят некоторую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$, на втором применяется собственно формула Ньютона–Лейбница – находится приращение первообразной, равное искомому интегралу. В связи с этим, введем обозначение для приращения первообразной, которое удобно использовать при записи решений $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Пример 12.1. Вычислить $\int_0^3 x^2 dx$.

Решение. $\int_0^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$

При вычислении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ способом замены переменной данный интеграл с помощью подстановки $x = \varphi(t)$ преобразуется в другой определенный интеграл с новой переменной интегрирования t, причем старые пределы интегрирования $x_1 = a$ и $x_2 = b$ заменяются новыми пределами $t_1 = \psi_1(a)$ и $t_2 = \psi_2(b)$: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Здесь предполагается, что функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1;t_2]$, а функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[t_1;t_2]$.

Пример 12.2. Найти интегралы: а) $\int\limits_1^e \frac{\ln^5 x}{x}dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{x}{x^2+9}dx$.

Решение.

а) Пусть $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, тогда $\int\limits_1^e \frac{\ln^5 x}{x}dx = \int\limits_0^1 t^5 dt =$ $= \left.\frac{t^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1^6}{6} - \frac{0^6}{6} = \frac{1}{6}$.

б) Пусть $t = x^2 + 9$, $dt = 2x\,dx$, $t_1 = 9$, $t_2 = 10$, тогда $\int\limits_{-1}^1 \frac{x}{x^2+9}dx =$ $= \frac{1}{2}\int\limits_9^{10} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_9^{10} = \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 9) = \frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}$.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$. Тогда $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$, где $uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - \; -u(a)v(a)$.

Формула $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$ называется формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.

Пример 12.3. Вычислить: а) $\int\limits_1^e x\ln x dx$, б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$.

Решение.

а) Пусть $u = x$, $du = dx$, $dv = e^{2x}dx$, $v = \frac{e^{2x}}{2}$, тогда $\int\limits_0^1 xe^{2x}dx = x\cdot\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{e^{2x}}{2}dx = \left.\frac{xe^{2x}}{2}\right|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{2x}dx = \left.\frac{xe^{2x}}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{e^{2x}}{4}\right|_0^1 = \left(\frac{1\cdot e^{2\cdot 1}}{2} - \frac{0\cdot e^{2\cdot 0}}{2}\right) -$ $-\left(\frac{e^{2\cdot 1}}{4} - \frac{e^{2\cdot 0}}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

б) Пусть $u=x^2$, $du=2xdx$, $dv=\cos xdx$, $v=\sin x$, тогда $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos xdx = x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin xdx = x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$. Пусть $u=x$, $dx=dx$, $dv=\sin xdx$, $v=-\cos x$, тогда $A=x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\left(-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx\right)=$

$$=x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\left(-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx\right) = x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\left(-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+2x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\sin\frac{\pi}{2} - 0^2\cdot\sin 0\right) + \left(2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2} - 2\cdot 0\cdot\cos 0\right) -$$

$$-\left(2\cdot\sin\frac{\pi}{2} - 2\cdot 0\right) = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

13. Вычисление площадей плоских фигур.

1. Пусть функция $y=f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда, по геометрическому смыслу определенного интеграла, площадь криволинейной трапеции, расположенной «выше» оси абсцисс $(f(x)\ge 0)$ на $[a;b]$ (см. рис. 13.1), равна соответствующему определенному интегралу: $S=\int\limits_a^b f(x)dx$.

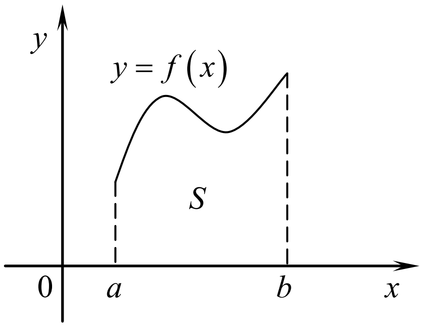


Рис. 13.1

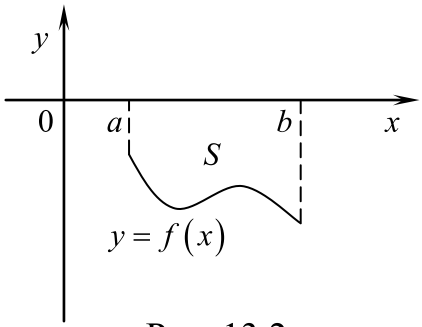


Рис. 13.2

2. Пусть функция $y=f(x)$ неположительна и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда площадь криволинейной трапеции, расположенной «ниже» оси абсцисс $(f(x)\le 0)$ на $[a;b]$ (см. рис. 13.2) может быть найдена по формуле: $S=-\int\limits_a^b f(x)dx$.

3. Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$ общего вида. Предположим, что исходный отрезок можно разбить точками на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция $y=f(x)$ будет знакопостоянна или равна нулю. Рассмотрим случай функции, изображенной на рис. 13.3. Площадь криволинейной трапеции равна алгебраической сумме соответствующих определенных интегралов: $S=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx$.

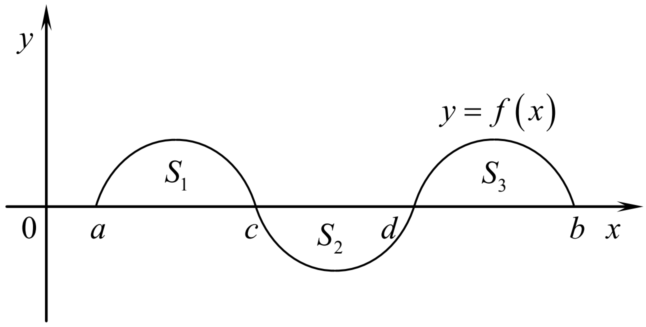


Рис. 13.3

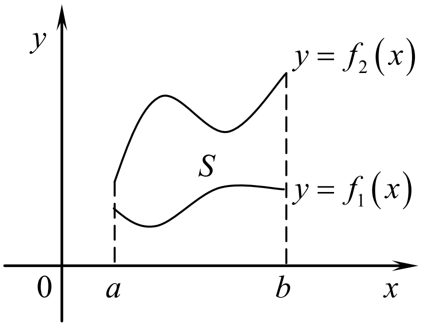


Рис. 13.4

4. Пусть на отрезке $[a;b]$ заданы непрерывные функции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, такие, что $f_2(x)\ge f_1(x)$, рис. 13.4. Тогда площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y=f_2(x)$ и $y=f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, вычисляется по формуле: $S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$.

Пример 13.1. Вычислить площади фигуры, ограниченных следующими линиями:

1. параболой $y=x^2$, прямыми $x=0$, $x=3$ и осью абсцисс;
2. гиперболой $y=\dfrac{1}{x}$, прямыми $x=-6$, $x=-2$ и осью абсцисс;
3. параболой $y=x^2+4x$ и прямой $x-y+4=0$.

Решение.

1. Из чертежа (см. рис. 13.5) видно, что искомая площадь кривленной трапеции расположенной «выше» оси абсцисс на отрезке $[0;3]$, равна $S=\int_0^3 x^2dx=\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^3=\dfrac{3^3}{3}-\dfrac{0^3}{3}=9$ кв. ед.

2. Искомая площадь кривленной трапеции, рис. 13.6, расположенной «ниже» оси абсцисс на отрезке $[-6;-2]$, равна $S=-\int_{-6}^{-2}\dfrac{dx}{x}=$ $=-\ln|x|\Big|_{-6}^{-2}=-\ln 2+\ln 6=\ln 3$ кв. ед.

3. Найдем координаты точек пересечения параболы $y=x^2+4x$ и прямой $x-y+4=0$, решив систему этих уравнений: $(-4;0)$, $(1;5)$.

Воспользуемся формулой $S=\int\limits_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$, полагая $f_2(x)=x+4$, $f_1(x)=x^2+4x$. Абсциссы точек $(-4;0)$, $(1;5)$ пересечения наших линий зададут пределы интегрирования: $S=\int\limits_{-4}^{1}\left[x+4-\left(x^2+4x\right)\right]dx=\int\limits_{-4}^{1}\left(4-3x-x^2\right)dx=$

$=\left(4x-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-4}^{1}=\frac{125}{6}$ кв. ед.

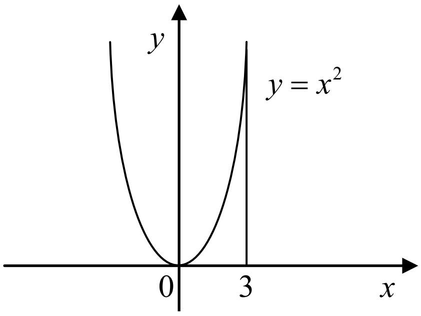


Рис. 13.5

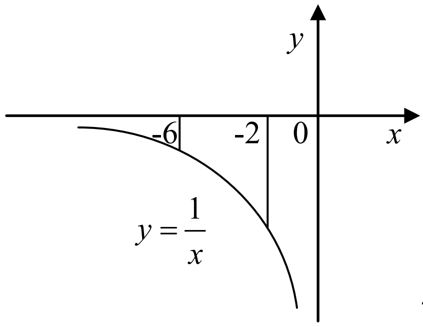


Рис. 13.6

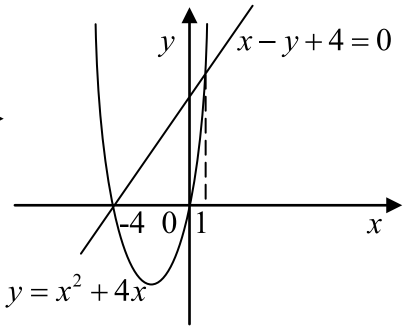


Рис. 13.7

14. Вычисление объемов.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$ находиться по формуле $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Пример 14.2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции ограниченной непрерывной кривой $y=\sqrt{x}$ и отрезком $2\le x\le 3$.

Решение. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции ограниченной непрерывной кривой $y=\sqrt{x}$ и отрезком $2\le x\le 3$ равен $V=\pi\int\limits_2^3 xdx=\frac{\pi x^2}{2}\Big|_2^3=\frac{\pi\cdot 3^2}{2}-\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=\frac{5\pi}{2}$ куб. ед.

15. Несобственные интегралы.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна, но не ограничена на полуинтервале $[a;b)$.

Несобственным интегралом $\int\limits_a^b f(x)dx$ от функции $y=f(x)$ на полуинтервале $[a;b)$ называется предел $\lim\limits_{\delta\to 0+}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$, где $\delta>0$, т.е. $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$.

Если предел $\lim\limits_{\delta\to 0+}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла от функции $y=f(x)$ непрерывной, но неограниченной на $(a;b]$: $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{a+\delta}^b f(x)dx$.

Пример 15.1. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение. При $x=0$ функция $y=\frac{1}{x^2}$ терпит бесконечный разрыв: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{0+\delta}^1 \frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{0+\delta}^1 x^{-2}dx=-\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{0+\delta}^1=-\left(1-\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\right)=\infty$, интеграл расходиться.

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на произвольном отрезке $[a;t]$, т.е. функция $\Phi(t)=\int\limits_a^t f(x)dx$ определена для произвольного $t\ge a$.

Несобственным интегралом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ от функции $f(x)$ на полуинтервале $[a;+\infty)$ называется предел функции $\Phi(t)$ при t, стремящемся к $+\infty$, т.е. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_a^t f(x)dx$.

Если предел $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_a^t f(x)dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае расходящимся

Аналогично определяется несобственный интеграл на полуинтервале $(-\infty;b]$: $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to-\infty}\int\limits_t^b f(x)dx$. Определение сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ аналогично приведенному выше.

Пример 15.2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.

Решение. Найдем $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_1^t\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_1^t x^{-2}dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_1^t=$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)=1$, т.е. несобственный интеграл сходится.

Рекомендации по решению типовых задач по контрольной работе № 4

16. Числовые ряды

Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел a_1, a_2, …, a_n, … соединенных знаком сложения: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Числа a_1, a_2, …, a_n, … называются элементами ряда, а элемент a_n – общим или $n-м$ элементом ряда.

Рассмотрим суммы конечного числа элементов ряда: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, …, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$. Сумма n первых элементов ряда называется $n-й$ частичной суммой ряда.

Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Число S называется суммой ряда, тогда можно записать $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n-1}^{\infty} a_n$. Если конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Пример 16.1. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$ на сходимость.

Решение. Сумма n первых элементов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ равна $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) = 1 - \frac{1}{n-1}$.

Найдем предел последовательности частичных сумм $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) = 1$. Так как предел последовательности частичных сумм существует, то по определению о сходимости ряда исследуемый ряд сходится.

Установить сходимость (расходимость) ряда путем определения $n-й$ частичной суммы и вычисления предела последовательности частичных сумм возможно далеко не всегда из-за принципиальных трудностей при нахождении S_n. Проще это можно сделать на основании признаков сходимости.

Теорема (необходимый признак сходимости). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел его общего элемента a_n при $n \to \infty$ равен нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие. Если предел общего элемента a_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при $n \to \infty$ не равен нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример 16.2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6n-1}$.

Решение. Общий элемент ряда равен $a_n = \frac{n}{6n-1}$. Найдем предел общего элемента ряда: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{6n-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6-\frac{1}{n}} = \frac{1}{6} \neq 0$. Необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, ряд расходится.

Необходимый признак сходимости не дает возможности судить о том, сходиться ли данный ряд или нет. Сходимость и расходимость ряда во многих случаях можно установить с помощью достаточных признаков.

Рассмотрим некоторые из них для знакоположительных рядов, т.е. рядов с неотрицательными членами.

Теорема (Признак Даламбера). Если для ряда с положительными элементами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел отношения $(n+1)-\text{\textit{го}}$ элемента к $n-\text{\textit{му}}$ элементу $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$, то при $d < 1$ ряд сходится, при $d > 1$ ряд расходится, при $d = 1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Пример 16.3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Решение. Так как $a_n = \frac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$, то $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \frac{(n+1)\cdot 2^n}{2\cdot 2^n \cdot n} = \frac{n+1}{2n}$. Предел отношения $(n+1)-\text{\textit{го}}$ элемента к $n-\text{\textit{му}}$ элементу равен $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$, следовательно, ряд сходится по признаку Даламбера.

Теорема (Признак Коши). Если для ряда с положительными элементами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$, то при $k < 1$ ряд сходится, при $k > 1$ ряд расходится, при $k = 1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Пример 16.4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+8n}{1+4n^2}\right)^n$.

Решение. Исследуем данный ряд по признаку Коши. Так как $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+8n}{1+4n^2}=\frac{1}{4}<1$, то исследуемый ряд сходится.

Теорема (предельный признак сравнения). Если для рядов $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ с положительными элементами существует конечный предел отношения их общих элементов $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0$, то ряды одновременно сходятся, либо расходятся.

Признак сравнения дает возможность установить сходимость или расходимость некоторых числовых рядов путем сравнениях их с другими рядами, сходимость или расходимость которых известна заранее. Как правило, в качестве эталонов при применении данного признака используются следующие ряды:

1. геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ – сходится при $|q|<1$, расходиться при $|q|\geq 1$;
2. гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится;
3. обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ – сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha<1$.

Пример 16.5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n+5}$.

Решение. Сравним ряд с обобщенно гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, у которого $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{2n+5}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+5}=\frac{1}{2}\neq 0$, то исследуемый ряд расходится, так как расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Рассмотрим важный класс рядов, называемых знакочередующимися. *Знакочередующимся рядом* называется ряд вида $a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots=$ $=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, где $a_n>0$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

Для исследования сходимости знакочередующихся рядов применяется признак Лейбница.

Теорема (признак Лейбница). Если элементы знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$ и предел его общего элемента при $n \to \infty$ равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится, а его сумма не превосходит первого элемента: $S \le a_1$.

Пример 16.6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1}$.

Решение. Так как элементы знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $\frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{3}{10} > ... > \frac{n}{n^2+1} > ...$, и предел общего элемента равен $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$, то по признаку Лейбница ряд сходится.

17. Степенные ряды.

Ряд вида $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_2 x^3 + ... + a_n x^n + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется *степенным рядом*. Числа a_0, a_1, a_2, …, a_n, … называются коэффициентами степенного ряда.

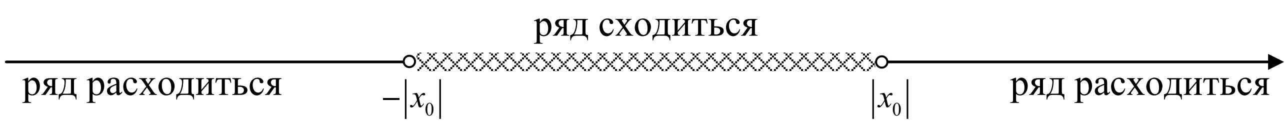
Придавая x различные числовые значения, будем получать различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися. Множество тех значений x, при которых ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, называется областью его сходимости.

Структура области сходимости степенного ряда устанавливается с помощью теоремы Абеля.

Теорема. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходиться при значении $x = x_0 \ne 0$, то он сходиться и, притом абсолютно при всех значениях x таких, что $|x| < |x_0|$.

Следствие. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходиться при значении $x = x_1$, то он расходиться при всех значениях x таких, что $|x| > |x_1|$.

Из теоремы Абеля следует, что если $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости ряда, то интервал $\left(-|x_0|;|x_0|\right)$ весь состоит из точек сходимости данного ряда, при всех значениях x вне этого интервала ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходиться.



Интервал $\left(-|x_0|;|x_0|\right)$ называют интервалом сходимости степенного рада. Положив $|x_0| = R$ интервал сходимости можно записать в виде $(-R;R)$. Число R называют радиусом сходимости степенного ряда, т.е. $R > 0$ – это такое число, что при всех x, для которых $|x| < R$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно сходиться, а при $|x| > R$ ряд расходиться.

Отметим, что на концах интервала сходимости (т.е. при $x = R$ и при $x = -R$) сходимость ряда проверятся в каждом случае отдельно.

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Радиус сходимости данного ряда можно определить по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Отметим, что если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на всей числовой прямой, то $R = \infty$, если ряд сходится только при $x = 0$, то $R = 0$.

Пример 17.1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1} \cdot x^n$.

Решение. Так как $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2n+3}$, то радиус сходимости равен $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2n+3}{2n+1}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right| = 1$. Интервал сходимости ряда $(-1;1)$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$ данный степенной ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Исследуем знакочередующийся ряд по признаку Лейбница. Так как элементы знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $\dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{5} > \dfrac{1}{7} > \ldots > \dfrac{1}{2n+1} > \ldots$, и предел общего элемента $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1} = 0$, следовательно, ряд сходится.

При $x=1$ данный степенной ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, у которого $b_n=\frac{1}{n}$. Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\neq 0$, то исследуемый ряд расходится, так как расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Итак, область сходимости ряда $[-1;1)$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$. Радиус сходимости ряда, заданного по степеням $(x-c)$, находиться по формуле $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, интервал сходимости определяется из условия $-R<x-c<R$ или $c-R<x<c+R$.

Пример 17.2. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}\cdot(x-2)^n$.

Решение. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}\cdot(x-2)^n$ равен $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n(n+1)^3}{2^{n+1}n^3}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2}$. Интервал сходимости ряда есть $\left(-\frac{1}{2}+2;\ \frac{1}{2}+2\right)$ или $\left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$. Выясним поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=\frac{3}{2}$ данный степенной ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Исследуем знакочередующийся ряд по признаку Лейбница. Элементы знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $1>\frac{1}{4}>\frac{1}{9}>\ldots>\frac{1}{n^2}>\ldots$, и предел общего элемента $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$, следовательно, ряд сходится.

При $x=\frac{5}{2}$ данный степенной ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ является обобщенным гармоническим рядом, следовательно, он сходится

Итак, область сходимости ряда $\left[\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right]$.

18. Ряд Маклорена.

Приведем таблицу, содержащую разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \qquad x \in (-1; 1],$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

$$x \in \begin{cases} [-1;1], & \textit{если } \alpha \ge 0 \\ (-1;1], & \textit{если } -1 < \alpha < 0. \\ (-1;1), & \textit{если } \alpha \le -1 \end{cases}$$

Пример 18.1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^{-x^2}$.

Решение. Так как $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, то заменяя x на $(-x^2)$, получим $e^{-x^2} = 1 + \frac{-x^2}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \ldots = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots$. Область сходимости ряда $(-\infty; \infty)$.

19. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, искомую функцию и ее производные (или дифференциалы) этой функции.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде $G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, где G – некоторая функция от $n+2$ переменных, $n \ge 1$, при этом порядок n старшей производной, входящей в запись уравнения, называется порядком дифференциального уравнения.

Решением дифференциального уравнения $G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения $G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ $n-$*го* порядка называется такое его решение $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, которое является функцией переменной x и n произвольных независимых постоянных C_1, C_2, …, C_n.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего решения при некоторых конкретных числовых значениях постоянных C_1, C_2, …, C_n.

Дифференциальное уравнений $y' = f(x;y)$ называется неполным, если функция f явно зависит либо только от x, либо только от y.

1. Рассмотрим решение уравнения $y' = f(x)$. Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то перепишем уравнение в виде $dy = f(x)dx$, откуда его решение $y = \int f(x)dx$.

2. Рассмотрим решение уравнения $y' = f(y)$. Обе части уравнения разделим $f(y) \neq 0$, учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, получим $\dfrac{dy}{f(y)} = dx$, откуда его решение $x = \int \dfrac{dy}{f(y)}$.

Пример 19.1. Решить дифференциальные уравнения а) $y' = e^x$, б) $y' = \sin^2 y$.

Решение.

а) Дифференциальное уравнение $y' = e^x$ является неполным дифференциальным уравнением первого порядка. Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, тогда $dy = e^x dx$. Проинтегрировав обе части уравнения $\int dy = \int e^x dx$, получим общее решение $y = e^x + C$.

б) Разделив обе части уравнения $y' = \sin^2 y$ на $\sin^2 y \neq 0$, получим $\dfrac{y'}{\sin^2 y} = 1$ или $\dfrac{dy}{\sin^2 y} = dx$. Проинтегрировав обе части уравнения $\int \dfrac{dy}{\sin^2 y} = \int dx$, получим $x = -ctgy + C$.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнение с разделяющимися переменными, если оно может быть представлено в виде $y' = f_1(x) f_2(y)$, где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ – непрерывные функции.

Для решения данного уравнения $y' = f_1(x) f_2(y)$ преобразуем его к виду, в котором дифференциал функции переменной x окажутся в одной части равенства, а переменная y – в другой, т.е. $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. Проинтегрировав обе части уравнения, получим его решение $\int \dfrac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$.

Пример 19.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = x^2 y$.

Решение. Дифференциальное уравнение $y' = x^2 y$ является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Разделив обе части уравнения на $y \neq 0$, приходим к равенству $\frac{y'}{y} = x^2$ или $\frac{dy}{y} = x^2 dx$. Проинтегрировав обе части уравнения $\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$, получим $\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C$ или $y = Ce^{\frac{x^3}{3}}$.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если оно имеет вид $y' + p(x)y = f(x)$, где $p(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции.

Решение данного уравнения будем искать в виде $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Так как $y' = u'v + uv'$, то $u'v + uv' + p(x)uv = f(x)$ или $u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)$.

Найдем какое-либо частное решение $v = v(x)$ уравнения $v' + p(x)v = 0$: $\frac{dv}{v} = -p(x)dx$, $\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx$, $\ln|v| = -\int p(x)dx$, $v = e^{-\int p(x)dx}$.

Найдем решение уравнения $u'v = f(x)$, где $v = e^{-\int p(x)dx}$: $u'e^{-\int p(x)dx} = f(x)$, $du = \left(f(x)e^{\int p(x)dx}\right)dx$, $u = \int\left(f(x)e^{\int p(x)dx}\right)dx$.

Учитывая, что $y = u \cdot v$, получим общее решение уравнения $y' + p(x)y = f(x)$ в виде $y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \int\left(f(x)e^{\int p(x)dx}\right)dx$.

Пример 19.3. Решить дифференциальное уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2$.

Решение. Дифференциальное уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2$ является линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Пусть $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, тогда уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2$ примет вид $u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x^2$ или $u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x^2$.

Положим $v' + \frac{v}{x} = 0$ или $v' = -\frac{v}{x}$. Дифференциальное уравнение $v' = -\frac{v}{x}$ является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим обе части данного уравнения на $v \neq 0$, получим $\frac{v'}{v} = -\frac{1}{x}$ или $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав обе части уравнения $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$, получим $\ln|v| = -\ln|x| + C$. Частное решение при $C = 0$ будет иметь вид $\ln|v| = \ln\frac{1}{|x|}$, откуда $v = \frac{1}{x}$.

При $v = \frac{1}{x}$ уравнение $u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x^2$ примет вид $\frac{u'}{x} = x^2$ или $u' = x^3$. Учитывая, что $u' = \frac{du}{dx}$, тогда $\frac{du}{dx} = x^3$ или $du = x^3 dx$. Проинтегрировав обе части уравнения, получим $\int du = \int x^3 dx$, откуда $u = \frac{x^4}{4} + C$.

Так как $y = uv$, $v = \frac{1}{x}$, $u = \frac{x^4}{4} + C$, то окончательно имеем $y = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$.

20. Дифференциальные уравнения второго порядка.

Уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$ называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, где p и q некоторые действительные числа.

Для нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$ необходимо составить характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$. При решении характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ возможны три случая: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$. Рассмотрим эти случаи.

1. Если $D > 0$, то характеристическое уравнение имеет два различных корня k_1 и k_2, тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

2. Если $D = 0$, то характеристическое уравнение имеет один корень k (кратности 2), тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$.

3. Если $D < 0$, то характеристическое уравнение имеет два комплексных корня $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x\right)$.

Пример 20.1. Найти общее решение дифференциальных уравнений а) $y'' + 3y' = 0$; б) $y'' + y' + 2y = 0$.

Решение.

а) Составим характеристическое уравнение $k^2 + 3k = 0$. Решая соответствующее уравнение, находим $k_1 = 0$, $k_2 = -3$. Общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$.

б) Составим характеристическое уравнение $k^2 + k + 2 = 0$. Решая соответствующее уравнение, находим $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$. Общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$.

Уравнение вида $y'' + py' + qy = f(x)$ называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка, где p и q – некоторые действительные числа, $f(x)$ – некоторая заданная функция.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка равно сумме частного решения u неоднородного уравнения и общего решения $\hat{y}$ соответствующего ему однородного уравнения, т.е. $y = u + \hat{y}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть правая часть уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ является многочленом степени m, т.е. имеет вид $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m$, где a_0, a_1, …, a_m – действительные числа и $a_m \neq 0$. Тогда частное решение следует искать в виде $u(x) = (A + Bx + Cx^2 + ...)x^s$, где $s = 0$, если $q \neq 0$, $s = 1$, если $q = 0$ и $p \neq 0$, $s = 2$, если $p = q = 0$.

Пример 20.2. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' = 4x - 6$.

Решение. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 2y' = 0$. Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 2k = 0$. Корни $k_1 = -2$, $k_2 = 0$ являются корнями характеристического уравнения. Так как $k_1 \neq k_2$, то общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 2y' = 0$ имеет вид $\hat{y} = C_1e^{-2x} + C_2$.

Частное решение будем искать в виде $u = (A + Bx)x = Ax + Bx^2$. Тогда $u' = A + 2Bx$, $u'' = 2B$. Подставляя выражения u'', u' в уравнение $y'' + 2y' = 4x - 6$, приходим к равенству $2B + 2A + 4Bx = 4x - 6$, откуда $A = -4$, $B = 1$. Частное решение будет иметь вид $u = x^2 - 4x$.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y = C_1e^{-2x} + C_2 + x^2 - 4x$.

2. Пусть правая часть уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ имеет вид $f(x) = ae^{\alpha x}$, где α, a – действительные числа. Тогда частное решение следует искать в виде $u(x) = Ax^se^{\alpha x}$, где показатель степени s равен кратности значения $x = \alpha$ как корня характеристического многочлена.

Пример 20.3. Найти общее решение уравнения $y'' - y' - 2y = -6e^{-x}$.

Решение. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - y' - 2y = 0$. Составим характеристическое уравнение: $k^2 - k - 2 = 0$. Корни $k_1 = -1$, $k_2 = 2$ являются корнями характеристического уравнения. Так как $k_1 \neq k_2$, то общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - y' - 2y = 0$ имеет вид $\hat{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

Частное решение будем искать в виде $u = Axe^{-x}$. Тогда $u' = Ae^{-x} - Axe^{-x}$, $u'' = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}$. Подставляя выражения u'', u', u в уравнение $y'' - y' - 2y = -6e^{-x}$, приходим к равенству $-2Ae^{-x} + Axe^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} - 2Axe^{-x} = -6e^{-x}$, $-3Ae^{-x} = -6e^{-x}$, откуда $A = 2$. Частное решение будет иметь вид $u = 2xe^{-x}$.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + 2xe^{-x}$.

3. Пусть правая часть уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ имеет вид $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$, где a, b, β – действительные числа и $\beta \neq 0$. Тогда частное решение следует искать в виде $u(x) = x^s (A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, где $s = 1$, если одновременно выполнены условия $p = 0$, $q > 0$, $\beta = \sqrt{q}$ и $s = 0$ в остальных случаях.

Пример 20.4. Найти общее решение уравнения $y'' - 10y' = 101\sin x$.

Решение. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 10y' = 0$. Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 10k = 0$. Корни $k_1 = 0$, $k_2 = 10$ являются корнями характеристического уравнения. Так как $k_1 \neq k_2$, то общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 10y' = 0$ имеет вид $\hat{y} = C_1 + C_2 e^{10x}$.

Частное решение будем искать в виде $u = A\cos x + B\sin x$. Тогда $u' = -A\sin x + B\cos x$, $u'' = -A\cos x - B\sin x$. Подставляя выражения u'', u', u в уравнение $y'' - 10y' = 101\sin x$, приходим к равенству $-A\cos x - B\sin x + 10A\sin x - 10B\cos x = 101\sin x$. Из системы $\begin{cases} -A - 10B = 0 \\ -B + 10A = 101 \end{cases}$ найдем A и B: $\begin{cases} A = -10B \\ -B + 10A = 101 \end{cases}$, $\begin{cases} A = -10B \\ -B - 100B = 101 \end{cases}$, $\begin{cases} A = -10B \\ -101B = 101 \end{cases}$, $\begin{cases} A = 10 \\ B = -1 \end{cases}$. Частное решение будет иметь вид $u = 10\cos x - \sin x$.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y = C_1 + C_2 e^{10x} + 10\cos x - \sin x$.

Рекомендации по решению типовых задач по контрольной работе № 5

21. Определение вероятности.

Под *событием* понимается явление, которое происходит в результате осуществления какого-либо определенного комплекса условий. Осуществление этого комплекса условий будем называть *опытом* или *испытанием*.

Событие называется *достоверным*, если оно в результате опыта (испытания) обязательно произойдет.

Событие называется *невозможным*, если оно в результате опыта (испытания) заведомо не произойдет.

Событие, которое в результате опыта (испытания) может либо произойти, либо не произойти, называется *случайным* (возможным).

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появление другого события в одном и том же испытании.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

События называются *равновозможными*, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Вероятность события – это численная мера объективной возможности его появления. Вероятность невозможного события равна 0, достоверного – 1, а вероятность случайного события заключено, между нулем и единицей, т.е. $0 < P(A) < 1$.

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Пример 21.1. В коробке 10 одинаковых по размерам и весу шаров, из которых 6 красных и 4 черных. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется красным?

Решение. Обозначим за A событие, состоящее в том, что извлеченный шар красный. Данное испытание имеет 10 равновозможных элементарных исходов, из которых 6 благоприятствуют событию A. В соответствии с классическим определением вероятности получаем $P(A) = \frac{6}{10} = 0,6$.

Пример 21.2. Все натуральные числа от 1 до 15 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, число на взятой карточке окажется кратным 5?

Решение. Обозначим за A событие, состоящее в том, что число на взятой карточке кратно 5. В данном испытании имеется 15 равновозможных элементарных исходов, из которых событию A благоприятствует 3 исхода (числа 5, 10, 15). Следовательно, $P(A)=\frac{3}{15}=0,2$.

При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребляемые из них.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок определяют по формуле: $P_n=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n=n!$

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений определяют по формуле: $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний можно определяют по формуле: $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Пример 21.3. В партии из 8 деталей 5 стандартных. Найти вероятность того, что среди 4 взятых наудачу деталей 3 стандартных.

Решение. Обозначим за A – событие, состоящее в том, что среди 5 взятых деталей 3 стандартных.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 4 деталей из 8, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов: $n=C_8^4=\frac{8!}{4!\cdot 4!}=\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70$.

Число исходов, благоприятствующих событию A – «среди 4 взятых деталей 3 стандартные», 3 стандартные детали из 5 можно взять $C_5^3=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$ способами, при этом остальные (1 деталь) должны быть нестандартными; взять же 1 нестандартную деталь можно $C_3^1=3$ способами. Следовательно, число благоприятных исходов равно $m=10\cdot 3=30$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов: $P(A)=\frac{30}{70}\approx 0,43$.

22. Теорема сложения и умножения вероятностей.

Суммой двух событий A и B называется событие, состоящее в том, что в результате опыта появится хотя бы одно из них (или A, или B, или оба вместе, если это возможно). Сумма двух событий A и B обозначается $A+B$.

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие 1. Если несовместные события A_1, A_2, …, A_n образуют полную группу, то сумма вероятностей этих событий равна единице, т.е. $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1$.

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т.е. $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Пример 22.1. В урне находятся 20 черных, 15 белых и 25 красных шаров. Найти вероятность того, что вытащенный шар будет не красный.

Решение. Рассмотрим следующие события: A_1 – «вынутый шар черный»; A_2 – «вынутый шар белый»; A_3 – «вынутый шар красный».

Пусть A событие, состоящее в том, что вынутый шар не красный. Интересующее нас событие A можно представить $A=A_1+A_2$. Вероятность события A, равна $P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=\frac{20}{60}+\frac{15}{60}\approx 0,58$.

Пример 22.2. При стрельбе из пистолета вероятность попадания в «десятку» равна 0,25, в «девятку» – 0,30, в «восьмерку» – 0,15, в «семерку» – 0,12. Какова вероятность того, что стрелок, сделав один выстрел, выбьет: а) не менее 8 очков; б) не более 8 очков.

Решение. Рассмотрим следующие события: A_{10} – попадание в «десятку»; A_9 –попадание в «девятку»; A_8 – попадание в «восьмерку»; A_7 – попадание в «семерку» и т.д.

а) Поскольку нас интересует вероятность того, что стрелок выбьет не менее 8 очков, это значит, что стрелок попадет либо в «десятку», либо в «девятку», либо в «восьмерку», то есть нас интересует вероятность суммы событий A_{10}, A_9 и A_8. События эти несовместны, поэтому следует воспользоваться формулой суммы вероятностей. Итак, искомая вероятность равна $P(A)=P(A_{10}+A_9+A_8)=P(A_{10})+P(A_9)+P(A_8)=0,25+0,30+0,15=0,70$.

б) Если требуется вычислить вероятность того, что стрелок выбьет не более 8 очков, то это значит, что он попадет в «восьмерку», либо в «семерку», либо «шестерку» и т.д. Нам не известна вероятность попадания в «шестерку», «пятерку» и т.д. Поэтому можно воспользоваться первым следствием, т.е. вероятность событий, образующих полную группу, равна единице. Следовательно, искомую вероятность можно найти из соотношения $P(A)=1-\left[P(A_{10})+P(A_9)\right]=1-(0,25+0,30)=0,45$.

Теорема. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Пример 22.3. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной цели. Вероятности поражения ими цели соответственно равны 0,8 и 0,7. Какова вероятность поражения цели?

Решение. Рассмотрим следующие события: A – поражение цели первым стрелком, B – поражение цели вторым стрелком.

Применим формулу вероятности суммы двух событий, учитывая, что события A и B совместные, тогда $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=$ $=0,8+0,7-0,8\cdot 0,7=0,94$.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Два события называются *независимыми*, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого.

Теорема. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Пример 22.4. Вероятность поломки первого станка в течении смены равна 0,2, а второго – 0,13. Чему равна вероятность того, что оба станка потребуют наладки в течение смены?

Решение. Станки работают независимо друг от друга, поэтому событие (поломка первого станка) и событие (поломка второго станка) независимы. Тогда $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0,2\cdot 0,13=0,026$.

Событие B называется *зависимым* от события A, если вероятность события B зависит от того, произошло событие A или нет.

Условной вероятностью $P(B/A)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема. Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB)=P(A)P(B/A).$$

Пример 22.5. Из урны, содержащей 15 белых и 10 черных шаров, наугад дважды вынимается по одному шару. Какова вероятность того, что в первый раз появился белый шар, а во второй – черный?

Решение. Рассмотрим следующие события: A – извлечен белый шар при первом испытании; B – извлечен черный шар при втором испытании.

В задаче требуется определить вероятность сложного события, равного произведению событий A и B. Вероятность события A и условная вероятность события B соответственно равны: $P(A)=\frac{15}{25}$, $P(B/A)=\frac{10}{24}$. Поэтому искомая вероятность равна $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{15}{25}\cdot\frac{10}{24}=0,25$.

23. Формула полной вероятности и Байеса.

На практике часто возникают ситуации, когда требуется определить вероятность события, которое может произойти с одним из несовместных событий, образующих полную группу.

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий H_1, H_2, …, H_n образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A, т.е.

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+...+P(H_n)P(A/H_n).$$

Пример 23.1. На трех станках различной марки изготавливается определенная деталь. Производительность первого станка за смену составляет 40 деталей, 2-го – 35 деталей, 3-го – 25 деталей. Установлено, что 2, 3 и 5% продукции этих станков соответственно имеют скрытые дефекты. В конце смены на контроль взята деталь. Какова вероятность, что она нестандартная?

Решение. Обозначим за A событие, состоящее в том, что взятая наудачу деталь имеет дефект. Возможны следующие предположения (гипотезы): H_1 – деталь изготовлена на 1-м станке, H_2 – деталь изготовлена на 2-м станке, H_3 – деталь изготовлена на 3-м станке.

Вероятность того, что деталь изготовлена на 1-м станке, равна $P(H_1)=\frac{40}{100}=0,4$, на 2-м станке – $P(H_2)=\frac{35}{100}=0,35$, на 3-м станке –

$P(H_3)=\frac{25}{100}=0,25$. Условные вероятности события A при этих гипотезах соответственно равны $P(A/H_1)=\frac{2}{100}=0,02$, $P(A/H_2)=\frac{3}{100}=0,03$, $P(A/H_3)=\frac{5}{100}=0,05$.

По формуле полной вероятности имеем $P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+$ $+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=0,4\cdot 0,02+0,35\cdot 0,03+0,25\cdot 0,05=0,031$.

Формула полной вероятности позволяет вычислить вероятность события по различным гипотезам, представляющим полную группу. Английский математик Байес (Бейес) в 1764 г. вывел формулы, которая позволяет переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.

Теорема. Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на условную вероятность события по этой гипотезе, деленному на полную вероятность события:

$$P(H_i/A)=\frac{\sum P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Пример 23.2. В трех одинаковых урнах лежат по 10 шаров. В первой находится 5 белых и 5 черных, во второй 7 белых и 3 черных, в третьей 9 белых и 1 черный. Наугад из одной урны извлекается шар. Он оказался белым. Определить вероятность, что он был взят из третьей урны.

Решение. Обозначим за A событие, состоящее в том, что извлечен белый шар. Возможны следующие предположения (гипотезы): H_1 – шар извлечен из первой урны, H_2 – шар извлечен из второй урны, H_3 – шар извлечен из третьей урны.

Вероятности гипотез равны $P(H_1)=\frac{1}{3}$, $P(H_2)=\frac{1}{3}$, $P(H_3)=\frac{1}{3}$. Условные вероятности события A при этих гипотезах соответственно равны $P(A/H_1)=\frac{5}{10}=0,5$, $P(A/H_2)=\frac{7}{10}=0,7$, $P(A/H_3)=\frac{9}{10}=0,9$.

По формуле полной вероятности имеем $P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+$ $+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=\frac{1}{3}\cdot 0,5+\frac{1}{3}\cdot 0,7+\frac{1}{3}\cdot 0,9=0,7$. Используя формулу Байеса, находим вероятность $P(H_3/A)=\frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0,9}{0,7}\approx 0,43$.

24. Случайные величины.

Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно.

Случайные величины обозначают заглавными буквами латинского алфавита X, Y, Z, ..., а их возможные конкретные значения – соответствующими малыми буквами этого алфавита x, y, z, ... Случайные величины различают на дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретной (прерывной) называется случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенной вероятностью.

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Любая случайная величина может быть задана законом распределения. *Законом распределения* случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Дискретная случайная величина может быть задана перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Такой способ задания не является общим, он неприменим для непрерывных случайных величин. Случайную величину можно задать с помощью функции распределения.

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т.е. $F(x)=P(X<x)$.

Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которую называют плотностью распределения или плотностью вероятности (иногда ее называют дифференциальной функцией).

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(x)$: $f(x)=F'(x)$.

Возможные значения случайной величины могут быть сосредоточены вокруг некоторого центра. Этот центр является некоторым средним значением случайной величины, вокруг которого группируются остальные ее значения. Для характеристики такой особенности распределения случайной величины служит математическое ожидание, которое иногда называют центром распределения или средним значением случайной величины.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие вероятности этих значений: $M(X)=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a;b]$, называют определенный интеграл $M(X)=\int\limits_a^b x f(x)dx$.

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$.

Математическое ожидание не полностью характеризует случайную величину. Не всегда достаточно знать среднее значение случайной величины. Часто бывает необходимым знать «рассеяние» значений случайной величины относительно ее математического ожидания, то есть надо найти число, которое давало бы нам меру рассеяния, меру отклонений этой величины от ее среднего значения. К характеристикам рассеивания относятся: дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$ называется *дисперсией* случайной величины X.

Для дискретной случайной величины дисперсию можно определим по формуле $D(X)=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-\left[M(X)\right]^2$, для непрерывной случайной величины – $D(X)=\int\limits_a^b x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2$. Среднее квадратическое отклонение определяется по формуле $\sigma_X=\sqrt{D(X)}$.

Пример 24.1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

Решение. Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений X на их вероятности: $M(X)=2\cdot 0,1+3\cdot 0,6+5\cdot 0,3=3,5$. Найдем искомую дисперсию: $D(X)=2^2\cdot 0,1+3^2\cdot 0,6+5^2\cdot 0,3-(3,5)^2=1,05$. Искомое среднее квадратическое отклонение равно $\sigma_X=\sqrt{1,05}\approx 1,03$.

25. Нормальное распределение.

Одним из наиболее часто встречающихся распределений является нормальное распределение. Оно играет большую роль в теории вероятностей и занимает среди других распределений особое положение. Нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при часто встречающихся аналогичных условиях.

Непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение (распределена по нормальному закону), если плотность распределения вероятности $f(x)$ имеет вид $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a и σ – некоторые постоянные, называемые параметрами нормального распределения.

Для того, чтобы задать нормальное распределение достаточно знать параметры a и σ. Эти параметры имеют вполне определенный физический смысл. Так, например, a представляет собой математическое ожидание, а σ – среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины.

Для вычисления вероятности попадания значения случайной величины, распределенной нормально, в заданный интервал $(\alpha;\beta)$, можно воспользоваться специальной функцией $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$. Эта функция называется функцией Лапласа или интегралом вероятности. Необходимо помнить, что $\Phi(x)$ – нечетная функция.

Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то вероятность того, что она примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\ \beta)$ равна $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$.

Пример 25.1. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной по нормальному закону, соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(10;\ 50)$.

Решение. Воспользуемся формулой $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$. Подставив $\alpha=10$, $\beta=50$, $a=30$ и $\sigma=10$, получим $P(10<X<50)=$ $=\Phi\left(\frac{50-30}{10}\right)-\Phi\left(\frac{10-30}{10}\right)=\Phi(2)-\Phi(-2)=\Phi(2)+\Phi(2)=2\cdot\Phi(2)$. По таблице значений функции $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ находим $\Phi(2)=0,4772$. Тогда искомая вероятность равна $P(10<X<50)=2\cdot 0,4772=0,9544$.

Рекомендации по решению типовых задач по контрольной работе № 6

26. Выборочный метод. Статистические оценки параметров распределения.

При изучении качественного и количественного признаков, характеризующих множество некоторых однородных объектов, не всегда имеется возможность обследовать каждый объект этого множества. Да и не всегда существует необходимость и целесообразность сплошного обследования. Поэтому обследуют только некоторую небольшую часть случайно отобранных объектов и на основании полученных данных делают вывод обо всем множестве объектов. Практика подтверждает, что сделанные выводы бывают достаточно объективными.

Множество всех объектов, подлежащих изучению, называется *генеральной совокупностью*.

Множество случайно отобранных объектов называется *выборочной совокупностью* или просто *выборкой*.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

На практике применяются различные способы отбора. Принципиально эти способы можно подразделить на два вида:

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части (простой случайный бесповторный отбор, простой случайный повторный отбор).
2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части (типический отбор, механический отбор, серийный отбор).

Целью создания выборки является сбор статистических данных – сведений о том, какие значения принял в результате наблюдений интересующий нас признак. Изучение статистических данных позволяет оценить параметры (характеристики) генеральной совокупности по данным выборки.

Собранные по полученной выборке статистические данные представляют собой исходный числовой материал, подлежащий дальнейшей обработке и анализу. Для изучения этих данных, прежде всего их группируют и представляют в виде вариационного, статистического и интервального рядов..

Пусть собранный и обработанный статистический материал представлен в виде ряда. Теперь результаты наблюдений над случайной величиной следует подвергнуть анализу и выявить характерные особенности поведения случайной величины. Для этого удобнее всего выделить некоторые постоянные, которые представляли бы вариационный или статистический ряд в целом и отражали присущие изучаемой совокупности закономерности.

Некоторые из этих постоянных отличаются тем, что вокруг них концентрируются остальные результаты наблюдений. Такие величины называются средними величинами. К ним относятся среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое и т.д. Однако эти характеристики не отражают «величину изменчивости» наблюдаемых данных, например величину разброса значений признака вокруг среднего арифметического. Другими словами, упомянутые средние величины не отражают вариацию.

Для характеристики изменчивости случайной величины, т.е. вариации, служат показатели вариации. К ним относятся размах варьирования, среднее квадратическое отклонение, дисперсия и т.д. Рассмотрим числовые характеристики вариационных рядов.

Средней арифметической вариационного ряда называется частное от деления суммы всех вариантов на их число, т.е. $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$. Если данные наблюдений представлены в виде статистического ряда, где x_1, x_2, …, x_k – наблюдаемые варианты, а m_1, m_2, …, m_k – соответствующие им частоты, причем $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, то $\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + x_k m_k}{m_1 + m_2 + ... + m_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{n}$.

Выборочной дисперсий D вариационного ряда называется средняя арифметическая квадратов отклонений вариантов от их средней арифметической $D = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}$. Если данные наблюдений представлены в виде статистического ряда, то выборочную дисперсию определяют по формуле $D = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 m_i}{n}$.

Пример. 26.1. Имеются данные о выработке 50 рабочих механического цеха представленные статистическим рядом:

x_i	90	100	110	120	130	140
m_i	1	3	6	7	21	12

Найти среднюю выработку рабочего механического цеха, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Среднюю выработку рабочего определим по формуле средней арифметической для статистического ряда, получим $\bar{x} = \frac{90 \cdot 1 + 100 \cdot 3 + 110 \cdot 6 + 120 \cdot 7 + 130 \cdot 21 + 140 \cdot 12}{50} = 126$.

Для удобства и упрощения вычислений выборочной дисперсии все расчеты сведем в таблицу.

x_i	m_i	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i$
90	1	-36	1296	1296
100	3	-26	676	2028
110	6	-16	256	1536
120	7	-6	36	252
130	21	4	16	336
140	12	14	196	2352
$\sum$				7800

Выборочная дисперсия распределения рабочих по выработке равна $D = \dfrac{7800}{50} = 156$, среднее квадратическое отклонение – $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{156} = 12,49$.

Пример 26.1. Дан статистический ряд:

x_i	2	3	4	5	6
m_i	1	2	5	3	1

Построить полигон распределения.

Решение. Построим полигон распределения, рис. 26.1.

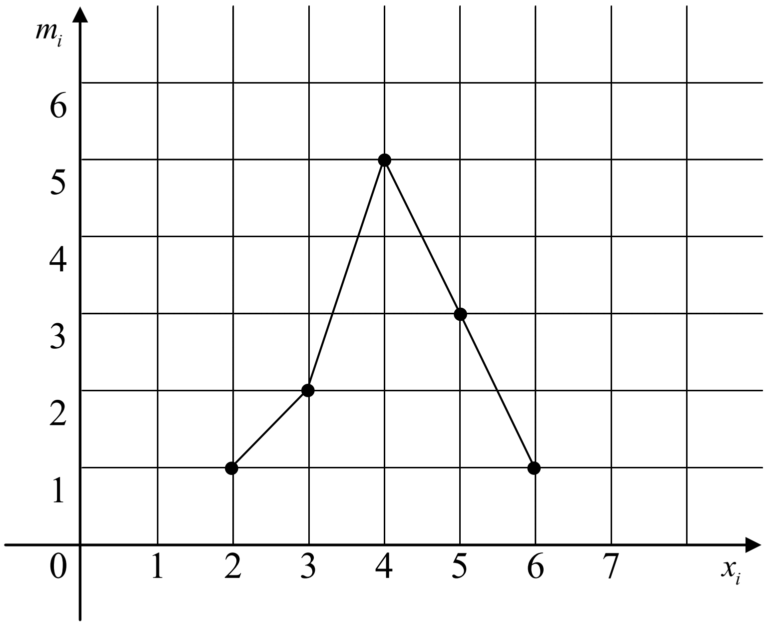


Рис. 26.1. Полигон распределения

27. Интервальные оценки

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют интервал, который с заданной надежностью γ покрывает заданный параметр.

1. Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней $\bar{x}$ при неизвестном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал $\bar{x}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, где $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ – точность оценки, n – объем выборки, t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$.

При неизвестном σ доверительный интервал определяется как $\bar{x}-\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$, где s – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

2. Интервальной оценкой (с надежностью γ) среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного количественного признака X по исправленному выборочному среднему квадратическому отклонению s служит доверительный интервал $s(1-q)<\sigma<s(1+q)$ при $q<1$, $0<\sigma<s(1+q)$ при $q>1$.

Пример 27.1. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma=3$. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочным средним $\bar{x}$, если объем выборки $n=36$ и надежность оценки $\gamma=0,95$.

Решение. Найдем t. Из соотношения $2\Phi(t)=0,95$ получим $\Phi(t)=0,475$. По таблице функции Лапласа находим $t=1,96$. Найдем точность оценки: $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1,96\cdot 3}{\sqrt{36}}=0,98$. Доверительный интервал таков: $\bar{x}-0,98<a<\bar{x}+0,98$.

Пример 27.2. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x}=30,1$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s=6$. Оценить истинное значение измеряемой величины при помощи доверительного интервала с надежностью $\gamma=0,99$.

Решение. Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию a. Поэтому задача сводиться к оценке математического ожидания (при неизвестном σ) при помощи доверительного интервала $\bar{x}-\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$.

Все величины, кроме t_γ, известны. Найдем t_γ. По таблице $t_\gamma = t(\gamma;n)$ с учетом, что $\gamma = 0,99$ и $n = 9$ находим $t_\gamma = 2,36$.

Подставив $\overline{x} = 30,1$, $t_\gamma = 2,36$, $s = 6$, $n = 9$ в формулу, получим искомый интервал: $25,38 < a < 34,82$.

Пример 27.3. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 25$ найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0,8$. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

Решение. По таблице по данным $\gamma = 0,95$ и $n = 25$ найдем $q = 0,32$. Искомый доверительный интервал таков: $0,8(1-0,32) < \sigma < 0,8(1+0,32)$ или $0,544 < \sigma < 1,056$.

28. Корреляционный анализ.

Во многих задачах требуется установить и оценить зависимость изучаемой случайной величины y от одной или нескольких других величин.

Степень статистической связи может быть проиллюстрирована полем корреляции. Методика построения поля корреляции зависит от объема выборки. Если объем выборки небольшой, то пару случайных чисел $(x_i; y_i)$ изображают графически в виде точки с координатами $A_i(x_i; y_i)$. Аналогично изображается весь набор пар случайных чисел (вся выборка).

В случае, когда объем выборки большой, выборочные данные следует упорядочить, т.е. переменные сгруппировать. По осям координат откладывают или дискретные значения переменных, или интервалы их изменения. Для интервального ряда наносится координатная сетка. Каждая пара переменных из данной выборки изображается в виде точки с соответствующими координатами для дискретного ряда или в виде точки в соответствующей клетке для интервального ряда.

Для оценки степени связи между признаками x и y служит выборочный коэффициент корреляции r_{xy}, который определяется по формуле: $$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}.$$

Для качественной оценки тесноты связи между x и y можно воспользоваться таблицей Чеддока:

Диапазон изменения	0,1-0,3	0,3-0,5	0,5-0,7	0,7-0,9	0,9-0,99
Характер тесноты связи	слабая	умеренная	заметная	сильная	весьма сильная

Пример 28.1. Изучается зависимость между ценой квартиры (y – тыс. долл.) и размером ее жилой площади (x – кв. м) по следующим данным:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	28	25	33	46	32	24	32	24	36	32
y	34	28	38	48	36	27	28	29	31	37

Постройте поле корреляции, характеризующее зависимость цены квартиры от жилой площади. Рассчитайте линейный коэффициент корреляции и поясните его смысл.

Решение. По исходным данным построим поле корреляции, характеризующее зависимость цены квартиры от жилой площади, рис. 28.1.

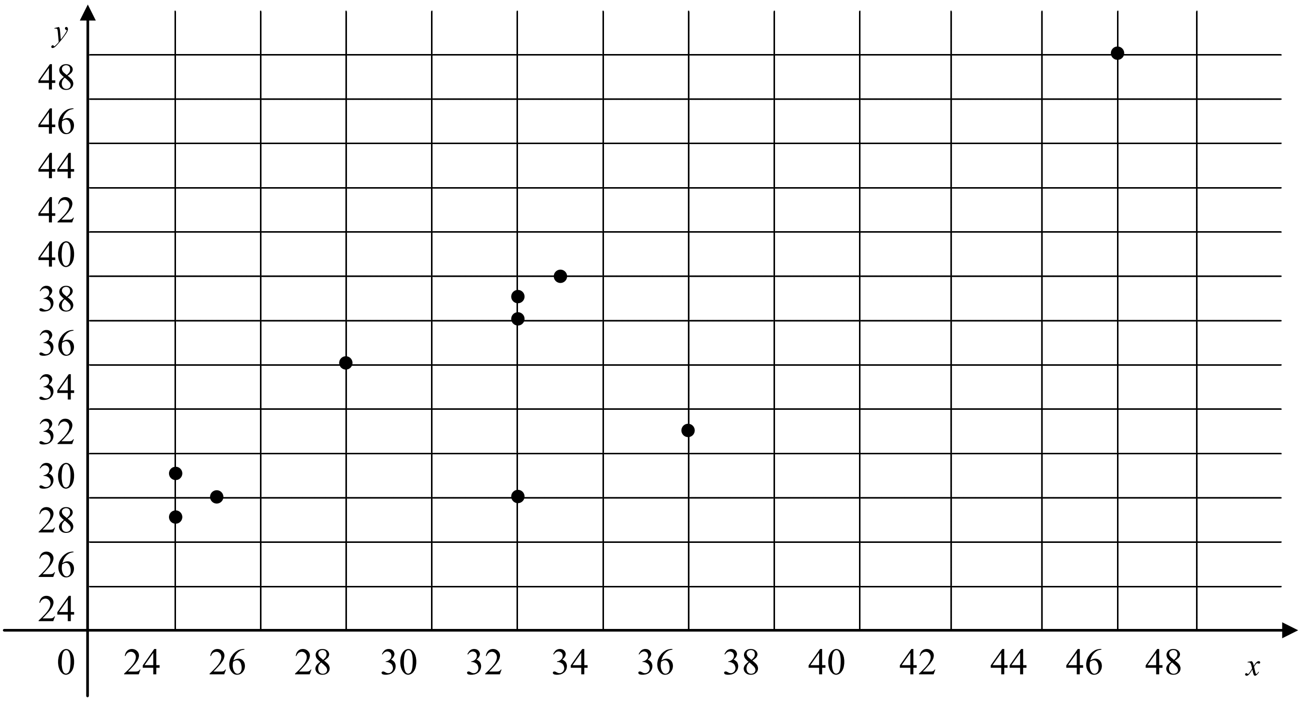


Рис. 28.1. Поле корреляции

Линейный коэффициент корреляции определим по формуле $r = \dfrac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum\left(y_i - \overline{y}\right)^2}}$, промежуточные результаты вычислений представим в таблице.

№	x	y	$x-\overline{x}$	$\left(x-\overline{x}\right)^2$	$y-\overline{y}$	$\left(y-\overline{y}\right)^2$	$\left(x-\overline{x}\right)\left(y-\overline{y}\right)$
1	28	34	-3,2	10,24	0,4	0,16	-1,28
2	25	28	-6,2	38,44	-5,6	31,36	34,72
3	33	38	1,8	3,24	4,4	19,36	7,92
4	46	48	14,8	219,04	14,4	207,36	213,12

№	x	y	$x-\overline{x}$	$\left(x-\overline{x}\right)^2$	$y-\overline{y}$	$\left(y-\overline{y}\right)^2$	$\left(x-\overline{x}\right)\left(y-\overline{y}\right)$
5	32	36	0,8	0,64	2,4	5,76	1,92
6	24	27	-7,2	51,84	-6,6	43,56	47,52
7	32	28	0,8	0,64	-5,6	31,36	-4,48
8	24	29	-7,2	51,84	-4,6	21,16	33,12
9	36	31	4,8	23,04	-2,6	6,76	-12,48
10	32	37	0,8	0,64	3,4	11,56	2,72
$\sum$	312	336		399,6		378,4	322,8

Средний размер жилой площади квартиры равен $\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{312}{10}=31,2$ кв. м., средняя цена квартиры – $\overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{336}{10}=33,6$. Линейный коэффициент корреляции равен $r=\frac{322,8}{\sqrt{399,6}\cdot\sqrt{378,4}}=0,83$. Так как линейный коэффициент корреляции равен 0,83, то между признаками существует сильная зависимость.

29. Регрессионный анализ.

Практическое значение парной линейной регрессии состоит в том, что есть системы, в которых среди всех факторов, влияющих на результативный признак, выделяется один важнейший фактор, который в основном определяет вариацию результативного признака.

Линейная регрессия сводится к нахождению уравнения вида $y_x=a+bx$. Построение данного уравнения сводится к оценке ее параметров – a и b, которые определяются по формулам $b=\frac{\sum xy-\frac{1}{n}\sum x\sum y}{\sum x^2-\frac{1}{n}\left(\sum x\right)^2}$, $a=\frac{1}{n}\left(\sum y-b\sum x\right)$.

Пример 29.1. Администрация компании по продаже легковых автомобилей проводит анализ спроса на различные модели автомобилей марки X в зависимости от их цены. Ниже приводятся данные о ценах и среднемесячных объемах продаж 12 моделей автомобилей данной марки:

Модель	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Цена, тыс. дол.	25	28	29	27	29	28	29	24	25	23	25	28
Количество проданных автомобилей в среднем за месяц, шт.	55	48	40	42	27	35	28	58	54	52	55	48

Определите параметры уравнения линейной регрессии и дайте интерпретацию коэффициента регрессии b.

Решение. Определим параметры уравнения линейной регрессии по формулам $b = \dfrac{\sum xy - \frac{1}{n}\sum x \sum y}{\sum x^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x\right)^2}$, $a = \frac{1}{n}\left(\sum y - b\sum x\right)$, промежуточные результаты представим в таблице:

№	x	y	xy	x^2
1	55	25	1375	3025
2	48	28	1344	2304
3	40	29	1160	1600
4	42	27	1134	1764
5	27	29	783	729
6	35	28	980	1225
7	28	29	812	784
8	58	24	1392	3364
9	54	25	1350	2916
10	52	23	1196	2704
11	55	25	1375	3025
12	48	28	1344	2304
$\sum$	542	320	14245	25744

Так как $b = \dfrac{14245 - \frac{1}{12}\cdot 542\cdot 320}{25744 - \frac{1}{12}\cdot 542^2} = -0{,}17$, $a = \frac{1}{12}\cdot\left(320 + 0{,}165\cdot 542\right) = 34{,}11$, то уравнение линейной регрессии имеет вид $y_x = 34{,}11 - 0{,}17x$. Так как $b = -0{,}165$, то при увеличении на одну единицу количества машин, цена уменьшается на 0,17 тыс. руб.

30. Проверка статистических гипотез.

Одной из важнейших задач математической статистики является установление теоретического закона распределения случайной величины, характеризующей изучаемый признак по опытному (эмпирическому) распределению.

Для решения этой задачи необходимо определить вид и параметры закона распределения. Предположение о виде закона распределения может быть выдвинуто исходя из теоретических предпосылок, опыта аналогичных предшествующих исследований и, наконец, на основании графического изображения эмпирического распределения.

Как бы хорошо ни был подобран теоретический закон распределения, между эмпирическим и теоретическим распределениями неизбежны расхождения. Естественно, возникает вопрос: объясняются ли эти расхождения только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они являются существенными и связаны с тем, что теоретический закон распределения подобран неудачно. Для ответа на этот вопрос и служит критерии согласия.

Рассмотрим наиболее используемый критерий – критерий согласия Пирсона. Сущность критерия согласия Пирсона состоит в сравнении эмпирических и теоретических частот. Ясно, что эмпирические частоты находят из опыта. Как найти теоретические частоты, если предполагается, что генеральная совокупность распределена нормально? Ниже приведен один из способов решения этой задачи.

Для нахождения теоретических частот необходимо:

1. Пронормировать случайную величину X, т.е. перейти к случайной величине $U=\dfrac{X-\overline{x}}{\sigma}$, и вычислить концы интервалов: $u_i=\dfrac{x_i-\overline{x}}{\sigma}$, $u_{i+1}=\dfrac{x_{i+1}-\overline{x}}{\sigma}$, причем наименьшее значение U, т.е. u_1 полагают равным $-\infty$, а наибольшее, т.е. u_{s+1} полагают равным $+\infty$.

2. Вычислить теоретические частоты $m_i^{теор}=nP_i$, где $P_i=\Phi(u_{i+1})-\Phi(u_i)$ – вероятности попадания X в интервалы $(x_i;x_{i+1})$, $\Phi(U)$ – функция Лапласа.

Пример 30.1. В учебной группе из 30 курсантов измерили рост с точностью до 1 см. Результаты измерений представлены в таблице:

Интервалы	$[163-167)$	$[167-171)$	$[171-175)$	$[175-179)$	$[179-183)$	$[183-187)$	$[187-191)$
m_i	1	1	2	11	10	4	1

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha=0,05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении.

Решение. Вычислим выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение. Для решения поставленной задачи дополним интервальный ряд средними значениями интервалов.

Интервалы	$[163-167)$	$[167-171)$	$[171-175)$	$[175-179)$	$[179-183)$	$[183-187)$	$[187-191)$
$\overline{x_i}$	165	169	173	177	181	185	189
m_i	1	1	2	11	10	4	1

Среднее арифметическое равно $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \overline{x_i} m_i}{n} =$

$$= \frac{165 \cdot 1 + 169 \cdot 1 + 173 \cdot 2 + 177 \cdot 11 + 181 \cdot 10 + 185 \cdot 4 + 189 \cdot 1}{30} = 178,87 .$$

Выборочную дисперсию определим по формуле $D = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(\overline{x_i} - \overline{x}\right)^2 m_i}{n}$. Для удобства и упрощения вычислений все расчеты сведем в таблицу.

$\overline{x_i}$	m_i	$\overline{x_i} - \overline{x}$	$\left(\overline{x_i} - \overline{x}\right)^2$	$\left(\overline{x_i} - \overline{x}\right)^2 m_i$
165	1	-13,87	192,2844	192,2844
169	1	-9,87	97,3511	97,3511
173	2	-5,87	34,4178	68,8356
177	11	-1,87	3,4844	38,3289
181	10	2,13	4,5511	45,5111
185	4	6,13	37,6178	150,4711
189	1	10,13	102,6844	102,6844
$\sum$	30			695,4667

Выборочная дисперсия составляет $D = \frac{695,4667}{30} = 23,18$, выборочное среднее квадратическое отклонение – $\sigma = \sqrt{23,18} = 4,82$.

Определим теоретические частоты. Найдем интервалы $\left(u_i ; u_{i+1}\right)$, учитывая, что $\overline{x} = 178,87$, $\sigma = 4,82$. Для удобства и упрощения вычислений составим расчетную таблицу:

x_i	x_{i+1}	$x_i - \overline{x}$	$x_{i+1} - \overline{x}$	$u_i = \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}$	$u_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x}}{\sigma}$
163	167	–	-11,87	$-\infty$	-2,46
167	171	-11,87	-7,87	-2,46	-1,63
171	175	-7,87	-3,87	-1,63	-0,80
175	179	-3,87	0,13	-0,80	0,03
179	183	0,13	4,13	0,03	0,86
183	187	4,13	8,13	0,86	1,69
187	191	8,13	–	1,69	$+\infty$

Найдем теоретические вероятности P_i и теоретические частоты $m_i^{теор}$. Для этого составим расчетную таблицу:

u_i	u_{i+1}	$\Phi(u_i)$	$\Phi(u_{i+1})$	P_i	$m_i^{теор}$
$-\infty$	-2,46	-0,5000	-0,4931	0,0069	0,21
-2,46	-1,63	-0,4931	-0,4484	0,0447	1,34
-1,63	-0,80	-0,4484	-0,2881	0,1603	4,81
-0,80	0,03	-0,2881	0,0120	0,3001	9,00
0,03	0,86	0,0120	0,3051	0,2931	8,79
0,86	1,69	0,3051	0,4545	0,1494	4,48
1,69	$+\infty$	0,4545	0,5000	0,0455	1,37

Сравним эмпирические и теоретические частоты, используя критерий согласия Пирсона.

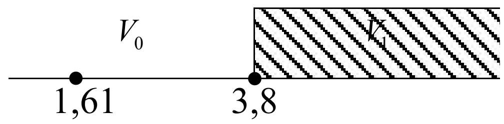
1. H_0: признак X распределен нормально.
2. Уровень значимости $\alpha = 0,05$.
3. Критерий проверки – критерий согласия Пирсона.
4. Наблюдаемое значение критерия определяют по формуле $\chi^2_{наб} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(m_i - m_i^{теор}\right)^2}{m_i^{теор}}$.

Вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона, для удобства и упрощения вычислений все расчеты сведем в таблицу (малочисленные теоретические и эмпирическое частоты объединим).

m_i	$m_i^{теор}$	$m_i - m_i^{теор}$	$\left(m_i - m_i^{теор}\right)^2$	$\frac{\left(m_i - m_i^{теор}\right)^2}{m_i^{теор}}$
4	6,36	-2,36	5,5554	0,8739
11	9,00	2,00	3,9880	0,4430
10	8,79	1,21	1,4568	0,1657
5	5,85	-0,85	0,7174	0,1227
$\sum$				1,61

Наблюдаемое значение критерия равно $\chi^2_{наб} = 1,61$.

5. По таблице критических точек распределения χ^2, по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = s - 3 = 4 - 3 = 1$ находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{кр}\left(0,05;1\right) = 3,8$.



6. Так как $\chi^2_{наб} < \chi^2_{кр}$, то гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности не отвергаем.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Баврин И.И. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: «Академия», 2008. (Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений).
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. 9-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2004. – 479 с. (Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вуза).
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебное пособие для втузов. Т. 1 / Н.С. Пискунов. – изд., стер. – М.: «Интеграл Пресс», 2009. – 416 с. (Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вуза).
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебное пособие для втузов. Т. 2 / Н.С. Пискунов. – изд., стер. – М.: «Интеграл Пресс», 2009. – 544 с. (Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вуза).
5. Шипачёв В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – 10 изд., стер. – М.: Высшая школа, 2010. – 479 с. (Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений).

Дополнительная литература:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. – 5-е изд. – М.: Наука, 1998. – 320 с.
2. Беклемишева Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учебное пособие /Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович и др – М.: Наука, 1997. – 496 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие. – СПб: Профессия, 2007. – 432 с.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов. – 3-е изд. – М.: Наука, 1989. – 464 с. (Допущено Министерством высшего и среднего образования СССР в качестве учебника для студентов инженерно-технических специальностей вузов).
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учебник для вузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 10-е изд., стер. – М.: «Академия», 2005. – 576 с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учебное пособие для вузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 2-е изд.,

стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 480с. (Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений).

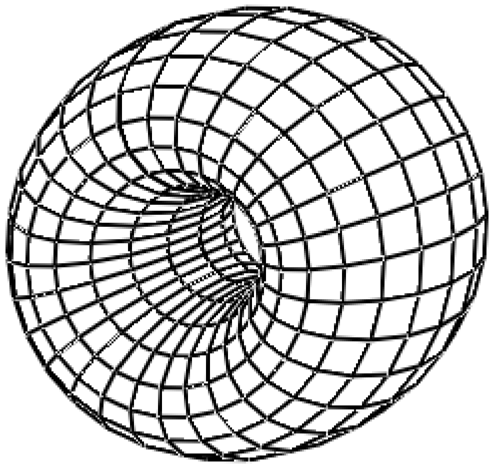
7. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Издательский центр «Академия», 2005.
8. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистике: Учебное пособие. – 9-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2004. – 404 с.
9. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: Учебное пособие. /Г.И. Запорожец – 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1998. – 460 с.
10. Кудрявцев А.В. Краткий курс математического анализа. Т.1 Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной. Ряды.: Учебник – 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 400 с.
11. Кудрявцев А.В. Краткий курс математического анализа. Т.2 Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменной. Гармонический анализ.: Учебник – 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 424 с.
12. Методы прикладной математики в пожарно-технических задачах. Под ред. Брушлинского Н.Н. М.: ВИПТШ, 1983. – 140 с.
13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального исчисления: в 3-х томах. Т. 1. / Г.М. Фихтенгольц; ред. А.А. Флоринского. – 8-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ: Лаборатория знаний, 2003 – 680 с. (Рекомендован Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов физических и механико-математических специальностей высших учебных заведений).
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального исчисления: в 3-х томах. Т. 2. / Г.М. Фихтенгольц; ред. А.А. Флоринского. – 8-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ: Лаборатория знаний, 2003 – 864 с. (Рекомендован Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов физических и механико-математических специальностей высших учебных заведений).
15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального исчисления: в 3-х томах. Т. 3. / Г.М. Фихтенгольц; ред. А.А. Флоринского. – 8-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ: Лаборатория знаний, 2003 – 728 с. (Рекомендован Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов физических и механико-математических специальностей высших учебных заведений).
16. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. – М.: Техносфера, 2003. – 320 с. (Допущено УМО вузов Российской Федерации в области прикладной математики в качестве учебного пособия для высших учебных заведений).

17. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов/ В.С. Шипачев. – 3-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 304 с.
18. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1998. – 289 с.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРОТИВОПОЖАРНОЙ СЛУЖБЫ
МЧС РОССИИ

СБОРНИК КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для слушателей заочной формы обучения
направление подготовки 280705.65 – Пожарная безопасность
квалификация (степень) – специалист



Санкт-Петербург
2013

Санкт-Петербургский университет
государственной противопожарной службы МЧС России

Калинина Е.С., Крюкова М.С., Медведева О.М.

СБОРНИК КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для слушателей заочной формы обучения
направление подготовки 280705.65 – Пожарная безопасность
квалификация (степень) – специалист

Санкт-Петербург
2013

Содержание

Порядок и правила выполнения контрольных работ

Контрольные работы, предлагаемые для самостоятельного решения слушателям института заочного обучения, составлены по двадцативариантной системе. Это позволило отразить в них более широкий круг вопросов программы. Варианты контрольных работ приведены в таблицах 1-4.

На первом курсе обучения слушатели-заочники выполняют контрольные работы № 1, 2, 3. На втором курсе обучения слушатели-заочники выполняют контрольные работы № 4, 5, 6.

К выполнению каждой контрольной работы следует приступать только после изучения соответствующей литературы и разбора решения типовых задач. При этом следует руководствоваться следующими указаниями:

1. Каждую работу следует выполнять в отдельной тетради, на внешней обложке которой должны быть указаны фамилия и инициалы слушателей, полный шифр, номер контрольной работы и дата ее отправки в университет. Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. При необходимости следует делать соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием формул, теорем, выводов, которые используются при решении данной задачи. Все вычисления (в том числе и вспомогательные) необходимо делать полностью. Чертежи и графики должны быть выполнены (желательно на миллиметровой бумаге) аккуратно и четко с указанием единиц масштаба, координатных осей и других элементов чертежа. Объяснения к задачам должны соответствовать тем обозначениям, которые даны на чертеже.

   Для замечаний преподавателя необходимо на каждой странице оставлять поля шириной 3 – 4 см.

2. После получения работы (как зачтенной, так и незачтенной) слушатель должен исправить в ней все отмеченные рецензентом недостатки. В случае незачета слушатель обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

3. Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. Если будет установлено, что та или иная контрольная работа выполнена не самостоятельно, то она не будет зачтена, даже если в этой работе все задачи решены верно.

4. В период экзаменационной сессии слушатель обязан представить все прорецензированные и зачтенные контрольные работы. При необходимости (по требованию преподавателя) слушатель должен давать на экзамене устные пояснения ко всем или некоторым задачам, содержащимся в этих работах.

5. Слушатель выполняет тот вариант контрольных работ, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра. При этом если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 1, 3, если же предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное или ноль (2, 4, 6, 8, 0), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 2, 4.

Если в процессе изучения материала или при решении той или иной задачи у слушателя возникают вопросы, на которые он не может ответить сам, то можно обратиться к преподавателю для получения письменной консультации. В запросе следует возможно более точно указать характер затруднения. При этом обязательно следует указать полное название книги, год издания и страницу, где трактуется непонятный для слушателя вопрос или помещена соответствующая задача.

Варианты контрольных работ, выполняемые на I курсе

Таблица 1

Номер варианта	Задачи для выполнения контрольной работы № 1					Задачи для выполнения контрольной работы № 2					Задачи для выполнения контрольной работы № 3				
1	1	21	41	61	81	101	121	141	161	181	201	221	241	261	281
2	2	22	42	62	82	102	122	142	162	182	202	222	242	262	282
3	3	23	43	63	83	103	123	143	163	183	203	223	243	263	283
4	4	24	44	64	84	104	124	144	164	184	204	224	244	264	284
5	5	25	45	65	85	105	125	145	165	185	205	225	245	265	285
6	6	26	46	66	86	106	126	146	166	186	206	226	246	266	286
7	7	27	47	67	87	107	127	147	167	187	207	227	247	267	287
8	8	28	48	68	88	108	128	148	168	188	208	228	248	268	288
9	9	29	49	69	89	109	129	149	169	189	209	229	249	269	289
0	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210	230	250	270	290

Таблица 2

Номер варианта	Задачи для выполнения контрольной работы № 1					Задачи для выполнения контрольной работы № 2					Задачи для выполнения контрольной работы № 3				
1	11	31	51	71	91	111	131	151	171	191	211	231	251	271	291
2	12	32	52	72	92	112	132	152	172	192	212	232	252	272	282
3	13	33	53	73	93	113	133	153	173	193	213	233	253	273	293
4	14	34	54	74	94	114	134	154	174	194	214	234	254	274	294
5	15	35	55	75	95	115	135	155	175	195	215	235	255	275	295
6	16	36	56	76	96	116	136	156	176	196	216	236	256	276	296
7	17	37	57	77	97	117	137	157	1778	197	217	237	257	277	297
8	18	38	58	78	98	118	138	158	178	198	218	238	258	278	298
9	19	39	59	79	99	119	139	159	179	199	219	239	259	279	299
0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300

Варианты контрольных работ, выполняемые на II курсе

Таблица 3

Номер варианта	Задачи для выполнения контрольной работы № 4					Задачи для выполнения контрольной работы № 5					Задачи для выполнения контрольной работы № 6				
1	301	321	341	361	381	401	421	441	461	481	501	521	541	561	581
2	302	322	342	362	382	402	422	442	462	482	502	522	542	562	582
3	303	323	343	363	383	403	423	443	463	483	503	523	543	563	583
4	304	324	344	364	384	404	424	444	464	484	504	524	544	564	584
5	305	325	345	365	385	405	425	445	465	485	505	525	545	565	585
6	306	326	346	366	386	406	426	446	466	486	506	526	546	566	586
7	307	327	347	367	387	407	427	447	467	487	507	527	547	567	587
8	308	328	348	368	388	408	428	448	468	488	508	528	548	568	588
9	309	329	349	369	389	409	429	449	469	489	509	529	549	569	589
0	310	330	350	370	390	410	430	450	470	490	510	530	550	570	590

Таблица 4

Номер варианта	Задачи для выполнения контрольной работы № 4					Задачи для выполнения контрольной работы № 5					Задачи для выполнения контрольной работы № 6				
1	311	331	351	371	391	411	431	451	471	491	511	531	551	571	591
2	312	332	352	372	392	412	432	452	472	492	512	532	552	572	592
3	313	333	353	373	393	413	433	453	473	493	513	533	553	573	593
4	314	334	354	374	394	414	434	454	474	494	514	534	554	574	594
5	315	335	355	375	395	415	435	455	475	495	515	535	555	575	595
6	316	336	356	376	396	416	436	456	476	496	516	536	556	576	596
7	317	337	357	377	397	417	437	457	477	497	517	537	557	577	597
8	318	338	358	378	398	418	438	458	478	498	518	538	558	578	598
9	319	339	359	379	399	419	439	459	479	499	519	539	559	579	599
0	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600

Контрольная работа № 1
«Элементы алгебры и геометрии»

В задачах **1 – 20** найти матрицу $D = AB - 2C$.

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$

3. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 3 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 5 & 14\end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\\ 0 & -2\end{pmatrix}.$

6. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}.$

7. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1\\ -3\\ 0\end{pmatrix}.$

8. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 5 & 0 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$

9. $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 6 & 1\end{pmatrix}.$

10. $A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$

11. $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -3 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -2 & 5 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$

12. $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

13. $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$

14. $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

15. $A=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$

16. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

17. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

18. $A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

19. $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$

20. $A=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$

В задачах **21 – 40** дана невырожденная матрица A. Найти обратную матрицу A^{-1} и пользуясь правилом умножения матриц, показать, что $A\cdot A^{-1}=E$, где E – единичная матрица.

21. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$ **22.** $A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 5 & -8 & 2 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$ **23.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$

24. $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$ **25.** $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$ **26.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$

27. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 1 & -6 & 2\\ 2 & 0 & -7\end{pmatrix}$. **28.** $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$. **29.** $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & -3 & -2\\ 4 & -6 & 2\end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & -2 & -4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. **31.** $A=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 13\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$. **32.** $A=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

33. $A=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 3\\ 0 & -2 & 0\\ 5 & -4 & -5\end{pmatrix}$. **34.** $A=\begin{pmatrix}5 & -5 & 4\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}$. **35.** $A=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -4\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

36. $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -2\\ -1 & -2 & 0\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}$. **37.** $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & -6 & 2\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}$. **38.** $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & -1\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix}$.

39. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & -7\end{pmatrix}$. **40.** $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

В задачах **41 – 60** решить системы линейных уравнений с тремя неизвестными.

41. $\begin{cases}x-2y+4z=4\\ 3x+2y-3z=3\\ x+2y-z=-3\end{cases}$. **42.** $\begin{cases}2x+3y+z=5\\ x+2y-z=6\\ 3x+y+2z=3\end{cases}$. **43.** $\begin{cases}-5x+4y+5z=-6\\ -4x+6y+3z=-3\\ 2x-y-z=4\end{cases}$.

44. $\begin{cases}2x+3y+z=7\\ x+y=4\\ 2x+y+z=5\end{cases}$. **45.** $\begin{cases}5x+8y-z=7\\ 2x-3y+2z=9\\ x+2y+3z=1\end{cases}$. **46.** $\begin{cases}2x-y+3z=-3\\ -x-y+z=-2\\ 3x+y-2z=6\end{cases}$.

47. $\begin{cases}x+3y+4z=8\\ 2x-y+6z=7\\ 4x+2y-z=5\end{cases}$. **48.** $\begin{cases}2x+6y+4z=4\\ 3x-2y+z=-6\\ 2x-z=6\end{cases}$. **49.** $\begin{cases}3x-8y-3z=4\\ 2x+3y+z=7\\ -x+3y+2z=5\end{cases}$.

50. $\begin{cases}x+y+2z=1\\ 2x-y+2z=-2\\ 4x+y+4z=2\end{cases}$. **51.** $\begin{cases}x+y+z=5\\ x-y+2z=2\\ 3x+5y-8z=8\end{cases}$. **52.** $\begin{cases}x+3y+2z=4\\ 2x+6y+z=2\\ 4x+8y-z=2\end{cases}$.

53. $\begin{cases}3x+4y+9z=31\\ x+2y-z=-1\\ 5x+11y=33\end{cases}$. **54.** $\begin{cases}x-2y+z=0\\ 3y+2z=8\\ 2x-3y-z=-1\end{cases}$. **55.** $\begin{cases}x+y-z=2\\ 8x+3y-6z=-4\\ -4x-y+3z=5\end{cases}$.

56. $\begin{cases}x+3y+2z=1\\ 3x+8y+5z=3\\ 2x+7y+6z=3\end{cases}$. **57.** $\begin{cases}x+z=7\\ 2x+y-z=2\\ x+2y+2z=11\end{cases}$. **58.** $\begin{cases}x-3y+z=2\\ x-3y-4z=-5\\ -2x-y=2\end{cases}$.

59. $\begin{cases} x+2z=5 \\ 3x-5y+2z=7 \\ 4x+5y-z=2 \end{cases}$. **60.** $\begin{cases} 3x+y+z=21 \\ x-4y-2z=-16 \\ -3x+5y+6z=41 \end{cases}$.

В задачах **61 – 80** построить треугольник, вершины которого находятся в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти:

1. уравнения сторон треугольника ABC;
2. координаты точки пересечения медиан;
3. длину и уравнение высоты, опущенной из вершины A;
4. площадь треугольника.

61. $A(-1;2)$, $B(5;1)$, $C(1;-2)$.

62. $A(-2;1)$, $B(5;-2)$, $C(-1;-2)$.

63. $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(-2;-2)$.

64. $A(-4;2)$, $B(8;2)$, $C(-4;-3)$.

65. $A(-3;1)$, $B(-2;-4)$, $C(2;-1)$.

66. $A(1;3)$, $B(-5;-2)$, $C(-5;3)$.

67. $A(2;0)$, $B(1;-2)$, $C(-5;6)$.

68. $A(0;4)$, $B(-2;4)$, $C(-2;-2)$.

69. $A(4;1)$, $B(-1;-2)$, $C(2;2)$.

70. $A(-2;2)$, $B(-8;-5)$, $C(4;0)$.

71. $A(-3;0)$, $B(3;-4)$, $C(6;8)$.

72. $A(2;1)$, $B(1;-2)$, $C(-3;-2)$.

73. $A(2;6)$, $B(2;-6)$, $C(10;0)$.

74. $A(2;-3)$, $B(2;3)$, $C(-4;3)$.

75. $A(-3;0)$, $B(2;4)$, $C(-4;-4)$.

76. $A(-1;2)$, $B(-6;-3)$, $C(6;2)$.

77. $A(3;0)$, $B(2;-6)$, $C(8;2)$.

78. $A(2;4)$, $B(-3;2)$, $C(-3;-4)$.

79. $A(-2;-3)$, $B(5;1)$, $C(2;-3)$.

80. $A(-3;2)$, $B(1;7)$, $C(-4;-5)$.

В задачах **81 – 100** даны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$. Найти:

1. найти длину ребра AB;
2. уравнение плоскости, проходящей через точки A, B и C;
3. уравнение высоты опущенной из точки D на плоскость ABC;
4. площадь грани ABC;
5. объем пирамиды $ABCD$.

81. $A(2;3;2)$, $B(4;-1;-2)$, $C(6;3;-2)$, $D(-5;-4;8)$.

82. $A(3;1;4)$, $B(-1;6;1)$, $C(-1;1;6)$, $D(0;4;-1)$

83. $A(0;7;1)$, $B(4;1;5)$, $C(4;6;3)$, $D(3;9;8)$.

84. $A(1;0;2)$, $B(2;1;1)$, $C(-1;2;0)$, $D(-2;-1;-1)$.

85. $A(-1;2;1)$, $B(1;0;2)$, $C(2;-1;3)$, $D(1;1;0)$.

86. $A(2;1;1)$, $B(-1;2;-1)$, $C(1;0;-2)$, $D(3;-1;2)$.

87. $A(2;0;3)$, $B(-1;3;2)$, $C(3;2;0)$, $D(-2;1;1)$.

88. $A(5;1;0)$, $B(1;5;4)$, $C(2;-1;0)$, $D(2;4;7)$.

89. $A(3;-1;3)$, $B(4;5;-2)$, $C(2;7;1)$, $D(2;3;5)$.

90. $A(0;2;4)$, $B(4;-1;2)$, $C(5;1;-3)$, $D(3;2;6)$.

91. $A(6;2;0)$, $B(-3;3;4)$, $C(4;1;2)$, $D(2;2;5)$.

92. $A(5;0;2)$, $B(0;4;1)$, $C(9;1;-2)$, $D(4;2;6)$.

93. $A(0;1;4)$, $B(2;0;-3)$, $C(5;1;6)$, $D(5;2;8)$.

94. $A(3;2;5)$, $B(4;5;2)$, $C(6;-3;0)$, $D(5;-1;3)$.

95. $A(0;3;1)$, $B(3;-2;3)$, $C(5;0;-1)$, $D(6;5;4)$.

96. $A(3;3;2)$, $B(4;1;0)$, $C(2;0;1)$, $D(4;3;6)$.

97. $A(1;6;0)$, $B(3;0;-4)$, $C(5;3;2)$, $D(2;3;2)$.

98. $A(2;0;2)$, $B(5;6;5)$, $C(3;3;0)$, $D(4;2;4)$.

99. $A(3;2;0)$, $B(1;1;3)$, $C(0;3;2)$, $D(2;2;6)$.

100. $A(6;-1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(3;-3;0)$, $D(4;4;7)$.

Контрольная работа № 2
«Производная и дифференциал»

В задачах **101 – 120** найти указанные пределы.

101. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x+1}{2+3x^2+4x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+4}\right)^x$.

102. а) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+3}{3x^2+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tgx}$.

103. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x-15}{x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^3-3x^4}{x^4+4x^2+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x-1}\right)^x$.

104. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+7}{5x^2-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2x}{5x^2}$.

105. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x-7}{-3x^4+2x^3-x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+2x}{2+2x}\right)^x$.

106. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2-1}{2x^3-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\cos 2x-1}$.

107. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+1}{x^3+3x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+6}{4x+5}\right)^x$.

108. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+3}{x^3+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{2x^3}$.

109. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x}{2x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^x$.

110. а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-2}{12x^2-9x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

111. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x+x^3}{10x^3-x^2-80}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x+5}$.

112. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{4x^2}$.

113. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5}{x^2+3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x-6}\right)^{x+2}$.

114. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x^2+3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 4x}$.

115. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x}$.

116. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x^3-2x}{2x^6-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

117. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{4x^2-3x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^x$.

118. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$.

119. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+10x}{2x^3+14x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x-4}\right)^x$.

120. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-x}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x^2-x}{x+2x^3-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

В задачах **121 – 140** для каждой из заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер.

121. $y=\dfrac{x+2}{x+5}$ **122.** $y=\begin{cases} x, & при\ \ x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & при\ \ x>0 \end{cases}$. **123.** $y=\dfrac{1}{x^2-4}$.

124. $y=\dfrac{1}{2-x}$. **125.** $y=\begin{cases} x^2, & при\ \ x\le 1 \\ x+1, & при\ \ x>1 \end{cases}$. **126.** $y=\dfrac{4x}{x-1}$.

127. $y=\dfrac{4x}{x+5}$. **128.** $y=\begin{cases} -2x, & при\ \ x\le -1 \\ x^2+1, & при\ \ x>-1 \end{cases}$. **129.** $y=2^{\frac{1}{x-1}}$.

130. $y=\dfrac{x+3}{x-4}$. **131.** $y=\begin{cases} x^2, & при\ \ x\le 2 \\ 6-x, & при\ \ x>2 \end{cases}$. **132.** $y=\dfrac{1}{x^2-9}$.

133. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. **134.** $y=\begin{cases} x^2+1, & при\ \ x\le 2 \\ x-1, & при\ \ x>2 \end{cases}$. **135.** $y=3^{\frac{1}{x+2}}$.

136. $y=\dfrac{2x}{x+3}$. **137.** $y=\begin{cases} x-2, & при\ \ x\le 2 \\ \dfrac{1}{x-2}, & при\ \ x>2 \end{cases}$. **138.** $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

139. $y=\dfrac{1}{6-x}$ **140.** $y=\begin{cases} 0, & при\ \ x<0 \\ \sqrt{x}, & при\ \ x\ge 0 \end{cases}$.

В задачах **141 – 160** найти производные заданных функций.

141. а) $y=x^2\cdot\ln x$; б) $y=arctge^x$; в) $y=\sin^2\dfrac{1-x}{1+x}$.

142. а) $y=\dfrac{3x-7}{x^2+2}$; б) $y=\sin^2 tgx$; в) $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-3}{x+3}$.

143. а) $y=\left(x^3+1\right)\cdot\cos x$; б) $y=\ln\left(1+\sin^2 x\right)$; в) $y=\cos^2\dfrac{4x-1}{x^2}$.

144. а) $y=\dfrac{3\cos x}{2x+1}$; б) $y=4^{arctg3x}$; в) $y=\dfrac{\ln\cos x}{\ln\sin x}$.

145. а) $y=x^2\cdot tgx$; б) $y=\arccos\left(2e^{2x}-1\right)$; в) $y=\ln\left(\dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}\right)$.

146. а) $y=\dfrac{\log_5 x}{5^x}$; б) $y=\cos\ln\left(2x-x^2\right)$; в) $y=\ln^2\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

147. а) $y=\sin x\cdot\ln x$; б) $y=e^{x^4+\cos^2 x}$; в) $y=x\cdot\arcsin\left(3\ln^2 x\right)$.

148. а) $y=\dfrac{6^x}{\cos x}$; б) $y=\ln\arcsin\left(1-x^2\right)$; в) $y=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$.

149. а) $y=e^x\cdot\left(x^3+1\right)$; б) $y=\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$; в) $y=\sin 3^x\cdot\cos^2 3^x$.

150. а) $y=\dfrac{\arcsin x}{x^2}$; б) $y=\sin^3\left(4x^3+1\right)$; в) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

151. а) $y=x\cdot ctgx$; б) $y=\ln\sin 5x$; в) $y=3^{2x}\cdot ctg\ln x$.

152. а) $y=\dfrac{x^2+2x}{3-4x}$; б) $y=\ln tgx^3$; в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}$.

153. а) $y=x^2\cdot\left(\sin x+1\right)$; б) $y=\arccos\left(x^3+4^x\right)$; в) $y=\ln\sin\dfrac{x+2}{x}$.

154. а) $y=\dfrac{\arcsin x}{e^x}$; б) $y=2^{\cos 2x}$; в) $y=e^{-x^2}\cdot\ln x$.

155. а) $y=e^x\cdot tgx$; б) $y=\ln\sin\ln x$; в) $y=\cos\dfrac{x}{x+1}$.

156. а) $y=\dfrac{4\cos x}{tgx-2x}$; б) $y=6^{\sin^2 x+4\sin x}$; в) $y=\ln^2\dfrac{x}{x-1}$.

157. а) $y=x^2\cdot 3^x$; б) $y=\sin^3\left(e^x-x^2\right)$; в) $y=\dfrac{\ln\cos x}{x^2+1}$.

158. а) $y=\sqrt{x}\cdot e^x$; б) $y=\ln^3\left(x^2-2\ln x\right)$; в) $y=\dfrac{\sin^2 x}{2+3\cos^2 x}$.

159. а) $y=\dfrac{\ln x}{\sin x}$; б) $y=\arccos\sqrt{1-2^x}$; в) $y=e^{-x}\cdot\ln tgx$.

160. а) $y=\dfrac{\cos x}{e^x}$; б) $y=tg^4\left(x^2+1\right)$; в) $y=\ln\left(\dfrac{x^2+3}{x^3+9x}\right)$.

В задачах **161 – 180** найти дифференциалы второго порядка.

161. $y=\dfrac{1}{x-1}$. **162.** $y=\cos^2 x$. **163.** $y=e^{-x^2}$.

164. $y=e^x\cdot\cos x$. **165.** $y=ctgx$. **166.** $y=\sqrt{1+x^2}$.

167. $y=x^2\cdot\ln x$. **168.** $y=x\cdot\sin x$. **169.** $y=x\cdot e^{-x}$.

170. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **171.** $y=x^3\cdot e^x$. **172.** $y=x^2\cdot\sin x$.

173. $y=x^3\cdot 2^x$. **174.** $y=\sin^2 x$. **175.** $y=\dfrac{x-2}{x+2}$.

176. $y=\ln\left(1+x^2\right)$. **177.** $y=e^x\cdot\sin x$. **178.** $y=2^x\cdot\sin x$.

179. $y=\sqrt{x^3+2}$. **180.** $y=x^2\cdot 3^x$.

В задачах **181 – 200** исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики.

181. $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

182. $y=\dfrac{2x+1}{x+5}$.

183. $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$.

184. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

185. $y=\dfrac{8}{16-x^2}$.

186. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$

187. $y=x+6+\dfrac{9}{x+2}$.

188. $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$.

189. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

190. $y=\dfrac{2x+3}{x+6}$.

191. $y=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$.

192. $y=\dfrac{x^2}{x-3}$.

193. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

194. $y=\dfrac{1}{x^2+9}$.

195. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

196. $y=\dfrac{x^2+6}{x^2-1}$.

197. $y=x^2-\dfrac{8}{x}$.

198. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

199. $y=\dfrac{3x+1}{x+4}$.

200. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

Контрольная работа № 3
«Техника интегрирования и приложения определенного интеграла»

В задачах **201 – 220** найти неопределенные интегралы.

201. а) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$; в) $\int x^3\ln x dx$.

202. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$; б) $\int\frac{x^3dx}{\left(x^4+1\right)^3}$; в) $\int(x-1)e^x dx$.

203. а) $\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$; б) $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int x\,arctgxdx$.

204. а) $\int\frac{(x-4)(x+6)}{x^2}dx$; б) $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}$; в) $\int\ln(5x-1)dx$

205. а) $\int\left(x^3-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{x^2-4}\right)dx$; б) $\int\frac{e^{4x}}{5+2e^{4x}}dx$; в) $\int arctg2xdx$.

206. а) $\int\frac{x^3+x\sin x}{x}dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{\left(x^3-1\right)^3}$; в) $\int\sqrt{x}\ln xdx$.

207. а) $\int\left(e^x+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right)dx$; б) $\int x\cos\left(x^2-4\right)dx$; в) $\int x\cdot 2^{-x}dx$.

208. а) $\int\frac{x^2(x-2)}{x^3}dx$; б) $\int\frac{dx}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int x\cos 3xdx$.

209. а) $\int\left(x^5-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}+\frac{1}{x^2+16}\right)dx$; б) $\int\frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}$; в) $\int\ln 4xdx$.

210. а) $\int\frac{\sqrt{x}+xe^x}{x}dx$; б) $\int\frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos 3x-4}}dx$; в) $\int x\sin 4xdx$.

211. а) $\int\left(\cos x-\frac{1}{\sqrt{36-x^2}}\right)dx$; б) $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$; в) $\int xe^{2x}dx$.

212. а) $\int\frac{(x-3)(x+2)}{x^2}dx$; б) $\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int x\cos 6xdx$.

213. а) $\int\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2-25}\right)dx$; б) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$; в) $\int\arccos 2xdx$.

214. а) $\int\frac{3x^4+x^2\cos x}{x^2}dx$; б) $\int\frac{arctgx}{x^2+1}dx$; в) $\int x\sin xdx$.

215. а) $\int\left(\sin x+\frac{1}{\sqrt{49-x^2}}\right)dx$; б) $\int\left(4x^3+3\right)e^{x^4+3x}dx$; в) $\int x\cdot 3^{x+4}dx$.

216. а) $\int\frac{(x+3)(x+6)}{x^2}dx$; б) $\int\frac{\cos\ln x}{x}dx$; в) $\int(4-3x)e^x dx$

217. а) $\int\left(x^4-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{x^2-1}\right)dx$; б) $\int \sin x\cdot e^{\cos x}dx$; в) $\int x^5\ln x dx$.

218. а) $\int\frac{3\sqrt{x}-5xe^x}{x}dx$; б) $\int\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int x\cdot 4^{-x}dx$.

219. а) $\int\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{81-x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{4x^3+6x}{x^4+3x^2-1}dx$; в) $\int arctg 5x dx$.

220. а) $\int\frac{(x-5)(x+1)}{x^2}dx$; б) $\int e^x\sin e^x\,dx$; в) $\int \ln 7x dx$.

В задачах **221** – **240** вычислить определенные интегралы.

221. а) $\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$; б) $\int_{-1}^1 xe^{-x^2}dx$.

222. а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$; б) $\int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2\ln x dx$.

223. а) $\int_6^{6\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+36}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx$.

224. а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x}$; б) $\int_1^e x\ln x\,dx$.

225. а) $\int_0^2 x(3-x)dx$; б) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx$.

226. а) $\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int_1^3\left(x^2-3x\right)\ln x\,dx$.

227. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2+x\sin x}{x}dx$; б) $\int_0^1\frac{x^3 3^{x^4}}{2}dx$.

228. а) $\int_0^1\left(3x^2+e^x\right)dx$; б) $\int_0^{\ln 5} xe^{-x}dx$.

229. а) $\int_1^e\frac{2x^2+1}{x}dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx$.

230. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2}{1+x^2}dx$; б) $\int_0^{\pi} x\sin\frac{x}{3}dx$.

231. а) $\int_0^4\left(\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}-x^3+2\right)dx$; б) $\int_0^{\ln 2}\frac{e^{3x}}{2-e^{3x}}dx$.

232. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{10+x^2}{1+x^2}dx$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

233. а) $\int_1^e \frac{x^2+8}{x}dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1+\sin x}}dx$.

234. а) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$; б) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$.

235. а) $\int_1^4 \left(\sqrt{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx$; б) $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$.

236. а) $\int_6^{14} \left(\frac{x^3}{3}-10x^2+84x-\frac{520}{3}\right)dx$; б) $\int_1^e \frac{\sqrt[5]{3+\ln x}}{x}dx$.

237. а) $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2}dx$; б) $\int_0^{1/2} \arcsin x dx$.

238. а) $\int_0^1 x(5-x)dx$; б) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$.

239. а) $\int_1^e \frac{4}{x}dx$; б) $\int_0^5 \frac{x^2}{\sqrt{x+4}}dx$.

240. а) $\int_1^{e^2} \frac{2\sqrt{x}+5-7x}{x}dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-x)\cos 2x\,dx$.

В задачах **241 – 260** найти площади фигуры, ограниченных линиями. Сделать чертеж.

241. $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$, $y=0$.

242. $y=x^2$, $y=1$.

243. $y=\frac{1}{4}x^3$, $x-y=0$.

244. $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$.

245. $y=x^2$, $y=6-x$, $y=0$.

246. $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$, $y=0$.

247. $y=-\frac{2}{x}$, $x=1$, $x=5$, $y=0$.

248. $y=x^2+3x$, $y=-x^2-3x$

249. $y^3=x$, $y=1$, $x=8$.

250. $y=x^2+2$, $y=2x+2$.

251. $y=x^2+2$, $y=1-x^2$, $x=0$, $x=1$.

252. $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$.

253. $y=x^2$, $y=9$.

254. $y^2=x+1$, $y=x^2+2x+1$.

255. $y=4-x^2$, $y=0$.

256. $y=x^2$, $y=2-x^2$.

257. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

258. $y=\frac{1}{x}$, $y=x$, $x=2$.

259. $y=3x^2+1$, $y=3x+7$.

260. $y=x^3$, $y=4x$.

261. Вычислить объем тела, которое получается при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y=\frac{4}{x}$, прямыми $x=3$, $x=12$ и осью абсцисс.

262. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y=x-x^2$ в пределах от $x=0$ до $x=1$.

263. Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси Oy трапеции, образованной прямыми $y=3x$, $y=2$, $y=4$ и осью ординат.

264. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $y=x^3$ и отрезком $0\le y\le 8$.

265. Определить объем тела, полученного от вращения кривой $y=\frac{x^2}{4}$ вокруг оси Oy в пределах от $y=1$ до $y=5$.

266. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y=x-x^2$ в пределах от $x=0$ до $x=1$.

267. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2=x$, $y=x^2$.

268. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $x=0$, $y=0$.

269. Вычислить объем тела, которое получается при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной дугой кубической параболы $y=x^3-4x$ и осью абсцисс.

270. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy трапеции, образованной прямыми $y=3x$, $y=2$, $y=4$ и осью ординат.

271. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y=2x^2$ и $y=x^3$.

272. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=e^x$, $x=0$, $x=1$ $y=0$.

273. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболой $y^2=2x$ и прямой $y=2x+2y-3=0$.

274. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y^2=4x$ и $y=x$.

275. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $x=1$, $x=2$ $y=0$.

276. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y^2=8x$.

277. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\ln x$, $x=1$, $x=e$.

278. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $x=y^2-2$ и $y=x$.

279. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y^2=(x-1)^3$ и прямой $x=2$.

280. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=1$, $x=0$.

В задачах **281 – 300** вычислить несобственные интегралы.

281. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$.

282. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

283. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

284. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$.

285. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

286. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$.

287. $\int_0^1 \ln x dx$.

288. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

289. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$.

290. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

291. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$.

292. $\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$.

293. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

294. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$.

295. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

296. $\int_0^{1/3} \frac{dx}{x\ln x}$.

297. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$.

298. $\int_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

299. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

300. $\int_{-\infty}^0 e^x dx$.

Контрольная работа № 4
«Ряды и дифференциальные уравнения»

В задачах **301 – 320** исследовать сходимость ряда.

301. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{100n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

302. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^3+5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}$.

303. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-n+3}{1+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

304. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^{3n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n^2+7\right)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{7n-2}$.

305. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{5n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+4}$.

306. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

307. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2}{(n+1)(n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{5n-1}$.

308. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^3}{4n+2n^3}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+10}$.

309. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{1+4n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}}$.

310. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n}{2n-1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3+1}$.

311. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{4n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{6^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+8}$.

312. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$.

313. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{n(2n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+2}$.

314. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2}{1+2n^2}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^5+7}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{4n^2-1}$.

315. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{7+6n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{3n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+1}}$.

316. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^3+4}$.

317. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+3)}{2n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+5}$.

318. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+1}{n+1}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+3)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[6]{n}}$.

319. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{1+4n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n+3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

320. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8n}{3n-1}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3+7}$.

В задачах **321 – 340** найти область сходимости ряда.

321. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n}\cdot x^n$. **322.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot(x-2)^n$. **323.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+2}\cdot x^n$.

324. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot(x-1)^n$. **325.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+1}\cdot x^n$. **326.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}\cdot(x+4)^n$.

327. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}\cdot x^n$. **328.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n-2}\cdot(x-2)^n$. **329**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\cdot x^n$.

330. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}\cdot(x-3)^n$. **331.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}\cdot x^n$. **332.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot(x-3)^n$.

333. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n+1}\cdot x^n$. **334.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n-3}\cdot(x-4)^n$. **335.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{2n+1}\cdot x^n$.

336. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\cdot(x+1)^n$. **337.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n-4}\cdot x^n$. **338.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}\cdot(x-5)^n$.

339. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\cdot x^n$. **340.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n-3}\cdot(x-4)^n$.

В задачах **341 – 360** разложить в ряд Маклорена функцию.

341. $f(x)=e^{5x}$. **342.** $f(x)=\sin 3x$. **343.** $f(x)=\cos\frac{x}{2}$.

344. $f(x)=\ln(1+x^2)$. **345.** $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$. **346.** $f(x)=e^{x^2}$.

347. $f(x)=\sin\frac{x}{4}$. **348.** $f(x)=\cos x^2$. **349.** $f(x)=\ln(1+4x)$.

350. $f(x)=(1+x)^3$. **351.** $f(x)=e^{-x}$. **352.** $f(x)=\sin x^2$.

353. $f(x)=\cos 3x$. **354.** $f(x)=\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)$. **355.** $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$.

356. $f(x)=\ln(1+2x)$. **357.** $f(x)=\sin\sqrt{x}$. **358.** $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$.

359. $f(x)=\dfrac{1}{1-x^3}$. **360.** $f(x)=e^{6x}$.

В задачах **361 – 380** найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка.

361. а) $y'=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$; б) $y'-\dfrac{2y}{x+3}=x+3$.

362. а) $xy'-y=4$; б) $y'-y\sin x=e^{-\cos x}$.

363. а) $y'=e^{2x-2y}$; б) $y'-\dfrac{y}{x}=x\sin x$.

364. а) $(x+2)y'=y-3$; б) $y'-\dfrac{y}{x}=x^3$.

365. а) $xy'-y=0$; б) $y'-\dfrac{2y}{x}=x^2e^{-x}$.

366. а) $(x+2)y'=y^4$; б) $y'-y\cos x=-\cos x$.

367. а) $y'=\dfrac{1}{y\sin^2 x}$; б) $y'-\dfrac{y}{x+2}=x^2+2x$.

368. а) $xy'=\dfrac{y}{\ln x}$; б) $y'-\dfrac{3y}{x}=x^3e^x$.

369. а) $y'=2^{x-y}$; б) $y'-\dfrac{y}{x}=-2\ln x$.

370. а) $y'=1+y^2$; б) $y'+\dfrac{2y}{x}=x^2$.

371. а) $y'=\dfrac{x+1}{xy}$; б) $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

372. а) $2y'\sqrt{x}=y$; б) $y'-\dfrac{2y}{x}=x^2\cos x$.

373. а) $e^x yy'=e^x+1$; б) $y'+\dfrac{2y}{x+1}=x+1$.

374. а) $y'=\dfrac{x+\sin x}{y}$; б) $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{e^{-x}}{x^2}$.

375. а) $y'=xe^{x^2+1}$; б) $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x}$.

376. а) $y'-y\cos 2x=0$; б) $y'+\dfrac{y}{x}=x^2$.

377. а) $(x-1)y'+y=0$; б) $y'+\dfrac{4y}{x}=\dfrac{e^x}{x^4}$.

378. а) $(1+e^x)yy'=e^x$; б) $y'-\dfrac{3y}{x}=x^3\sin x$.

379. а) $y'+\dfrac{y-2}{x-1}=0$; б) $y'-y=e^x$.

380. а) $x^2y'+y=0$; б) $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$.

В задачах **381 – 400** найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка.

381. а) $y''+16y=0$; б) $y''+y'-6y=4e^x$.
382. а) $y''-8y'+16y=0$; б) $y''+2y'=4x+6$.
383. а) $y''-7y'+6y=0$; б) $y''+y'=6\cos x$.
384. а) $y''-2y'+2y=0$; б) $y''-3y'=6e^{2x}$.
385. а) $y''+10y'+25y=0$; б) $y''+5y'+4y=4x^2-2x-5$.
386. а) $y''-6y'=0$; б) $y''-2y'=5\sin x$.
387. а) $y''+49y=0$; б) $y''-3y'+2y=8e^{3x}$.
388. а) $y''-12y'+36y=0$; б) $y''-5y'=10x+3$.
389. а) $y''-36y=0$; б) $y''+y'=10\cos 2x$.
390. а) $y''+2y'+5y=0$; б) $y''-4y=10e^{-x}$.
391. а) $y''+18y'+81y=0$; б) $y''+2y'+2y=2x^2+4x$.
392. а) $y''+4y'-12y=0$; б) $y''-6y'=6\sin x$.
393. а) $y''+25y=0$; б) $y''-3y'-4y=12e^{-2x}$.
394. а) $y''-20y'+100y=0$; б) $y''+4y'=2-8x$.
395. а) $y''-7y'=0$; б) $y''+2y'-3y=14\cos x$.
396. а) $y''+2y'+10y=0$; б) $y''-y'=12e^{-3x}$.
397. а) $y''+6y'+9y=0$; б) $y''-y'-6y=6x^2-4x-3$.
398. а) $y''-64y=0$; б) $y''-4y'=20\sin 2x$.
399. а) $y''+81y=0$; б) $y''-2y'=8e^{4x}$.
400. а) $y''-14y'+49y=0$; б) $y''-2y'=4x$.

Контрольная работа № 5
«Вероятность и законы распределения»

401. В хоккейном матче встречаются две команды. В первой команде – 9 человек старшего возраста и 2 человека среднего, во второй – 4 старшего и 7 среднего. Случайным образом выбран один человек, он оказался старшего возраста. Определить вероятность того, что он из второй команды?

402. В группе 29 студентов, из них 5 неуспевающих. Новый преподаватель приходит в группу и случайным образом вызывает к доске 4 студентов. Определить вероятность того, что к доске будет вызван один неуспевающий.

403. Театральный кассир имеет 10 билетов в партер и 20 билетов в ложу на премьеру спектакля. Покупатель приобретает 6 билетов. Найти вероятность того, 4 из них – в партер и 2 билета в ложу.

404. В ящике имеется 24 хороших и 6 бракованных радиоламп. Из ящика извлекается 4 радиолампы. Найти вероятность того, что 3 из них будут исправными.

405. В отдел технического контроля поступило 17 книг, из которых 5 имеют дефект, незаметный на первый взгляд. Сотрудник отдела наугад выбирает 4 книги. Найти вероятность того, что среди отобранных книг будет только одна с дефектом.

406. В партии содержится 22 детали, из них 15 деталей высшего качества. Из партии извлекается 5 деталей. Найти вероятность того, что из 5 взятых деталей 3 будут высшего качества.

407. В цехе работают 7 мужчин и 5 женщин. По списку наугад отобраны 4 человека. Найти вероятность того, что среди отобранных будут 3 женщины.

408. В группе из 30 человек 12 отдают предпочтение бегу, остальные стрельбе. Случайным образом для соревнований отбирают команду из 3 человек. Какова вероятность того, что среди отобранных, два человека, отдают предпочтение бегу?

409. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

410. В ящике находятся 20 красных перчаток, 10 черных и 8 белых. Найти вероятность того, что 2 случайно вытащенные перчатки составят пару.

411. Три мяча выбирают случайным образом из коробки, содержащей 5 белых, 6 красных и 4 желтых мяча. Найти вероятность того, что все три мяча красные.

412. Из партии в 40 изделий производится проверка наугад 4-х. Какова вероятность обнаружить брак, если в партии 1-о изделие бракованное.

413. В сейфе находятся 35 музыкальных шкатулок, 4 из них неисправны. Какова вероятность того, что при срочной отгрузке партии из 5 шкатулок будет получена рекламация на товар.

414. В урне 5 белых и 5 черных шаров. Наугад берут 3 шара. Какова вероятность того, что один шар белый, а два – черные?

415. В урне находится 6 черных и 8 белых шаров. Случайным образом вынимают 3 шара. Какова вероятность, что среди них два белых, один черный.

416. В партии 12 деталей, 5 из них бракованные. Какова вероятность того, что 2 наугад выбранные детали окажутся бракованными?

417. Случайным образом выбирают три шара из 12, среди которых 5 – белые и 7 – черные. Найти вероятность того, что среди выбранных два белых шара.

418. Из партии из 40 картин производится проверка наугад 4-х. Какова вероятность обнаружить брак, если в партии 1-а картина бракованная.

419. Из урны, содержащей 4 белых, 5 черных, 6 красных шаров извлекают 3 шара. Какова вероятность того, что 3 шара будут одного цвета?

420. В партии из 100 изделий 5 бракованные. Какова вероятность того, что из 4-х наугад выбранных изделий два окажутся бракованными?

421. Вероятность попадания при одном броске в ворота для первого хоккеиста равна 0,72 для второго – 0,93. Каждый хоккеист делает по одному броску в ворота. Найти вероятность того, что в ворота попадет первый и второй хоккеист?

422. По мишени производится залп из 2-х снайперских винтовок и пистолета. Вероятность поражения цели из винтовки – 0,7, из пистолета – 0,5. Найти вероятность поражения цели в залпе.

423. Разрушение моста производится 2-я диверсионными группами. Каждая из них разрушает мост с вероятностями 0,8 и 0,6. Найти вероятность разрушения моста в случае поручения этого всем 2-м группам одновременно.

424. Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,35, для второго станка эта вероятность равна 0,1. Найти вероятность того, что в течение смены выйдет из строя первый или второй станок.

425. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность остановки на протяжении одного часа для 1-го станка составляет 0,2, для 2-го станка – 0,1, для 3-го – 0,15. Найти вероятность бесперебойной работы всех трех станков в течение часа.

426. Вероятность безотказной работы автомобиля равна 0,9. Автомобиль перед выходом на линию осматривается двумя механиками. Вероятность того, что первый механик обнаружит неисправность в автомобиле, равна 0,8, а второй – 0,9. Если хотя бы один механик обнаружит неисправность, то автомобиль отправляется на ремонт. Найти вероятность того, что автомобиль будет выпущен на линию.

427. В ящике 6 белых и 4 черных шара. В случайном порядке оттуда, один за другим, вынимают все шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

428. Вероятность того, что деталь изготовлена на первом станке будет первосортной равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, а на втором – три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

429. Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,2, для второго станка эта вероятность равна 0,05. Найти вероятность того, что в течение смены выйдет из строя первый или второй станок.

430. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность ответить на вопрос равна 0,7, на второй – 0,8; а на третий 0,6. Найти вероятность того, что студент ответит на все вопросы.

431. В ящике имеется 10 белых и 7 черных шаров. Наудачу вынимают дважды по одному шару (без возвращения). Найти вероятность того, что первый и второй шар белые.

432. Вероятность попадания при одном броске в ворота для первого хоккеиста равна 0,88 для второго – 0,80. Каждый хоккеист делает по одному броску в ворота. Найти вероятность того, что в ворота попадет первый или второй хоккеист?

433. В ящике имеется 8 белых и 12 черных шаров. Наудачу извлекли 3 шара по одному (без возвращения). Найти вероятность того, что все три шара черные.

434. В первой лотерее из 34 билетов 20 выигрышных, во второй – из 25 билетов 15 выигрышных. Наугад выбирают по одному билету из каждой лотереи. Какова вероятность того, что оба билета выигрышные.

435. Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,15, а для второго станка эта вероятность равна 0,22. Найти вероятность того, что в течение смены выйдет из строя первый и второй станок.

436. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наудачу и последовательно извлекают по одному до появления черного шара. Найти вероятность того, что придется производить четвертое извлечение.

437. Три автомобиля одновременно проходят таможенный досмотр, причем вероятность успешного прохождения досмотра для каждого из них равна соответственно 0,9, 0,8, 0,7. Найти вероятность того, что хотя бы один автомобиль пройдет досмотр.

438. В ящике имеется 15 белых и 8 черных шаров. Наудачу вынимают дважды по одному шару (без возвращения). Найти вероятность того, что первый и второй шар белые.

439. Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0,6, 0,5, 0,4. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов в мишени будет хотя бы одна пробоина.

440. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

441. Из партии 1000 ламп 340 принадлежат к 1 партии, 280 – ко второй партии, остальные к третьей. В первой партии 6 % брака, во второй – 5 %, в третьей – 4 %. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа – бракованная.

442. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 бегунов и 4 велосипедиста. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника – 0,8, для бегуна – 0,9, для велосипедиста – 0,7. Наудачу выбранный спортсмен выполнил норму. Найти вероятность того, что этот спортсмен – лыжник.

443. В телеграфном сообщении «точка» и «тире» встречаются в соотношении три к двум. Известно, что искажаются 25% «точек» и 20% «тире». Найти вероятность того, что принят переданный сигнал, если принято «тире».

444. Имеется 3 одинаковых урны. В первой 11 белых и 7 красных шаров, во второй 4 белых и 5 красных шаров, в третьей 8 белых и 10 красных шаров. Из наудачу выбранной урны вытащили 2 шара. Они оказались белыми. Найти вероятность того, что извлечение произведено из первой урны.

445. Предприятие выпускает за смену изделия трех типов в количестве 160, 430 и 360 штук каждого типа. ОТК ставит штамп либо «БРАК» либо «ЭКСПОРТ». Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие пойдет на экспорт, если вероятности этого для каждого изделия вида I, II и III соответственно равны 0,9, 0,8 и 0,6.

446. С первого автомата поступает 45% деталей, со второго – 30%, с третьего – 25%. Среди деталей первого автомата 5% негодных, второго – 10%, третьего – 8%. Поступившая на сборку деталь годная. Какова вероятность того, что она изготовлена на втором автомате?

447. Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы A, B и C. На долю фирмы A приходиться 50% общего объема поставок, B – 30% и C – 20%. Из практики известно, что 10% поставляемых фирмой A деталей бракованные, фирмой B – 5% и фирмой C – 6%. Какова вероятность, что взятая наугад и оказавшаяся бракованная деталь получена от фирмы A?

448. Отдел закупок женского платья большого столичного торгового комплекса приобретает 20% своего товара у фабрики A, 30% у фабрики $Б$ и оставшиеся 50% у разных мелких поставщиков. К концу сезона распространяется 80% продукции фабрики A, 75% продукции фабрики $Б$ и 90% продукции мелких поставщиков. Какова вероятность, что платье, оставшееся непроданным в конце сезона, было произведено на фабрике A?

449. В ящике 25 белых и 10 черных шаров. Один шар вынут и отложен в сторону. Какова вероятность того, что следующий вынутый шар будет белым.

450. Имеются три партии деталей по 64 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равны 30, 20, 40. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Найти вероятность того, что деталь была извлечена из первой партии.

451. Две литейные машины изготавливают по 250 однотипных отливок в смену, которые хранятся в одном месте. Для первой машины брак составляет 3 %, а для второй – 2 %. Найти вероятность того, что наудачу взятая отливка будет годной.

452. Имеется три партии ламп по 20, 30, 50 штук в каждой. Вероятность того, что лампы проработали заданное время, равна для каждой партии соответственно 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что выбранная наудачу лампа проработает заданное время?

453. В ящике лежат одинаковые детали. 12 деталей изготовлены на первом заводе – из них брак 10 %, 20 деталей изготовлены на втором заводе – из них брак 30 %, 18 деталей изготовлены на третьем заводе – из них брак 10 %. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь – хорошая.

454. В сборочный цех поступают детали с 3-х станков. 1-й станок дает 3% брака, 2-й – 1%, 3-й – 2%. Определить вероятность попадания на сборку набракованной детали, если с каждого станка поступило, соответственно, 500, 200, 300 деталей в сборочный цех.

455. Для рождественских подарков приготовлены наборы 2-х типов, отличных друг от друга только маркой сока. В 1-ом наборе – сок «Манго», общее число 10, а во 2-ом «Ананасовый», общее число 20. Распорядитель вечера попросил отложить 2 набора для заболевших детей. Какова вероятность, что 1-му получившему подарок достанется набор с «Ананасовым» соком.

456. Три автоматические линии производят микросхемы. Первая линия производит 20% всей продукции, вторая – 30%, третья – 50%. Доля брака в продукции каждой линии соответственно составляет 1%, 2%, 5%. Наудачу были выбраны три микросхемы. Какая вероятность того, что все они без брака? Указание. Найдите сначала вероятность того, что одна выбранная микросхема без брака.

457. В первой урне находятся 3 шара белого цвета и 1 шар черного цвета, во второй – 2 белого и 1 синего, в третьей – 4 белого и 2 красного цвета. Из первой и второй урны наудачу извлекают по одному шару и кладут в третью. После этого из третьей вынимают один шар. Найти вероятность того, что он окажется белым.

458. Узел состоит из двух независимо работающих деталей, исправность каждой необходима для работы узла. Первая из деталей за рассматриваемый промежуток времени остается годной с вероятностью 0,8, а вторая – 0,9. Узел вышел из строя. Какова вероятность того, что это произошло из-за неисправности лишь второй детали?

459. Студент сдает зачет, причем получает один вопрос из трех разделов. Первые два раздела одинаковы по объему, а третий в два раза больше первого. Студент знает ответы на 70 % вопросов первого раздела, на 50 % вопросов второго раздела и на 80 % вопросов третьего. Студент зачет сдал. Найти вероятность того, что ему попался вопрос из второго раздела.

460. В двух одинаковых урнах содержатся черные и красные шары: в первой – 2 черных и 7 красных, во второй – 5 черных и 10 красных. Из наудачу выбранной урны извлечен шар, который оказался красным. Найти вероятность того, что извлеченный шар оказался из первой урны.

В задачах **461 – 480** найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение σ_X, если закон распределения случайной величины X задан таблицей:

461.

x_i	1	4	5	6	8
p_i	0,2	0,1	0,1	0,3	0,3

462.

x_i	-5	-4	-3	0	2
p_i	0,1	0,2	0,1	0,1	0,5

463.

x_i	0	1	2	3	5
p_i	0,2	0,2	0,2	0,1	0,3

464.

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

465.

x_i	-5	-4	-3	0	1
p_i	0,2	0,2	0,3	0,1	0,2

466.

x_i	-1	0	2	4	7
p_i	0,2	0,1	0,1	0,3	0,3

467.

x_i	-3	-1	2	4	5
p_i	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

468.

x_i	-7	-2	3	4	5
p_i	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1

469.

x_i	1	3	4	7	8
p_i	0,5	0,1	0,1	0,2	0,1

470.

x_i	0	2	3	5	6
p_i	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2

471.

x_i	-1	0	1	3	4
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

472.

x_i	-2	-1	0	2	3
p_i	0,2	0,4	0,1	0,2	0,1

473.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

474.

x_i	0	1	3	5	6
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

475.

x_i	2	3	5	6	7
p_i	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2

476.

x_i	3	4	5	6	8
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

477.

x_i	-4	-2	0	1	3
p_i	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

478.

x_i	2	3	5	6	8
p_i	0,2	0,1	0,5	0,1	0,1

479.

x_i	1	3	4	6	7
p_i	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

480.

x_i	-2	-1	0	1	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

В задачах **481 – 500** заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X. Найти: вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.

481. $a=15$, $\sigma=2$, $\alpha=9$, $\beta=19$.

482. $a=2$, $\sigma=4$, $\alpha=-5$, $\beta=6$.

483. $a=0$, $\sigma=20$, $\alpha=-40$, $\beta=40$.

484. $a=3$, $\sigma=0{,}5$, $\alpha=2$, $\beta=4$.

485. $a=37{,}5$, $\sigma=0{,}5$, $\alpha=37$, $\beta=39$.

486. $a=0$, $\sigma=1$, $\alpha=-1{,}5$, $\beta=2$.

487. $a=2$, $\sigma=5$, $\alpha=-3$, $\beta=6$.

488. $a=-3$, $\sigma=2$, $\alpha=-4$, $\beta=0$.

489. $a=10$, $\sigma=5$, $\alpha=9$, $\beta=15$.

490. $a=24$, $\sigma=1$, $\alpha=23$, $\beta=26$.

491. $a=-1$, $\sigma=3$, $\alpha=-4$, $\beta=2$.

492. $a=0$, $\sigma=30$, $\alpha=-60$, $\beta=60$.

493. $a=12$, $\sigma=5$, $\alpha=10$, $\beta=15$.

494. $a=2$, $\sigma=0{,}3$, $\alpha=1{,}4$, $\beta=2{,}6$.

495. $a=0$, $\sigma=0{,}4$, $\alpha=-1$, $\beta=0{,}5$.

496. $a=1$, $\sigma=3$, $\alpha=-2$, $\beta=4$.

497. $a=10{,}5$, $\sigma=4$, $\alpha=8{,}5$, $\beta=11{,}5$.

498. $a=13$, $\sigma=2$, $\alpha=10$, $\beta=17$.

499. $a=6$, $\sigma=1$, $\alpha=4$, $\beta=7$.

500. $a=-4$, $\sigma=5$, $\alpha=-5$, $\beta=0$.

Контрольная работа № 6
«Математическая статистика»

В задачах **501 – 520** построить полигон частот, найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию по данному распределению выборки:

501.

x_i	164	165	168	171	172	174	177	178	181
n_i	2	3	5	7	10	11	6	4	2

502.

x_i	22	26	28	30	32	34	36	38	40
n_i	6	8	12	15	18	16	10	8	7

503.

x_i	101	102	103	104	105	106	107	108	109
n_i	2	3	5	7	9	5	4	3	2

504.

x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
n_i	3	4	5	6	8	12	6	4	1

505.

x_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18
n_i	6	8	10	12	13	14	8	6	3

506.

x_i	166	167	170	173	175	177	178	179	183
n_i	2	3	5	6	11	10	6	5	2

507.

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
n_i	4	11	12	14	15	20	10	9	5

508.

x_i	82	83	84	85	86	87	88	89	90
n_i	2	3	6	8	10	5	3	2	1

509.

x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8
n_i	5	1	3	7	10	14	6	2	1

510.

x_i	5	15	25	35	45	55	65	75	85
n_i	2	5	7	8	11	6	5	4	2

511.

x_i	165	166	170	172	174	175	180	182	184
n_i	3	4	6	7	9	10	5	4	2

512.

x_i	31	34	36	38	40	41	42	44	45
n_i	8	10	11	14	16	14	12	9	6

513.

x_i	74	75	76	77	78	79	80	81	82
n_i	2	3	5	6	8	6	5	3	2

514.

x_i	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
n_i	5	1	3	7	10	14	6	2	1

515.

x_i	5	10	15	20	25	30	35	40	45
n_i	1	6	7	8	11	7	5	3	2

516.

x_i	156	158	159	162	165	166	168	170	171
n_i	1	4	7	7	9	11	6	4	1

517.

x_i	43	45	47	49	51	53	55	57	59
n_i	4	11	12	14	15	20	10	9	5

518.

x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
n_i	2	3	5	6	8	6	5	3	2

519.

x_i	20	30	40	50	60	70	80	90	100
n_i	5	1	3	7	10	14	6	2	1

520.

x_i	14	16	18	20	22	24	26	28	30
n_i	4	8	10	12	11	10	11	8	6

В задачах **521 – 540** по данным n независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x}$ и исправленное среднее квадратическое отклонение s. Оценить истинное значение измеряемой величины при помощи доверительного интервала с надежностью γ.

521. $n=10$, $\overline{x}=12{,}6$, $s=3$, $\gamma=0{,}95$.

522. $n=12$, $\overline{x}=6{,}2$, $s=2{,}3$, $\gamma=0{,}99$.

523. $n=16$, $\overline{x}=24{,}1$, $s=6$, $\gamma=0{,}95$.

524. $n=8$, $\overline{x}=12{,}2$, $s=4$, $\gamma=0{,}99$.

525. $n=15$, $\overline{x}=2{,}6$, $s=1{,}2$, $\gamma=0{,}95$.

526. $n=7$, $\overline{x}=18{,}3$, $s=5$, $\gamma=0{,}99$.

527. $n=9$, $\overline{x}=30{,}2$, $s=8$, $\gamma=0{,}95$.

528. $n=17$, $\overline{x}=8{,}4$, $s=6$, $\gamma=0{,}99$.

529. $n=20$, $\overline{x}=11{,}5$, $s=5{,}8$, $\gamma=0{,}95$.

530. $n=11$, $\overline{x}=13{,}1$, $s=2{,}1$, $\gamma=0{,}99$.

531. $n=25$, $\overline{x}=52{,}1$, $s=10$, $\gamma=0{,}95$.

532. $n=40$, $\overline{x}=14{,}1$, $s=5$, $\gamma=0{,}99$.

533. $n = 60$, $\overline{x} = 16{,}8$, $s = 4{,}3$, $\gamma = 0{,}95$.

534. $n = 19$, $\overline{x} = 2{,}5$, $s = 1{,}2$, $\gamma = 0{,}99$.

535. $n = 8$, $\overline{x} = 26{,}1$, $s = 6{,}4$, $\gamma = 0{,}95$.

536. $n = 45$, $\overline{x} = 21{,}2$, $s = 7$, $\gamma = 0{,}99$.

537. $n = 7$, $\overline{x} = 15{,}6$, $s = 4{,}8$, $\gamma = 0{,}95$.

538. $n = 16$, $\overline{x} = 5{,}2$, $s = 2{,}9$, $\gamma = 0{,}99$.

539. $n = 12$, $\overline{x} = 9{,}5$, $s = 3{,}2$, $\gamma = 0{,}95$.

540. $n = 10$, $\overline{x} = 26{,}2$, $s = 6$, $\gamma = 0{,}99$.

В задачах **541 – 560** построить поле корреляции и найти линейный коэффициент парной корреляции.

541.

x_i	8,5	5,5	4,9	4,2	3,8	3,5	3,8	3,7	3,6	3,5
y_i	5	10	12	15	20	22	25	30	35	36

542.

x_i	60,6	59,5	60,8	59,4	60,4	60,8	60,6	59,3	60,3	62,3
y_i	3,4	3,5	3,7	3,4	3,6	3,5	3,1	3,3	3,6	4,9

543.

x_i	24,6	41,1	29,5	27,6	31,9	38,8	39,2	40,2	41,8	41,3
y_i	5,0	9,0	4,8	5,4	7,5	6,6	7,8	9,3	9,6	8,0

544.

x_i	78	84	87	79	106	106	67	98	77	87
y_i	137	148	135	154	157	195	139	162	152	162

545.

x_i	80,7	87,2	90,8	94,7	81,4	89,2	71,3	86,2	71,4	77,1
y_i	20,3	12,8	9,2	5,3	18,6	10,8	28,7	13,8	28,6	22,9

546.

x_i	25	28	29	27	29	28	29	24	25	23
y_i	55	48	40	42	27	35	28	58	54	52

547.

x_i	3,2	4,3	4,7	5,3	5,8	6,4	6,6	7,0	7,2	7,5
y_i	7,4	7,1	5,8	4,9	3,9	3,3	3,0	2,8	2,6	2,2

548.

x_i	97	73	79	99	86	91	85	77	89	95
y_i	161	131	135	147	139	151	135	132	161	159

549.

x_i	5,1	13,0	2,0	10,5	2,1	4,3	7,6	43,4	18,9	50,1
y_i	1,4	3,5	0,9	2,5	6,6	0,8	1,6	15,1	12,7	10,9

550.

x_i	6,0	6,5	6,8	7,0	7,4	8,0	8,2	8,7	9,0	10,4
y_i	10	11	12	13	15	17	18	20	20	25

551.

x_i	113	122	118	119	102	100	103	113	124	95
y_i	44	40	47	47	49	65	54	59	36	70

552.

x_i	9,4	2,5	3,9	4,3	2,4	6,0	6,3	5,2	6,8	8,2
y_i	35,8	22,5	28,3	26,0	18,4	31,8	30,5	29,5	41,5	41,7

553.

x_i	81	77	85	79	93	100	72	90	71	89
y_i	124	131	146	139	143	159	135	152	127	154

554.

x_i	1,4	2,6	4,1	5,4	5,9	6,3	6,6	7,0	7,2	7,5
y_i	2,3	1,9	4,8	3,6	7,1	9,3	9,5	9,8	10,2	10,5

555.

x_i	114	112	112	122	122	108	114	113	108	102
y_i	54	48	44	39	26	58	28	47	58	62

556.

x_i	28	25	33	49	32	24	32	24	36	32
y_i	34	28	38	47	36	27	28	29	31	37

557.

x_i	106	113	123	82	104	112	116	106	120	105
y_i	74	54	36	75	51	35	47	33	28	58

558.

x_i	8	11	9	8	6	12	15	7	6	13
y_i	77	81	83	81	73	85	87	70	67	95

559.

x_i	4,2	4,3	4,7	5,1	5,5	6,3	6,4	7,2	7,5	8,8
y_i	2,2	2,5	2,9	3,2	3,3	3,9	4,6	5,8	6,5	7,1

560.

x_i	30	41	52	60	73	80	92	100	112	125
y_i	19	25	30	32	37	40	45	47	51	53

В задачах **561 – 580** найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным таблицы.

561.

x_i	6,0	6,5	6,8	7,0	7,4	8,0	8,2	8,7	9,0	10,0
y_i	10	11	12	13	15	17	18	20	20	25

562.

x_i	30	41	52	60	73	80	92	100	112	125
y_i	19	25	30	32	37	40	45	47	51	53

563.

x_i	97	73	79	99	86	91	85	77	89	95
y_i	161	131	135	147	139	151	135	132	161	159

564.

x_i	25	28	29	27	29	28	29	24	25	23
y_i	55	48	40	42	27	35	28	58	54	52

565.

x_i	28	25	33	49	32	24	32	24	36	32
y_i	34	28	38	47	36	27	38	29	43	37

566.

x_i	20,0	12,8	9,2	5,3	18,6	10,8	28,7	13,8	28,6	22,9
y_i	15,5	8,4	6,6	3,5	10,1	3,3	24,2	10,2	20,8	19,2

567.

x_i	78	84	87	79	106	106	67	98	77	87
y_i	137	148	135	154	157	195	139	162	152	162

568.

x_i	81	77	85	79	93	100	72	90	71	89
y_i	124	131	146	139	143	159	135	152	127	154

569.

x_i	60,6	59,6	60,8	59,4	60,4	60,8	60,6	59,3	60,3	62,3
y_i	3,4	3,1	3,7	3,4	3,6	3,3	3,1	3,3	3,6	4,7

570.

x_i	8	11	9	8	6	12	15	7	6	13
y_i	77	81	83	81	73	85	87	70	67	95

571.

x_i	24,6	41,1	29,5	27,6	31,9	38,8	39,2	40,2	41,6	42,0
y_i	5,0	9,0	4,8	5,4	7,4	6,6	7,8	9,3	9,6	10,2

572.

x_i	8,0	5,0	4,9	4,0	3,8	3,5	3,8	3,7	3,6	3,5
y_i	5	10	12	15	20	22	25	30	35	36

573.

x_i	114	112	112	122	122	108	114	113	108	102
y_i	54	48	44	39	26	58	45	47	58	62

574.

x_i	113	122	118	119	102	100	103	113	124	95
y_i	44	40	47	47	49	65	54	59	36	70

575.

x_i	60,6	59,3	60,3	62,3	60,2	59	61,4	58,9	59	59,2
y_i	3,1	3,3	3,6	4,7	3,2	3,3	4,1	3,4	3,2	3,4

576.

x_i	87	79	106	106	67	98	77	87	86	110
y_i	135	154	157	195	139	162	152	162	150	173

577.

x_i	40,3	41,3	47,0	54,7	53,3	46,7	71,1	58,8	67,9	65,7
y_i	6,0	8,0	10,8	9,9	10,0	10,0	13,2	10,0	13,9	12,0

578.

x_i	8	11	9	8	6	12	15	7	6	13
y_i	77	81	83	75	73	85	87	70	67	95

579.

x_i	4,0	3,8	3,5	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,0	3,0
y_i	15	20	22	25	30	35	36	40	50	60

580.

x_i	85	79	93	100	72	90	71	89	82	111
y_i	146	139	143	159	135	152	127	154	127	162

В задачах **581 – 600** используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки.

581.

Рост	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Число человек	10	14	26	28	12	8	2

582.

Рост	150-154	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178
Число человек	2	8	24	26	15	15	10

583.

Рост	152-156	156-160	160-164	164-168	168-172	172-176	176-180
Число человек	3	12	12	25	23	15	10

584.

Рост	156-160	160-164	164-168	168-172	172-176	176-180	180-184
Число человек	12	16	26	23	22	6	5

585.

Рост	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182	182-186
Число человек	12	14	24	20	19	8	3

586.

Рост	160-164	164-168	168-172	172-176	176-180	180-184	184-188
Число человек	9	12	14	17	24	12	12

587.

Рост	164-168	168-172	172-176	176-180	180-184	184-188	188-192
Число человек	16	12	18	15	32	2	5

588.

Рост	148-152	152-156	156-160	160-164	164-168	168-172	172-176
Число человек	1	24	16	18	24	11	6

589.

Рост	152-156	156-160	160-164	164-168	168-172	172-176	176-180
Число человек	9	12	15	18	26	8	12

590.

Рост	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182	182-186
Число человек	10	9	14	25	26	8	8

591.

Рост	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Число человек	4	8	20	24	18	14	12

592.

Рост	150-154	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178
Число человек	2	6	16	28	24	12	12

593.

Рост	152-156	156-160	160-164	164-168	168-172	172-176	176-180
Число человек	6	8	10	16	32	18	10

594.

Рост	156-160	160-164	164-168	168-172	172-176	176-180	180-184
Число человек	10	8	16	17	25	14	10

595.

Рост	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182	182-186
Число человек	14	10	25	19	12	14	6

596.

Рост	160-164	164-168	168-172	172-176	176-180	180-184	184-188
Число человек	16	2	18	18	22	14	10

597.

Рост	164-168	168-172	172-176	176-180	180-184	184-188	188-192
Число человек	2	8	10	16	29	18	17

598.

Рост	148-152	152-156	156-160	160-164	164-168	168-172	172-176
Число человек	3	12	14	25	21	15	10

599.

Рост	160-164	164-168	168-172	172-176	176-180	180-184	184-188
Число человек	6	7	21	24	16	14	12

600.

Рост	150-154	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178
Число человек	8	12	27	20	12	14	7

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Баврин И.И. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: «Академия», 2008. (Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений).
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. 9-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2004. – 479 с. (Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вуза).
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебное пособие для втузов. Т. 1 / Н.С. Пискунов. – изд., стер. – М.: «Интеграл Пресс», 2009. – 416 с. (Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вуза).
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебное пособие для втузов. Т. 2 / Н.С. Пискунов. – изд., стер. – М.: «Интеграл Пресс», 2009. – 544 с. (Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вуза).
5. Шипачёв В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – 10 изд., стер. – М.: Высшая школа, 2010. – 479 с. (Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений).

Дополнительная литература:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. – 5-е изд. – М.: Наука, 1998. – 320 с.
2. Беклемишева Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учебное пособие /Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович и др – М.: Наука, 1997. – 496 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие. – СПб: Профессия, 2007. – 432 с.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов. – 3-е изд. – М.: Наука, 1989. – 464 с. (Допущено Министерством высшего и среднего образования СССР в качестве учебника для студентов инженерно-технических специальностей вузов).
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учебник для вузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 10-е изд., стер. – М.: «Академия», 2005. – 576 с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учебное пособие для вузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 480с. (Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений).
7. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Издательский центр «Академия», 2005.

8. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистике: Учебное пособие. – 9-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2004. – 404 с.
9. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: Учебное пособие. /Г.И. Запорожец – 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1998. – 460 с.
10. Кудрявцев А.В. Краткий курс математического анализа. Т.1 Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной. Ряды.: Учебник – 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 400 с.
11. Кудрявцев А.В. Краткий курс математического анализа. Т.2 Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменной. Гармонический анализ.: Учебник – 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 424 с.
12. Методы прикладной математики в пожарно-технических задачах. Под ред. Брушлинского Н.Н. М.: ВИПТШ, 1983. – 140 с.
13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального исчисления: в 3-х томах. Т. 1. / Г.М. Фихтенгольц; ред. А.А. Флоринского. – 8-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ: Лаборатория знаний, 2003 – 680 с. (Рекомендован Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов физических и механико-математических специальностей высших учебных заведений).
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального исчисления: в 3-х томах. Т. 2. / Г.М. Фихтенгольц; ред. А.А. Флоринского. – 8-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ: Лаборатория знаний, 2003 – 864 с. (Рекомендован Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов физических и механико-математических специальностей высших учебных заведений).
15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального исчисления: в 3-х томах. Т. 3. / Г.М. Фихтенгольц; ред. А.А. Флоринского. – 8-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ: Лаборатория знаний, 2003 – 728 с. (Рекомендован Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов физических и механико-математических специальностей высших учебных заведений).
16. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. – М.: Техносфера, 2003. – 320 с. (Допущено УМО вузов Российской Федерации в области прикладной математики в качестве учебного пособия для высших учебных заведений).
17. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов/ В.С. Шипачев. – 3-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 304 с.
18. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1998. – 289 с.