Министерство сельского хозяйства РФ
Федеральное агентство по сельскому хозяйству
ФГОУ ВПО Тюменская государственная сельскохозяйственная академия

Математический анализ

Программа, методические указания и задания для контрольной работы для студентов ИДО направления подготовки 080100 «Экономика»

Тюмень-2012

Утверждено
Редакционно-издательским Советом ТГСХА в качестве *методических указаний*

Программа, методические указания и задания для выполнения контрольной работы для студентов заочной формы обучения составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математический анализ»

Составители: Плотникова Т.И. - старший преподаватель кафедры математики, Якобюк Л.И. - заведующая кафедрой математики.

Содержание

Введение

Знания, приобретаемые студентом в результате изучения математики, играют важную роль в процессе его обучения в институте. Они необходимы для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин.

В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных технических задач, применяются в экономике и планировании.

Благодаря изучению математики студент приобретает также навыки логического мышления, необходимые каждому специалисту.

Учебные планы экономических специальностей вузов предусматривают три самостоятельных курса:

1.«Линейная алгебра».
2.«Математический анализ».
3.«Теория вероятностей и математическая статистика».
4.«Эконометрика».

Объем и содержание этих курсов определяются программами, утвержденными Учебно-методическим управлением по вузам Министерства высшего и среднего специального образования РФ, и не зависят от формы обучения (дневное, вечернее, заочное), но методика изучения их при различных формах обучения различна. Все дополнительные сведения, связанные, например, со спецификой учебных планов или с методикой изучения отдельных вопросов, (последовательность изложения материала и распределение контрольных работ и т.п.), сообщаются студентам кафедрами математики вузов дополнительно к настоящему пособию.

Методика изучения математики в высшем учебном заведении студентами заочниками

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом по математическим курсам; она складывается из чтения учебников, решения задач, выполнения контрольных заданий. В помощь заочникам институты организуют чтение лекций и практические занятия. Кроме этого студент может обратиться к преподавателю с вопросами для письменной или устной консультации. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Но студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь преподавателя будет достаточно эффективной.

Завершающим этапом изучения каждого из математических курсов является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые по их простоте опущены в учебнике), воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи.

2. Особое внимание следует обращать на определения основных понятий курса, которые отражают количественную сторону или пространственные свойства реальных

объектов и процессов и возникают в результате абстракции из этих свойств и процессов. Без этого невозможно успешное изучение математики. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения. И уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждений. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схемы доказательства сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих или не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п.

На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны чисто, аккуратно и расположены по порядку. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей

6. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой. Чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запомнились. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей для решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный.

Полезно до начала вычислений составить краткий план решения задачи.

3. Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать и не замазывать, а зачеркнуть.

Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения, например при графической проверке решения, полученного путем вычислений, то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие, и, по возможности, в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны) входящих в нее букв. В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим или

геометрическим содержанием, то полезно прежде всего проверить размерность полученного ответа.

Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику.

Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, имеют целью помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала.

В случае необходимости надо еще раз внимательно разобраться в материале учебника, порешать задачи.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, заключающейся в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате применения механически заученных формул, без понимания существа дела. Можно сказать, что умение решать задачи является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультаций.

2. В своих запросах студент должен точно указывать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях или в доказательстве теоремы, или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать, какой это учебник, год его издания и страницу, где рассмотрен затрудняющий его вопрос, и что именно его затрудняет. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

3. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

Контрольные работы

1. В процессе изучения математических курсов студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых - оказать студенту помощь в его работе. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса; указывают на имеющиеся у него пробелы, на

желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем (письменной или устной).

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания до решения достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

3.Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю-рецензенту указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться не подготовленным к устному экзамену и зачету.

4.Не рекомендуется присылать в институт одновременно несколько работ - это не дает возможности рецензенту своевременно указать студенту на допускаемые им ошибки и удлиняет срок рецензирования работ.

5.Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления преподавателю прорецензированных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета или экзамена.

Лекции и практические занятия

Во время лабораторно-экзаменационных сессий для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия. Они носят по преимуществу обзорный характер. Их цель - обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие факты, указать главные практические приложения, факты из истории науки. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно разобраны отдельные вопросы курса (например, методы приближенных вычислений и др.); могут быть также рассмотрены отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых пособиях.

Для студентов, имеющих возможность заниматься в группах на учебно-консультационных пунктах, лекции и практические занятия проводятся в течение всего учебного года. Эти лекции и практические занятия носят более систематический характер, однако и они призваны оказать только помощь студенту в его самостоятельной работе.

Зачет и экзамен

На экзаменах и зачетах выясняется прежде всего отчетливое усвоение всех теоретических и прикладных вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решение задач в простейших случаях должны проделываться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть аккуратной и четкой. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым к программам.

При подготовке к экзаменам учебный материал рекомендуется повторять по учебнику и конспекту.

Правила выполнения и оформления контрольных работ

Первая и вторая контрольные работы выполняются студентом на первом курсе.

При выполнении контрольных работ студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1.Каждая работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер контрольной работы, дата ее отсылки в институт, домашний адрес студента.

2.Контрольные задачи следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях.

3.Перед решением каждой задачи нужно полностью переписывать ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

Например, условие задачи 1 должно быть переписано так:

1. Даны вершины A (3;0), B (-5;6), C (-4;1) треугольника. Найти: 1) длину стороны AB; ... и т.д.

4.Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.

5.Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами (желательно на миллиметровой бумаге), выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведенным на чертежах.

6.На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

7.Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.

Если преподаватель установит несамостоятельное выполнение работы, то она не будет зачтена.

8.Получив из института прорецензированную работу (как зачтенную, так и не зачтенную), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. В случае незачета по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

9.В межсессионный период или во время лабораторно-экзаменационной сессии студент должен пройти на кафедре высшей математики собеседование по зачтенной контрольной работе.

Программа по высшей математике за первый курс

2 семестр

I. Введение в математический анализ. Предел, непрерывность функции

1. Множество действительных чисел. Абсолютная величина действительного числа. Свойства абсолютных величин. Числовые промежутки.
2. Постоянные и переменные величины. Понятие функции с одной переменной. Область определения, область изменения функции. Способы задания функции. График функции. Свойства и графики элементарных функции.
3. Понятие числовой последовательности. Бесконечно малая и бесконечно большая числовые последовательности. Связь между ними. Понятие предела числовой последовательности (два определения). Теорема о существовании предела монотонной, ограниченной последовательности. Предел постоянной и бесконечно малой. Сравнение бесконечно малых величин. Теоремы о пределе суммы, произведения, частного числовых последовательностей.
4. Предел функции в точке. Первый и второй замечательный пределы. Раскрытие неопределенностей.
5. Приращение аргумента и функции в точке. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва функции и их классификация. Свойства непрерывных функций.

II. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

6. Задачи, приводящие к понятию производной. Понятие производной; ее геометрический, механический, экономический смысл. Связь непрерывности с дифференцируемостью.

7.Правила дифференцирования функции. Производные элементарных функций. Производная сложной функции. Таблица производных. Производные высших порядков.

8. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Применение производной к вычислению пределов./Правило Лопиталя /.
9. Теоремы Ролля, Лагранжа. Применение производной к исследованию функции. Возрастание, убывание функции. Признаки возрастания, убывания функции. Понятие экстремума функции. Необходимый признак экстремума функции. Первый и второй достаточные признаки экстремума,

10.Выпуклость, вогнутость графика функции, точки перегиба. Асимптоты кривой. Схема исследования функции и построение ее графика.

III. Дифференциальное исчисление функции двух переменных

11. Определение функции двух независимых переменных. Область определения. Частные и полное приращения функции с двумя переменными. Предел непрерывной функции с двумя переменными.
12. Частные производные, частные и полный дифференциалы функции с двумя переменными. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях. Частные производные высших порядков.
13. Экстремум функции двух переменных. Понятие максимума, минимума. Необходимый и достаточный признаки экстремума. Нахождение наименьших,

наибольших значений функции. Задача обработки наблюдений. Метод наименьших квадратов. Подбор параметров кривых по способу наименьших квадратов.

IV. Интегральное исчисление

14. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Методы интегрирования: непосредственное, замена переменной, по частям. Интегрирование рациональных дробей.

15.Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Понятие определенного интеграла, как предела интегральных сумм. Теорема существования. Свойства определенного интеграла. Связь определенного интеграла с неопределенным. Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования для определенного интеграла. Приложение определенного интеграла к решению задач.

16. Понятие несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования и от неограниченных функций. Понятие сходящихся и расходящихся интегралов. Интеграл Пуассона. Геометрический смысл сходящихся несобственных интегралов.

V. Дифференциальные уравнения

17. Понятие дифференциального уравнения. Понятие общего и частного решения. Начальные условия. Интегральные кривые.

18. Дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными; с разделяющимися переменными. Однородные и линейные дифференциальные уравнения.

19. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.

20. Дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейно независимые решения. Структура общего решения. Характеристическое уравнение.

21.Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Частные решения уравнений с правой частью вида: $e^{\alpha x}P_n(x)$; $e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$.

VI. Числовые и степенные ряды

22. Числовые ряды: общий член ряда, частичная сумма, сумма ряда. Сходимость и расходимость ряда. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости.

23. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости: признак сравнения, признак Даламбера, интегральный признак Коши.

24. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.

25. Функциональный ряд: радиус, интервал, область сходимости. Степенной ряд. Теорема Абеля.

26. Ряд Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

27. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям.

Литература

1. Высшая математика для экономистов. Под редакцией проф. Н. Ш. Крамера. – М.: Юнити, 2001

2. Баврин. И. И. Высшая математика. М.: Академия, 2002

3. Зайцев И. А. Высшая математика. Учебное пособие для неинженерных специальностей с.-х. Вузов. – М.: Высшая школа, 1991

4.Шипачев В. С. Высшая математика– М.: Высшая школа, 1996

5. Лихолетов И. И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. Минск. Высшая школа, 1976

6. Карасев А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И. . Высшая математика для экономических ВУЗов – ч. 1 – М.: Высшая школа, 1982

7. Минорский В. П. сборник задач по высшей математике. –М.: Наука, 1987

8. Данко П. Е., Попов А. Г.- ч. 1,2 - М.: Высшая школа, 1974

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В предлагаемых методических указаниях решены задачи, аналогичные тем, которые даются студентам-заочникам в контрольных работах; обращено внимание на основные трудности и типичные ошибки, которые допускаются при выполнении контрольных работ.

Перед решением каждой задачи предлагаем ознакомиться с основными вопросами теории. Перечисленные ниже вопросы по каждой теме являются основными при защите контрольных работ.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Задачи 1-10

По теме «Введение в анализ» рассмотрите предварительно следующие вопросы о функциях и пределах:

1. Понятие функции, способы задания функции, область ее определения.
2. Основные элементарные функции, их свойства и графики.
3. Понятие предела функции в точке.
4. Понятие бесконечно малой функции $f(x)$ и ее свойства: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$
5. Понятие бесконечно большой функции $f(x)$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, ее свойства и связь с бесконечно малой функцией.
6. Теоремы о пределах: предел суммы, разности, произведения, частного функций.
7. Первый замечательный предел:

$$\lim_{a\to 0}\frac{\sin a}{a}=1 \quad \text{или} \quad \lim_{a\to 0}\frac{a}{\sin a}=1$$

8. Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

или в другой форме:

$$\lim_{a\to 0}(1+a)^{\frac{1}{a}}=e$$

где e- иррациональное число: $e=2{,}718...\approx 2{,}7$.

9. Эквивалентные бесконечно малые функции.
10. Виды неопределенностей и способы их раскрытия:

$$\left(\frac{0}{0}\right);\left(\frac{\infty}{\infty}\right);(\infty-\infty);(0\cdot\infty);\left(1^{\infty}\right);\left(0^{0}\right);\left(\infty^{0}\right)$$

11. Понятие непрерывности функции в точке и на промежутке.
12. Теоремы о непрерывных функциях.

Задача. Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$;

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$

При $а)x_0 = 1; б)x_0 = -4; в)x_0 = \infty;$

3. $а)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ctg3x}{Ctg5x}$ $\quad б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{2x}$

$в)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$ $\quad$ 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{3n+5}\right)^{4n+1}$

Решение. Прежде всего заметим, что во всех примерах следует найти предел частного. Как известно, предел частного существует и равен частному пределов, если существуют пределы числителя и знаменателя и <u>предел знаменателя не равен нулю.</u>

1.а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$

Предел числителя и предел знаменателя дроби найдем, подставив в них предельное значение аргумента:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\frac{3\cdot 1+10\cdot 1-8}{4\cdot 1+15\cdot 1-4}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

Здесь теорема о пределе частного применима.

б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$

При подстановке $x=-4$ в числитель и знаменатель дроби убеждаемся, что их пределы равны нулю. Теорема о пределе частного здесь не применима. В данном случае говорят, что имеется неопределенность вида «ноль на ноль» $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Такая неопределенность раскрывается сокращением дроби на бесконечно малую функцию $(x-x_0)$, в данном случае на $(x+4)$, которая обращает числитель и знаменатель в нуль. Для этого нужно сначала <u>разложить на множители числитель и знаменатель дроби.</u>

Напомним формулу разложения квадратного трехчлена на множители: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 -корни квадратного трехчлена, которые находим из уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Разложим на множители числитель данной дроби:

$3x^2+10x-8=0$; $\quad D=10^2-4\cdot 3\cdot(-8)=196$

$$x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{196}}{2\cdot 3}=\frac{-10\pm 14}{6};\qquad x_1=-4;\quad x_2=\frac{2}{3}$$

Следовательно: $\quad 3x^2+10x-8=3(x+4)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)=(x+4)(3x-2)$

Разложим на множители знаменатель дроби:

$4x^2+15x-4=0;\ D=15^2-4\cdot 4(-4)=289$;

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{289}}{2\cdot 4}=\frac{-15\pm 17}{8}\qquad x_1=-4;\quad x_2=\frac{1}{4}$$

Следовательно: $4x^2+15x-4=4(x+4)(x-1/4)=(x+4)(4x-1)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)(3x-2)}{(x+4)(4x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x-2}{4x-1}=\dfrac{-14}{-17}=\dfrac{14}{17}$ в)

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$

При $x \to \infty$ числитель и знаменатель дроби также стремятся к бесконечности. В этом случае теорема о пределе частного неприменима. Говорят, что имеется неопределенность вида «бесконечность на бесконечность» $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Чтобы ее раскрыть, каждый член числителя и знаменателя дроби разделим на x в наивысшей для данного примера степени (то есть на x^2), от чего величина дроби не изменится. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{10}{x}-\frac{8}{x^2}}{4+\frac{15}{x}-\frac{4}{x^2}}=\frac{3}{4},$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10}{x}=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^2}=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{15}{x}=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0$

Замечание. Полезно заметить и запомнить, что предел отношения многочленов при $x \to \infty$ равен отношению их коэффициентов при старших степенях.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$

При подстановке предельного значения $x=3$ в числитель и знаменатель дроби убеждаемся, что их пределы равны нулю. Таким образом, перед нами вновь неопределенность вида

$$\left(\frac{0}{0}\right)$$

которая раскрывается сокращением дроби на бесконечно малую функцию $(x-3)$. Для этого предварительно умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное иррациональному выражению в знаменателе, то есть на $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\right)$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x})}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x})}{(x+1)-(7-x)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x})}{2x-6}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x})}{2(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}}{2}=\frac{\sqrt{3+1}+\sqrt{7-3}}{2}=2$$

При умножении сопряженных выражений в знаменателе было использовано тождество $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

3.Для решения примеров под номером 3 используется первый замечательный предел, с помощью которого раскрываются некоторые неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

Примеры этого пункта можно решать также с помощью эквивалентных бесконечно малых функций. Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными в точке x_0, если предел их отношения в этой точке равен 1:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$$

значит $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$

Например, при $\alpha\to 0$: $\sin\alpha\sim\alpha$; $\arcsin\alpha\sim\alpha$;

$$tg\alpha \sim \alpha\ ;\quad arctg\alpha \sim \alpha\ .$$

При вычислении пределов бесконечно малые множители можно заменять на эквивалентные им.

$$а)\lim_{x\to 0}\frac{ctg3x}{ctg5x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{tg3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\underset{при x\to 0}{tg5x\cong 5x; tg3x\cong 3x}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$$

$$б)\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 6x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\underset{при x\to 0}{\arcsin 6x\cong 6x}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{2x}=3$$

$$в)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=4, т.к. \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=1$$

4.Для раскрытия неопределенностей вида (1^{∞}) применяется второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

где е - иррациональное число, то есть бесконечная непериодическая десятичная дробь, ее приближенное значение: е ≈ 2,7

Найдем $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^{4n+1}$

Очевидно, что $\frac{3n-2}{3n+5}=\frac{3n+5-5-2}{3n+5}=\frac{(3n+5)-7}{3n+5}=1-\frac{7}{3n+5}=$

$$=1+\frac{-7}{3n+5}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^{4n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3n+5}\right)^{4n+1}=\left(1^{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-7}{3n+5}\right)^{\frac{3n+5}{-7}}\right]^{\frac{-7}{3n+5}(4n+1)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-7(4n+1)}{3n+5}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-28n-7}{3n+5}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-28-\frac{7}{n}}{3+\frac{5}{n}}}=e^{-\frac{28}{3}}$$

Задачи 11-20,21-30,31-40

Названные задачи относятся к теме «Дифференциальное исчисление и его приложения». Основные вопросы этой темы:

1. Понятие производной, ее геометрический и механический смысл.

2. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и суперпозиции функций.

3. Формулы дифференцирования основных элементарных функций (таблица производных).

4. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

5. Признаки возрастания и убывания для функции одной переменной.

6. Экстремумы функции одной переменной. Необходимое и достаточное условия существования экстремумов.

7.Вогнутость и выпуклость графика функции. Признаки выпуклости и вогнутости функции.

8.Точки перегиба. Необходимое и достаточное условия перегиба.

9.0бщая схема исследования функции. Построение графика функции.

Таблица производных

Пусть U и V две функции $U = U(x)$, $V=V(x)$, тогда

$$(U+V)' = U' + V'$$

$$(U-V)' = U' - V'$$

$$(U\cdot V)' = U'V + UV'$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{U^2}$$

Заметим, что:

а) производная постоянной равна нулю:

$$C' = 0$$

б) постоянный множитель выносится за знак производной: $(CU)' = CU'$

в) $x' = 1$

Производные основных элементарных функций

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$	1. $(U^a)' = aU^{a-1}U'$
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	2. $(\sqrt{U})' = \frac{1}{2\sqrt{U}}U'$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	3. $\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{1}{U^2}U'$
4. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	4. $\left(a^U\right)' = a^U \ln a \cdot U'$
5. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$	5. $\left(\log_a U\right)' = \frac{1}{U\ln a}U'$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	6. $(\ln U)' = \frac{1}{U}U'$
7. $\left(\sin x\right)' = \cos x$	7. $\left(\sin U\right)' = \cos U \cdot U'$
8. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$	8. $\left(\cos U\right)' = -\sin U \cdot U'$
9. $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	9. $\left(tgU\right)' = \frac{1}{\cos^2 U}U'$
10. $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	10. $\left(ctgU\right)' = -\frac{1}{\sin^2 U}U'$
11. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	11. $(\arcsin U)' = \frac{1}{\sqrt{1-U^2}}U'$
12. $\left(\arccos x\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	12. $(\arccos U)' = \frac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}$

13. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ 13. $(arctgU)' = \frac{U'}{1+U^2}$

14. $(arcctgx)' = \frac{-1}{1+x^2}$ 14. $(arcctgU)' = -\frac{U'}{1+U^2}$

Задачи 11-20

Найти производные заданных функций:

$а) y = \frac{tgx}{x^2-1};$ $б) y = \left(\frac{1}{x^2}+\sqrt[4]{x}\right)\cdot arctg2x;$

$в) y = \left(4x^2 - \frac{6}{x\sqrt[3]{x}} - 3\right)^5;$ $г) y = \arccos\sqrt{1-x^2};$

$д) y = 2^{ctgx} - x^2\cos 5x$

При вычислении производных нужно пользоваться приведенной выше таблицей производных.

Решение.

$а) y = \frac{tgx}{x^2-1}$

Воспользуемся формулами:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{U^2},$$

где $U = tgx; V = x^2-1; (tgx)' = 1/\cos^2 x$

$$(U-V)' = U' - V'$$

$$\left(x^a\right)' = a\cdot x^{a-1}$$

Тогда

$$y' = \frac{(tgx)'\cdot(x^2-1) - tgx\cdot(x^2-1)'}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\left(x^2-1\right) - 2x\cdot tgx}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2-1-2x\cdot tgx\cdot\cos^2 x}{\left(x^2-1\right)^2\cdot\cos^2 x} = \frac{x^2-1-2x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x}{(x^2-1)^2\cdot\cos^2 x} =$$

$$\frac{x^2-1-2x\cdot\sin x\cdot\cos x}{(x^2-1)^2\cos^2 x} = \frac{x^2-1-x(2\sin x\cos x)}{(x^2-1)^2\cos^2 x} = \frac{x^2-1-x\sin 2x}{(x^2-1)\cos^2 x}$$

$б) y = \left(\frac{1}{x^2}+\sqrt[4]{x}\right)\cdot arctg2x;$

Воспользуемся формулами:

$$(U\cdot V)' = U'V + V'U$$

где $U = \frac{1}{x^2}+\sqrt[4]{x};$ $V = arctg2x;$ $(arctgU)' = \frac{U'}{1+U^2};$

$$(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

Тогда $y' = \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt[4]{x}\right)' \cdot arctg2x + (arctg2x)'\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt[4]{x}\right) =$

$= (x^{-2} + x^{\frac{1}{4}})' arctg2x + \frac{(2x)'}{1+(2x)^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt[4]{x}\right) =$

$= \left(-2x^{-3} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\right) \cdot arctg2x + \frac{2}{1+4x^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt[4]{x}\right) =$

$= \left(\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{2}{x^3}\right) \cdot arctg2x + \frac{2}{1+4x^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt[4]{x}\right)$

в) $y = \left(4x^2 - \frac{6}{x^3\sqrt{x}} - 3\right)^5$;

Данную функцию можно записать в виде степенной функции:

$y = U^5$, где $U = \left(4x^2 - \frac{6}{x^3\sqrt{x}} - 3\right)$

И, следовательно $y' = 5U^4U'$

Заметим, что

$$\frac{6}{x^3\sqrt{x}} = \frac{6}{x^3 x^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{x^{\frac{7}{2}}} = 6x^{-\frac{7}{2}}$$

Значит, $U = 4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} - 3$.

Тогда $y' = 5\left(4x^3 - \frac{6}{x^3\sqrt{x}} - 3\right)^4 \cdot \left(4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} - 3\right)' =$

$= 5\left(4x^3 - \frac{6}{x^3\sqrt{x}} - 3\right)^4 \cdot \left(4 \cdot 3x^2 - 6 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot x^{-\frac{9}{2}} - 0\right) =$

$= 5\left(4x^3 - \frac{6}{x^3\sqrt{x}} - 3\right)^4 \cdot \left(12x^2 + 21 \cdot x^{-\frac{9}{2}}\right) =$

$= 5\left(4x^3 - \frac{6}{x^3\sqrt{x}} - 3\right)^4 \cdot \left(12x^2 + \frac{21}{x^4 \cdot \sqrt{x}}\right)$

г) $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$;

Данную функцию можно записать как: $y = \arccos U$, где $U = \sqrt{1-x^2}$

Тогда $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)'$.

Для отыскания последней производной применим формулу:

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u', где u = 1 - x^2.$$

Значит,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(1-x^2\right)' = -\frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (0-2x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x}{x \cdot 2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$г) y = 2^{ctgx} - x^2 \cos 5x$

Воспользуемся формулами:

$$\left(a^U\right)' = a^U \ln a \cdot U'$$

$$(U \cdot V)' = U'V + UV'$$

$$\left(\cos U\right)' = -\sin U \cdot U'$$

$$y' = 2^{ctgx} \cdot \ln 2 \cdot (ctgx)' - \left[\left(x^2\right)' \cdot \cos 5x + x^2 \cdot (\cos 5x)'\right] =$$

$$= 2^{ctgx} \cdot \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) - \left[2x \cdot \cos 5x + x^2 \cdot (-\sin 5x) \cdot (5x)'\right] =$$

$$= -\frac{\ln 2}{\sin^2 x} \cdot 2^{ctgx} - 2x \cdot \cos 5x + 5x^2 \cdot \sin 5x.$$

Задачи 21 -30

Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ и построить ее график.

Решение. Исследование будем проводить по следующей схеме:

1. Область определения функции.

В нашем примере это множество всех действительных чисел, то есть $x \in (-\infty; +\infty)$

2. Четность и нечетность функции:

$f(-x) = (-x)^3 - 9(-x)^2 + 24(-x) - 16 = -x^3 - 9x^2 - 24x - 16 \neq \pm f(x)$ Видим, что $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, значит, функция свойствами четности или нечетности не обладает.

Делаем вывод, что график функции не будет симметричен ни относительно оси Oy, ни относительно начала координат.

3.Периодичность функции.

Данная функция не является периодической, как многочлен.

4.Непрерывность функции.

На всей области определения данная функция является непрерывной как многочлен.

5.Поведение функции на концах области определения.

Концами области определения являются «-∞» и «$+\infty$», так как $x \in (-\infty; +\infty)$. Найдем пределы функции при $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3 - 9x^2 + 24x - 16\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{9}{x} + \frac{24}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3 - 9x^2 + 24x - 16\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{9}{x} + \frac{24}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right) = -\infty$$

Таким образом, знак бесконечности определяется знаком старшего члена x^3. Это означает, что слева график функции уходит неограниченно вниз, а справа - неограниченно вверх

6. Интервалы монотонности и точки экстремумов.

Найдем точки «подозрительные» на экстремум. Согласно необходимого условия экстремума: в точках

экстремума производная равна нулю или не существует.

Находим производную: $y' = 3x^2 - 18x + 24.$. Она существует при любых x. Решим уравнение $y' = 0$:

$3x^2 - 18x + 24 = 0$; $x^2 - 6x + 8 = 0$; $D = 36 - 32 = 4$

$x_{1,2} = \dfrac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 1;$ $x_1 = 2$; $x_2 = 4$.

Тогда можно записать: $y' = 3(x-2)(x-4)$.

Точки x=2 и x=4 являются критическими. Они делят область определения на интервалы монотонности функции (интервалы возрастания и убывания). Изобразим их на числовой оси (рис.6).

Это интервалы (-∞; 2);(2;4);(4;+∞).

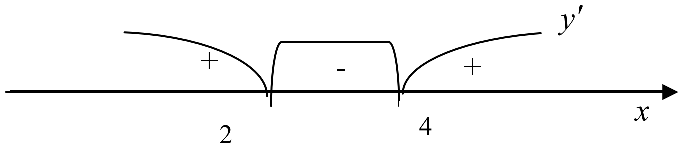

Рис.6

Поведение функции на каждом интервале определяется знаком производной y': если y' <0, то функция убывает, если y' >0, то функция y возрастает.

Для определения знака производной на каждом интервале достаточно взять любое значение x из этого интервала и подставить в производную y' = 3(x-2)(x-4).

а) На интервале (-∞; 2), возьмем любое x , например x=0, и подставим в производную $y'(0) = 3(0-2)(0-4) = 24$.Получили $y'(0) > 0$, следовательно функция y возрастает на интервале (-∞; 2).

б) На интервале (2;4) возьмем x=3, подставим в выражение для y', получим y'(3)=3(3-2)(3-4)<0, следовательно, на интервале(2;4) функция убывает.

в) На интервале (4;+∞) возьмем x=5,видим, что y'(5)= 3(5-2)(5-4)>0, следовательно, на интервале (4;+∞) функция возрастает.

Знаки производной y' проставлены на рис. 6 около каждого интервала.

Замечаем, что при переходе через точку x=2 производная меняет знак, с (+) на (-) . Это означает, что в точке x=2 функция имеет максимум (на основании достаточного условия существования экстремума). Найдем значение y при x=2:

$y_{\max} = y(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 16 = 8 - 36 + 48 - 16 = 4$.

Значит, точка максимума (2; 4).

При переходе через точку x=4 производная меняет знак с (-) на (+). Это означает, что при x=4 функция имеет минимум:

$y_{\min} = y(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 16 = 0$.

Точка минимума (4;0).

7. Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба. Это исследование проводится с помощью второй производной

Найдем точки, подозрительные на перегиб, используя необходимое условие перегиба: в точках перегиба вторая производная либо равна нулю, либо не существует.

Так как $y' = 3x^2 - 18x + 24$, то $y'' = 6x - 18$ существует при любых х. Приравняем вторую производную к нулю и найдем корни уравнения
6х -18=0. Отсюда х=3 - точка, подозрительная на перегиб.

Точка х=3 делит область определения (-∞; +∞) на интервалы: (-∞;3) и (3;+∞) (рис.7).

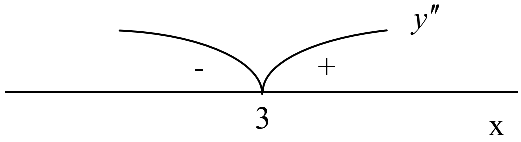

Рис. 7

Определим знаки второй производной на этих интервалах.

Если на интервале $y''>0$, то график вогнутый, если $y''<0$, то график выпуклый (на основании достаточного условия выпуклости и вогнутости).

а) На интервале (-∞;3) возьмем, например, х=1, подставим во вторую производную у"=6(х-3) , получим $y''(1) = 6(1-3) < 0$, значит, при $x \in (-\infty;3)$ график функции выпуклый.

б) На интервале (3;+∞) берем, например, х=5, подставим в y'',получим $y''(5)$ = 6(5-3)>0, значит, при х€(3;+∞) график функции вогнутый.

Знаки y'' проставлены на рис. 7 около каждого интервала.

Так как при переходе через точку х=3 вторая производная у" меняет знак, то график меняет выпуклость на вогнутость, то есть при х=3 график функции имеет перегиб.

$y_{перегиба} = y(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 - 16 = 2$.

Точка перегиба (3;2).

8.Точки пересечения графика с осями координат. С осью Оу: полагаем х=0 и, подставляя это значение в данную функцию у, находим у =-16; получим точку (0;-16). С осью Ох: полагаем у=0, находим х из уравнения

$x^3-9x^2+24x-16=0$. (*)

Кубическое уравнение имеет хотя бы один действительный корень, попробуем найти его подбором.

Корни уравнения являются делителями свободного члена 16. Следовательно, попробуем подставлять в уравнение (*) числа ±1; ±2; ±4; ±8; ±16.

При х=1: получаем 1-9+24-16=0, следовательно, $x_1=1$ является корнем уравнения (*). Тогда многочлен $x^3-9x^2+24x-16$ делится на (х-1) без остатка.

После деления в частном получится многочлен второй степени:

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^3-9x^2+24x-16 & \underline{x-1} \\
\underline{x^3-x^2} \qquad\qquad\quad & x^2-8x+16 \\
-\; -8x^2+24x-16 & \\
\underline{-8x^2+8x} \qquad & \\
-\; 16x-16 & \\
\underline{16x-16} & \\
0 &
\end{array}
$$

Каждое слагаемое частного получается делением старшего члена делимого на старший член делителя:x^3:х = x^2 (x^2 записываем в частное); умножаем (х-1) на x^2 и вычитаем из делимого. С остатком поступаем аналогично: $-8x^2$:х = -8х (записываем в частное), умножаем (x-1) на (-8x) и вычитаем из остатка и т.д.

Итак, $x^3-9x^2+24x-16 = (x-1)(x^2-8x+16)$. Для отыскания остальных корней x_2 и x_3 решим уравнение $x^2-8x+16=0$, откуда получим $x_{1,2}=\dfrac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot1\cdot16}}{2\cdot1}=4$.

Окончательно: $x^3-9x^2+24x-16 = (x-1)(x-4)^2$.

Уравнение (*) принимает вид: (x-1)(x-4)(x-4)=0, откуда $x_1=1$; $x_2=4$; $x_3=4$.

Таким образом, график функции пересекает ось OX в точках (1;0) и (4;0).

9. Дополнительные точки. Для более точного построения графика можно найти несколько дополнительных точек. Например, найдем y при x=5:

$y(5)=5^3-9\cdot5^2+24\cdot5-16=4$. Получим точку K(5;4).

Выпишем результаты исследования функции $y = x^3-9x^2+24x-16$.

1. Область определения $(-\infty; +\infty)$.

2 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$

3. Функция возрастает при $x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$

Функция убывает при $x\in(2;4)$.

4.Точка max A (2;4), точка min B (4;0).

5. При $x\in(-\infty;3)$- график выпуклый,

при $x\in(3;+\infty)$- график вогнутый.

6.Точка перегиба C(3;2)

7.Точки пересечения с осями координат:(1;0), (4;0),(0;-16).

8.Дополнительная точка K (5;4).

Строим график функции (рис.8). Прежде всего построим все характерные точки, точки пересечения с осями, точки экстремумов, точку перегиба и дополнительные точки.

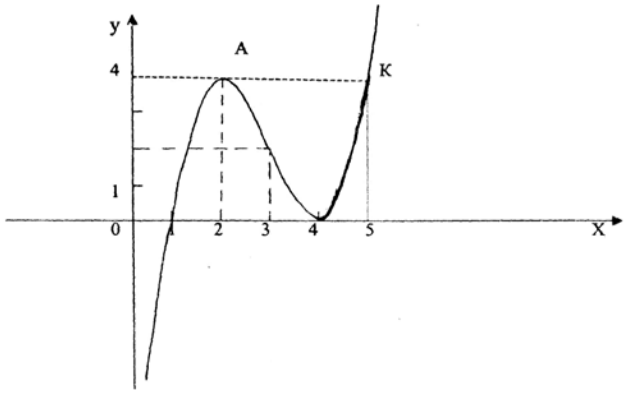

Рис.8

В силу непрерывности функции соединим все построенные точки плавной кривой, продолжив график влево и вправо согласно поведению функции на концах области определения.

Задачи 31-40

Вычислить приближенное значение $\sqrt[n]{a}$, заменяя приращение функции $y=\sqrt[n]{x}$ дифференциалом, если n = 6,
a =60.

Решение: Нужно вычислить приближенно $\sqrt[6]{60}$.

Приращение функции в точке $x_0:\Delta y=f(x)-f(x_0)$.

Дифференциал функции в точке $x_0 : dy = f'(x_0)\Delta x$.

При малых Δx: $\Delta y \approx dy$ или $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$

Отсюда получаем общую формулу для приближенных вычислений: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, где $\Delta x = x - x_0$.

В нашей задаче $y = f(x) = \sqrt[6]{x}$, где $x = 60$.

Найдем производную функции $y = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$

$$y' = \left(x^{\frac{1}{6}}\right)' = \frac{1}{6} \cdot x^{\frac{1}{6}-1} = \frac{1}{6} \cdot x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6x^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$

Приближенное равенство для функции $f(x) = \sqrt[6]{x}$ будет иметь вид:

$$\sqrt[6]{x} \approx \sqrt[6]{x_0} + \frac{1}{6\sqrt[6]{x_0^5}} \cdot \Delta x$$

Здесь $x = 60$, в качестве x_0 выберем число 64, оно ближайшее $x = 60$, из которого точно извлекается корень шестой степени: $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

Следовательно, $\Delta x = x - x_0 = 60 - 64 = -4$. Подставляя в последнюю приближенную формулу $x = 60$, $x_0 = 64$, $\Delta x = -4$ найдем нужный результат:

$$\sqrt[6]{60} \approx \sqrt[6]{64} + \frac{1}{6\sqrt[6]{64^5}} \cdot (-4) = \sqrt[6]{2^6} + \frac{1}{6\sqrt[6]{\left(2^6\right)^5}} \cdot (-4) = 2 - \frac{4}{6 \cdot 2^5} =$$

$$= 2 - \frac{1}{6 \cdot 2^3} = 2 - \frac{1}{48} \approx 2 - 0{,}02 = 1{,}98$$

Ответ: $\sqrt[6]{60} \approx 1{,}98$

Задачи 61-70 относятся к теме "Функции нескольких переменных". Для решения этих задач необходимо познакомиться со следующими вопросами названной темы:

1. Определение функции двух переменных, область определения функции, геометрическое изображение функции двух переменных.
2. Определение частных производных первого порядка для функции двух переменных, их вычисление.
3. Полный дифференциал функции двух переменных.
4. Производные высших порядков для функции двух переменных.
5. Определение локальных экстремумов для функции двух переменных.
6. Необходимое и достаточное условия экстремума для функции двух переменных.
7. Правило исследования на экстремум для функции двух переменных.

Задачи 41-50

Найти полный дифференциал функции двух переменных

$$z = f(x, y) = x^2 \cdot e^{\frac{x}{y^2}}$$

Решение. Полный дифференциал функции двух переменных находим по формуле: $dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$

где z'_x; z'_y --частные производные данной функции z.

Частные производные находим по обычным формулам дифференцирования для функции одной переменной, причем z'_x находим, считая «у» постоянной величиной;

аналогично при отыскании z'_y считаем «х» постоянным:

$$z'_x = \left[x^2 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \right]'_x = \left(x^2\right)'_x \cdot e^{\frac{x}{y^2}} + x^2 \cdot \left(e^{\frac{x}{y^2}} \right)'_x = 2x \cdot e^{\frac{x}{y^2}} + x^2 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \cdot \left(\frac{x}{y^2} \right)'_x =$$

$$= 2x \cdot e^{\frac{x}{y^2}} + x^2 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \cdot \frac{1}{y^2} = xe^{\frac{x}{y^2}}\left(2 + \frac{x}{y^2}\right), \quad \text{здесь } y = const;$$

$$z'_y = \left[x^2 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \right]'_y = \left(x^2\right)'_y \cdot e^{\frac{x}{y^2}} + x^2 \cdot \left(e^{\frac{x}{y^2}} \right)'_y = 0 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} + x^2 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \cdot \left(\frac{x}{y^2} \right)'_y =$$

$$= x^2 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \cdot x \cdot \left(y^{-2}\right)'_y = x^3 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \cdot (-2) \cdot y^{-3} = -\frac{2x^3}{y^3} \cdot e^{\frac{x}{y^2}}, \quad \text{здесь } x = const$$

Отсюда полный дифференциал функции:

$$dz = x \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \left(2 + \frac{x}{y^2} \right) \cdot dx - \frac{2x^3}{y^3} \cdot e^{\frac{x}{y^2}} dy$$

или

$$dz = x \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \left(\left(2 + \frac{x}{y^2} \right) \cdot dx - \frac{2x^2}{y^3} \cdot dy \right)$$

Задачи 51-60 и 61-70 относятся к теме «Интегральное исчисление». Ознакомьтесь с основными вопросами этой темы:

1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла.
2. Основные свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица интегралов.
4. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, интегрирование подстановкой, интегрирование по частям.
5. Интегрирование некоторых рациональных дробей.
6. Понятие определенного интеграла и его основные свойства.
7. Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.
8. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
9. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.

Интегрирование есть операция, обратная дифференцированию. $\int f(x)dx = F(x)+C$, где $F(x)$-первообразная для подынтегральной функции $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$, а C - произвольная постоянная. При интегрировании часто используют свойства неопределенного интеграла:

$$\int \left(f(x) \pm \varphi(x) \right) dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx, где k = const.$$

Идея интегрирования заключается в том, чтобы свести данный интеграл к одному из табличных интегралов. Поэтому, приступая к решению задач, ознакомьтесь с **таблицей интегралов.**

1. $\int 0dx = c, т.к. c.' = 0$	1. $\int 0dU = c, т.к. c.' = 0$
2. $\int dx = x + c$	2. $\int dU = U + c$
3. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$	3. $\int U^a dx = \frac{U^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + c$	4. $\int \frac{dU}{U} = \ln\|U\| + c$
5. $\int e^x dx = e^x + c$	5. $\int e^U dU = e^U + c$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	6. $\int a^U dU = \frac{a^U}{\ln a} + c$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$	7. $\int \sin U dU = -\cos U + c$
8. $\int \cos x dx = \sin x + c$	8. $\int \cos U dU = \sin U + c$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$	9. $\int \frac{dU}{\sin^2 U} = -ctgU + c$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$	10. $\int \frac{dU}{\cos^2 U} = tgU + c$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$	11. $\int \frac{dU}{\sqrt{1-U^2}} = \begin{cases} \arcsin U + c \\ -\arccos U + c \end{cases}$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + c \\ -arcctgx + c \end{cases}$	12. $\int \frac{dU}{1+U^2} = \begin{cases} arctgU + c \\ -arcctgU + c \end{cases}$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$	13. $\int \frac{dU}{\sqrt{a^2 - U^2}} = \arcsin \frac{U}{a} + c$
14. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$	14. $\int \frac{dU}{a^2 + U^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{U}{a} + c$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + c$	15. $\int \frac{dU}{\sqrt{U^2 \pm a^2}} = \ln\left\|U + \sqrt{U^2 \pm a^2}\right\| + c$
16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + c$	16. $\int \frac{dU}{U^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{U-a}{U+a} + c$

Примечание: Формулы интегрирования сохраняют свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, т.е. если

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{то и } \int f(U)dU = F(U) + C$$

$$\int f(z)dz = F(z) + C, \text{то и } \int f(t)dt = F(t) + C$$

Таким образом, применение основной таблицы сразу расширяется.

Например

$$\int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} d(x^2) = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C,$$

$$\text{т.к.} \quad 2xdx = dx^2, t = x^2$$

Задачи 51 – 60

Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

Интегралы б), в), г), д) в ваших контрольных работах берутся методом замены переменной (подстановкой).

При этом вводится новая переменная t = φ(x), которая является функцией от x. Если новая переменная введена удачно, то в результате замены получаем табличные интегралы.

Некоторые рекомендации по введению новой переменной смотрите ниже в примерах.

Напомним формулу для нахождения дифференциала функции одной переменной:

$$dt = t' \cdot dx \quad \text{или} \quad dt = \varphi'(x)dx$$

Пример 1.

Если под знаком интеграла содержится показательная функция, то за новую переменную t удобно принимать показатель степени, если под интегралом присутствует производная этого показателя с точностью до постоянного множителя.

$$\int 5x^2 e^{-x^3} dx = \left| \begin{array}{l} \textit{обозначим} \\ t = -x^3 \\ dt = -3x^2 dx \\ x^2 dx = -\dfrac{1}{3} dt \end{array} \right| = \int 5e^t \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot dt = -\frac{5}{3}\int e^t dt = -\frac{5}{3}e^t + C = = -\frac{5}{3}e^{-x^3} + C$$

В конце возвращаемся к первоначальной переменной, подставив вместо t выражение $(-x^3)$.

<u>**Проверка**</u>. Если интеграл взят правильно, то производная от полученного результата равна подынтегральной функции:

$$\left(-\frac{5}{3}e^{-x^3} + C\right)' = -\frac{5}{3} \cdot \left(e^{-x^3}\right)' + C` = -\frac{5}{3} \cdot e^{-x^3} \cdot \left(-x^3\right)' + 0 = -\frac{5}{3}e^{-x^3} \cdot \left(-3x^2\right) =$$

$$= 5x^2 \cdot e^{-x^3}$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.

Если под интегралом содержится логарифмическая функция, то удобно принять ее за новую переменную, если под знаком интеграла присутствует производная этой функции (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \frac{\ln^3(2x-3)}{2x-3} \cdot dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln(2x-3) \\ dt = \dfrac{1}{2x-3} \cdot 2dx \quad \dfrac{1}{2x-3} dx = \dfrac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int t^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^3 \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{8}\ln^4(2x-3) + C$$

<u>**Проверка:**</u>

$$\left[\frac{1}{8}\ln^4(2x-3) + C\right]' = \frac{1}{8} \cdot 4\ln^3(2x-3) \cdot [\ln(2x-3)]' + 0 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln^3(2x-3) \cdot \frac{1}{2x-3} \cdot (2x-3)' = \frac{1}{2}\ln^3(2x-3) \cdot \frac{1}{2x-3} \cdot 2 = \frac{\ln^3(2x-3)}{2x-3}$$

Пример 3.

Часто удобно обозначать за новую переменную знаменатель дроби подынтегральной функции.

$$\int \frac{2x + \cos x}{x^2 + \sin x} \cdot dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + \sin x \\ dt = (2x + \cos x) \cdot dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$= \ln\left|x^2 + \sin x\right| + C$$

<u>**Проверка:**</u>

$$\left(\ln\left|x^2 + \sin x\right| + C\right)' = \frac{1}{x^2 + \sin x} \cdot \left(x^2 + \sin x\right)' = \frac{2x + \cos x}{x^2 + \sin x}$$

Пример 4.

$$\int tg3xdx = \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x}dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos 3x \\ dt = -\sin 3x \cdot 3dx \quad \sin 3xdx = -\frac{1}{3}dt \end{array} \right| =$$

$$\int -\frac{1}{3} \cdot \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t| + C = -\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + C$$

<u>**Проверка:**</u>

$$\left[-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + C\right]' = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \cdot (\cos 3x)' = -\frac{1}{3}\frac{(-\sin 3x)(3x)'}{\cos 3x} = tg3x$$

Пример 5.

Часто за новую переменную удобно взять подкоренное выражение, если под интегралом присутствует также его производная с точностью до постоянного множителя.

$$\int \sqrt[6]{3 - 4\cos 3x} \cdot \sin 3xdx = \left| \begin{array}{l} t = 3 - 4\cos 3x \\ dt = -4(-\sin 3x) \cdot 3dx \\ \sin 3x \cdot dx = \frac{1}{12}dt \end{array} \right| = \int \sqrt[6]{t} \cdot \frac{1}{12}dt =$$

$$= \frac{1}{12}\int t^{\frac{1}{6}} \cdot dt = \frac{1}{12} \cdot \frac{t^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + C = \frac{1}{14}\sqrt[6]{(3 - 4\cos 3x)^7} + C$$

<u>**Проверка**</u>**:**

$$\left[\frac{1}{14}(3 - 4\cos 3x)^{\frac{7}{6}} + C\right]' = \frac{1}{14} \cdot \frac{7}{6} \cdot (3 - 4\cos 3x)^{\frac{1}{6}} \cdot (3 - 4\cos 3x)' =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot (3 - 4\cos 3x)^{\frac{1}{6}} \cdot \left[0 - 4 \cdot (-\sin 3x)(3x)'\right] = \sqrt[6]{3 - 4\cos 3x} \cdot \sin 3x$$

Пример 6.

Подстановка выбирается аналогично предыдущему примеру.

$$\int \frac{7x^4dx}{\sqrt[4]{2 + x^5}} = \left| \begin{array}{ll} t = 2 + x^5; & dt = 5x^4dx \\ dt = d(2 + x^5); & x^4dx = \frac{1}{5}dt \end{array} \right| = \int \frac{7 \cdot \frac{1}{5}dt}{\sqrt[4]{t}} = \frac{7}{5}\int t^{-\frac{1}{4}} \cdot dt =$$

$$= \frac{7}{5} \cdot \frac{t^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = \frac{28}{15}\sqrt[4]{t^3} + C = \frac{28}{15}\sqrt[4]{(2 + x^5)^3} + C$$

Примечание. Сделайте самостоятельную проверку в примере 6-14

Пример 7.

Новая переменная иногда выбирается из следующих соображений: в знаменателе стоит разность постоянной и квадрата некоторой функции. Эту функцию мы принимаем за новую переменную, если в числителе присутствует ее производная (с точностью до постоянного множителя).

$$\int\frac{5x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}=\left|\begin{matrix} t=x^4; & x^8=t^2 \\ dt=4x^3dx; & x^3dx=\frac{1}{4}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{5\cdot\frac{1}{4}dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{5}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\frac{5}{4}\arcsin t+C=\frac{5}{4}\arcsin x^4+C$$

Пример 8.

Подстановка выбирается аналогично предыдущему примеру.

$$\int\frac{x\cdot dx}{1+x^4}=\int\frac{x\cdot dx}{1+\left(x^2\right)^2}=\left|\begin{matrix} t=x^2; & x\cdot dx=\frac{1}{2}dt \\ dt=2xdx & \end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$\frac{1}{2}arctgt+C=\frac{1}{2}arctgx^2+C$$

Пример 9.

За новую переменную иногда выбирают функцию, стоящую в основании степени, если подынтегральное выражение содержит производную этой функции с точностью до постоянного множителя.

$$\int\frac{\arcsin^5 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx=\left|\begin{matrix} t=\arcsin 3x \\ dt=\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3dx; \quad \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}=\frac{1}{3}dt\end{matrix}\right|=\int t^5\cdot\frac{1}{3}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int t^5dt=\frac{1}{3}\int t^5dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^6}{6}+C=\frac{1}{18}\arcsin^6 3x+C$$

Пример 10.

Подстановка выбирается аналогично предыдущему примеру.

$$\int\frac{e^{5x}}{\left(1+e^{5x}\right)^3}dx=\left|\begin{matrix} t=1+e^{5x} & e^{5x}dx=\frac{1}{5}dt \\ dt=e^{5x}\cdot 5dx & \end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{1}{5}dt}{t^3}=\frac{1}{5}\int t^{-3}dt=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{10t^2}+C=\frac{-1}{10\left(1+e^{5x}\right)^2}+C$$

Интеграл из пункта е) вашей контрольной работы берется методом интегрирования «по частям». Этим методом интегрируются некоторые произведения, например, произведения степенной функции на логарифмическую или на показательную, или на тригонометрическую, или на обратные тригонометрические функции и др.

Интегрирование «по частям» производится по формуле

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

Чтобы воспользоваться этой формулой, следует один множитель в подынтегральном выражении обозначить за «u», а оставшийся множитель вместе с dx принять за «dv».

Для того, чтобы интеграл в правой части был проще данного интеграла, надо правильно выбрать «u» и «dv».

В интегралах, берущихся по частям, обычно логарифмическую и обратные тригонометрические функции принимают за «u». Если подынтегральная функция содержит произведение степенной функции на показательную или тригонометрическую, то за «u» принимается степенная функция.

Пример 11.

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\int udv = u\cdot v - \int vdu} \\ \text{принимаем}: & \text{находим}: \\ u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} & v = \int x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{x} \end{array} \right| =$$

$$= \ln x \cdot 3\sqrt[3]{x} - \int 3\cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x}dx = 3\sqrt[3]{x}\ln x - 3\int x^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= 3\sqrt[3]{x}\cdot \ln x - 3\cdot 3\cdot \sqrt[3]{x} + C = 3\cdot \sqrt[3]{x}\cdot(\ln x - 3) + C$$

Пример 12.

$$\int x\cdot \sin 5x dx = \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du} \\ \text{принимаем}: & \text{находим}: \\ u = x & du = dx \\ dv = \sin 5x\cdot dx & v = \int \sin 5x\cdot dx = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{array} \right| =$$

$$= x\cdot\left(-\frac{1}{5}\cos 5x\right) - \int -\frac{1}{5}\cos 5x\cdot dx = -\frac{1}{5}x\cdot \cos x5x + \frac{1}{5}\int \cos 5x\cdot dx =$$

$$= -\frac{x}{5}\cos 5x + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\int \cos 5x\cdot d(5x) = -\frac{x}{5}\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C$$

Пример 13.

$$\int x\cdot e^{\frac{x}{5}}\cdot dx = \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du} \\ \text{принимаем}: & \text{находим}: \\ u = x & du = dx \\ dv = e^{\frac{x}{5}}dx & v = \int e^{\frac{x}{5}}dx = 5\int e^{\frac{x}{5}}d\left(\frac{x}{5}\right) = 5e^{\frac{x}{5}} \end{array} \right| =$$

$$= x\cdot 5\cdot e^{\frac{x}{5}} - \int 5\cdot e^{\frac{x}{5}}dx = 5xe^{\frac{x}{5}} - 5\cdot 5\int e^{\frac{x}{5}}d\left(\frac{x}{5}\right) = 5x\cdot e^{\frac{x}{5}} - 25\cdot e^{\frac{x}{5}} + C =$$

$$= 5e^{\frac{x}{5}}(x-5) + C$$

Пример 14.

$$\int x\cdot arctg3x\cdot dx = \left| \begin{array}{ll} u = arctg3x; & du = \frac{1}{1+9x^2}\cdot 3dx \\ dv = x\cdot dx; & v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= arctg3x\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+9x^2}\cdot 3dx = \frac{x^2}{2}arctg3x - \frac{3}{2}\int \frac{x^2}{1+9x^2}dx =$$

Чтобы взять последний интеграл, умножим и разделим числитель на 9, затем в числителе прибавим и отнимем единицу, после чего разобьем интеграл на два табличных:

$$=\frac{x^2}{2}arctg3x-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}\int\frac{9x^2+1-1}{9x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}arctg3x-\frac{1}{6}\int\left(1-\frac{1}{1+9x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctg3x-\frac{1}{6}\int dx+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{1+9x^2}=\frac{x^2}{2}arctg3x-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\int\frac{d(3x)}{1+(3x)^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot arctg3x-\frac{1}{6}x+\frac{1}{18}arctg3x+C$$

Обязательно сделайте проверку в примерах 6-14.

Задачи 61-70

В этих задачах используется определенный интеграл, который вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)\cdot dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

где F(x) - первообразная для f(x), то есть F'(x) = f(x);

a и b - пределы интегрирования, показывающие, как меняется переменная интегрирования x.

Обратите внимание на то, что определенный интеграл - это <u>число</u> в отличие от неопределенного интеграла, который является <u>множеством функций</u>. Формула Ньютона-Лейбница связывает определенный и неопределенный интегралы. Чтобы ею воспользоваться, следует взять сначала неопределенный интеграл (вернее, найти лишь одну первообразную, не прибавляя произвольной постоянной), а затем вычислить разность значений первообразной в верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Например $\int_1^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{2}=2\frac{1}{3}$.

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-6x+5$ и прямой $y=x-1$. Сделать чертеж.

Решение. Построим параболу и прямую.

Для построения параболы найдем координаты ее вершины и точки пересечения ее с осями координат.

Вершина параболы является точкой экстремума, поэтому для ее отыскания найдем производную и приравняем ее к нулю.

$y'=\left(x^2-6x+5\right)'=2x-6$; $2x-6=0$; $x=3$,

Тогда $y(3)=3^2-6\cdot3+5=9-18+5=-4$.

Итак, вершина параболы в точке $(3;-4)$.

Точки пересечения параболы с осью Ox: $y=0$, тогда

$x^2-6x+5=0$, откуда $x_1=1$; $x_2=5$, то есть точки $(1;0)$и $(5;0)$.

Точка пересечения с осью Oy: $x=0$, тогда $y=5$; то есть точка $(0;5)$.

Строим параболу по найденным точкам, замечая, что ветви параболы направлены вверх (рис. 9).

Прямую y = x-1 строим по двум точкам:

x	0	1
y	−1	0

получены точки (0;-1) и (1 ;0). Заштрихуем плоскую фигуру, ограниченную параболой и прямой.

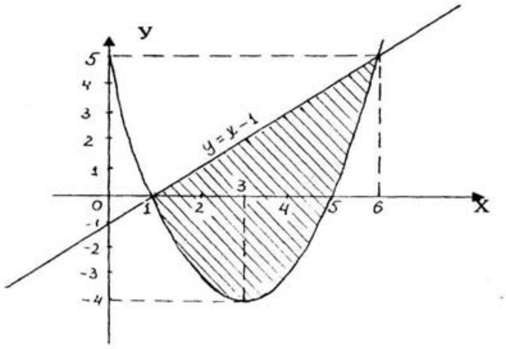

Рис. 9

Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$D = 49 - 4 \cdot 6 = 25; \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 6.$$

Для отыскания искомой площади воспользуемся формулой

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] \cdot dx,$$

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничивают фигуру соответственно снизу и сверху, то есть $f_2(x) \geq f_1(x)$ при $x \in [a;b]$.

В нашей задаче $f_1(x) = x^2 - 6x + 5$; $f_2(x) = x - 1$; $x \in [1;6]$.

Поэтому

$$S = \int_1^6 \left[(x-1) - (x^2 - 6x + 5)\right] \cdot dx = \int_1^6 \left(-x^2 + 7x - 6\right) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 7 \cdot \frac{x^2}{2} - 6x\right]_1^6 = \left(-\frac{216}{3} + 7 \cdot \frac{36}{2} - 36\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 6\right) = \frac{125}{6}.$$

Ответ: Площадь искомой криволинейной трапеции:

$$S = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}(кв.ед).$$

Задачи № 71-90

Названные задачи относятся к теме «Дифференциальные уравнения». По этой теме необходимо изучить следующие вопросы:

1. Какое уравнение называется дифференциальным? Как определяется порядок дифференциального уравнения?

Определение. Уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные, называется дифференциальным.

$$F(x; y; y'; y''; .... y^{(n)}) = 0$$

или

$$F\left(x; y; \frac{dy}{dx}; \frac{d^2y}{dx^2}; .... \frac{d^n(y)}{dx^{(n)}}\right) = 0$$

Порядок дифференциального уравнения определяется наличием наивысшей производной:

$F(x;y;y')=0$ - дифференциальное уравнение первого порядка

$F(x;y;y';y'')=0$ - дифференциальное уравнение второго порядка

2. Что называется решением дифференциального уравнения? Общее и частные решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка.

Определение. Решением дифференциального уравнения называется такая функция y, которая вместе с ее производными удовлетворяет этому уравнению (превращает его в тождество).

Общее решение имеет вид: $y=\varphi(x;c_1;c_2;.....c_n)$.

Решение, полученное из общего при конкретных значениях произвольных постоянных $c_1;c_2;c_3;.....c_n$ называется частным.

Общее решение дифференциальных уравнений первого и второго порядка имеют соответственно вид:

$$y=\varphi(x;c)$$

$$y=\varphi(x;c_1;c_2)$$

3. Задача Коши для дифференциального уравнения первого и второго порядков.

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям:

$y=y_0$; $y'=y'_0$; *при* $x=x_0$, *называется задачей Коши*

Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными: $f_1(y)\cdot\varphi_2(x)dy+f_2(y)\cdot\varphi_1(x)dx=0$. Нахождение их общего и частного решений.

4. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными $f_1(y)\cdot\varphi_2(x)dy+f_2(y)\cdot\varphi_1(x)dx=0$ сводится к уравнению с разделенными переменными $f(y)dy=\varphi(x)dx$, которое решается интегрированием обеих частей:

$$\int f(y)dy=\int\varphi(x)dx\Rightarrow F(y)=\Phi(x)+C$$

5. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка: $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$ Отыскание его общего и частного решений.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$ при $Q(x)=0$ является уравнением с разделяющимися переменными. Если $Q(x)\neq 0$, то уравнение решается с помощью подстановки $y=UV$,где U и V неизвестные функции, зависимые от x. После ряда преобразований линейное уравнение сводится к двум дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными.

6. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, нахождение их общих и частных решений.

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения $a(x)\cdot y'+b(x)\cdot y=f(x)$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y=y_0$ *при* $x=x_0$.

Уравнения предлагаемого вида являются линейными, так как содержат искомую функцию «y» и ее производную «y'» в первых степенях. Один из способов решения таких уравнений заключается в том, что функцию y(x) ищем в виде произведения двух дифференцируемых функций u(x) и v(x), одна из которых подбирается специальным образом, а другая находится из условия их удовлетворения исходному уравнению. С помощью этого приема решение линейного дифференциального уравнения первого порядка сводится к решению двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными соответственно для функций u(x) и v(x).

Рассмотрим ряд примеров. Напомним, что производная равна отношению дифференциалов:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Пример 1.

$y' - 2y = e^{2x}$; $y_0 = 2$ при $x_0 = 0$.

Ищем решение уравнения в виде $y = uv$. Найдем производную этого произведения: $y' = u'v + uv'$. Подставим функцию у и ее производную y' в исходное уравнение:

$$u'v + uv' - 2uv = e^{2x}$$

В левой части уравнения сгруппируем слагаемые, имеющие общий множитель «u», и вынесем его за скобку:

$$u'v + u(v' - 2v) = e^{2x}$$

Подберем вспомогательную функцию «v» так, чтобы обратилось в нуль выражение, стоящее в круглых скобках:

$$v' - 2v = 0 \qquad (1)$$

Тогда уравнение примет вид:

$$u'v = e^{2x} \qquad (2)$$

Оба последних уравнения решаются разделением переменных.

Сначала находим частное решение первого из них, то есть функцию $v(x)$, а затем, подставив ее во второе уравнение, найдем функцию $u(x,c)$.

1) $v' - 2v = 0$; $v' = \frac{dv}{dx}$

$\frac{dv}{dx} = 2v$;

$dv = 2vdx \,|: v \neq 0$;

$\frac{dv}{v} = 2dx$;

$\int \frac{dv}{v} = 2\int dx$;

$u = x + c$

$\ln|v| = 2x$

$v = e^{2x}$

2) $u'v = e^{2x}$

$u' = 1$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

Замечание. Решая первое уравнение (для вспомогательной функции $v(x)$), берем лишь его частное решение, соответствующее $C = 0$. При решении второго уравнения для функции $v(x)$ находим общее решение уравнения.

Так как $y = uv$, то $y = (x + C)e^{2x}$ - общее решение уравнения.

Для нахождения частного решения обратимся к начальному условию: $y_0 = 2$ при $x_0 = 0$. Подставим эти значения в найденное общее решение дифференциального уравнения:

$2=(0+C)\cdot e^{0}$,

так как $e^{0}=1$, то $C=2$

Подставим найденное значение С в общее решение дифференциального уравнения, получим его частное решение:

$y=(x+2)e^{2x}$.

Ответ: $y=(x+C)e^{2x}$ - общее решение дифференциального уравнения;

$y=(x+2)e^{2x}$ - частное решение дифференциального уравнения.

Пример 2. $y'\cdot\cos x-y\cdot\sin x=\sin 2x\cdot\cos x$; $\quad y_0=\dfrac{4}{3}\quad \text{при}\quad x_0=\pi$

Ищем решение в виде $y=uv$

Найдем производную: $y'=u'v+uv'$.

Подставим в исходное уравнение y и y':

$(u'v+uv')\cdot\cos x-uv\cdot\sin x=\sin 2x\cdot\cos x$; $\quad u'v\cdot\cos x+\underline{uv'\cdot\cos x-uv\cdot\sin x}=\sin 2x\cdot\cos x$

Сгруппируем подчеркнутые слагаемые, вынеся за скобку общий множитель u:

$u'v\cdot\cos x+u(v'\cos x-v\sin x)=\sin 2x\cdot\cos x$

Подберем вспомогательную функцию $v(x)$ из условия:

$v'\cos x-v\sin x=0$ (1)

Тогда уравнение примет вид:

$u'v\cdot\cos x=\sin 2x\cdot\cos x$ (2)

Решаем поочередно два последних уравнения, причем для первого из них берем лишь частное решение $v(x)$, соответствующее $C=0$.

1) $v'\cos x-v\sin x=0;\qquad v'=\dfrac{dv}{dx}$

$$\cos x\cdot\frac{dv}{dx}-v\cdot\sin x=0\,\Big|\cdot dx;$$

$$\cos x\cdot dv-v\sin x dx=0\,\Big|:(v\cos x)\neq 0;$$

$$\frac{dv}{v}-\frac{\sin x}{\cos x}dx=0;\quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{v}=\frac{\sin x}{\cos x}dx;$$

$$\ln|v|=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x};\quad\Rightarrow\quad \ln|v|=-\ln|\cos x|;$$

$$\ln|v|=\ln|\cos x|^{-1};\quad\Rightarrow\quad v=(\cos x)^{-1};$$

2) $v=\dfrac{1}{\cos x}$

$$u'v\cdot\cos x=\sin 2x\cdot\cos x$$

$$u'\frac{1}{\cos x}\cdot\cos x=\sin 2x\cdot\cos x;\qquad т.к.\ \sin 2x=2\sin x\cdot\cos x;$$

$$u'=2\cos^2 x\cdot\sin x$$

$$\frac{du}{dx}=2\cos^2 x\sin x$$

$$du=2\cos^2 x\sin x dx;$$

$$\int du=-\int 2\cos^2 x d(\cos x);$$

$$u=-2\frac{\cos^3 x}{3}+C;$$

$$y=u\cdot v=\left(-\frac{2}{3}\cos^3 x+C\right)\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{C}{\cos x}-\frac{2}{3}\cos^2 x.$$

Таким образом, $y=\dfrac{C}{\cos x}-\dfrac{2}{3}\cos^2 x$ - общее решение данного дифференциального уравнения.

Для нахождения частного решения воспользуемся начальными условиями: $x_0=\pi;\ y_0=\dfrac{4}{3}$, подставив их в найденное общее решение:

$$\frac{4}{3}=\frac{C}{\cos\pi}-\frac{2}{3}\cos^2\pi;\ т..к.\quad \cos\pi=-1,$$

$$\frac{4}{3}=-C-\frac{2}{3},\Rightarrow C=-2.$$

Подставим $C=-2$, в общее решение уравнения:

$$y=-\frac{2}{\cos x}-\frac{2}{3}\cos^2 x-искомое\ частное\ решение.$$

$$Ответ: y=\frac{C}{\cos x}-\frac{2}{3}\cos^2 x-общее\ решение;$$

$$y=-\frac{2}{\cos x}-\frac{2}{3}\cos x-частное\ решение.$$

Пример 3. $(x^2+1)y'+4xy=1,\ x_0=1;\ y_0=2.$

Ищем решение в виде $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$.

Подставим y и y' в данное уравнение:

$$(x^2+1)(u'v+uv')+4xuv=1$$

$$(x^2+1)u'v+(x^2+1)uv'+4xuv=1$$

$$(x^2+1)u'v+u\left[(x^2+1)v'+4xv\right]=1.$$

Потребуем, чтобы $(x^2+1)v'+4xv=0$ (1), тогда $(x^2+1)u'v=1$ (2)

Решим последовательно оба уравнения, причем для первого из них берем лишь частное решение при $C=0$.

1) $(x^2+1)v'+4xv=0.$

$$v'=\frac{dv}{dx},$$

$$(x^2+1)\frac{dv}{dx}+4xv=0\Big|\cdot dx;$$

$$(x^2+1)dv+4xvdx=0\Big|:v(x^2+1)\neq 0;$$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{4x}{x^2+1}dx;$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int\frac{2x}{x^2+1}dx;$$

$$\ln|v|=-2\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$\ln|v|=-2\cdot\ln(x^2+1);\ C=0,$$

$$\ln|v|=\ln(x^2+1)^{-2};$$

$$v=(x^2+1)^{-2}\Rightarrow v=\frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

2) $(x^2+1)u'v=1;$

$$где\ v=\frac{1}{(x^2+1)^2};$$

$$(x^2+1)u'\cdot\frac{1}{(x^2+1)^2}=1$$

$$\frac{u'}{x^2+1}=1\Big|\cdot(x^2+1);$$

$$u'=x^2+1;\quad u'=\frac{du}{dx};$$

$$\frac{du}{dx}=x^2+1\Big|\cdot dx;\quad .$$

$$du=(x^2+1)dx;$$

$$\int du=\int(x^2+1)dx.$$

$$u=\frac{x^3}{3}+x+C.$$

Так как $y=uv$, то

$$y=\left(\frac{x^3}{3}+x+C\right)\cdot\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

- это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Для нахождения частного решения обратимся к начальным условиям $x_0=1$; $y_0=2$ и подставим их в найденное общее решение:

$$2=\left(\frac{1^3}{3}+1+C\right)\cdot\frac{1}{(1^2+1)^2};$$

$$2=\left(\frac{4}{3}+C\right)\cdot\frac{1}{4};8=\frac{4}{3}+C;C=8-\frac{4}{3}=\frac{20}{3}$$

Искомое частное решение получим из общего, подставив в него найденное значение $C=\frac{20}{3}$: $y=\left(\frac{x^3}{3}+x+\frac{20}{3}\right)\cdot\frac{1}{(x^2+1)^2}$

Ответ: $y=\frac{1}{(x^2+1)^2}\left(\frac{x^3}{3}+x+C\right)$ - общее решение;

$y=\frac{1}{(x^2+1)^2}\left(\frac{x^3}{3}+x+\frac{20}{3}\right)$ - частное решение.

Замечание. Чтобы проверить правильность найденного решения (общего или частного), нужно подставить его в исходное уравнение и убедиться, что получится верное равенство (тождество).

Пример 4. Найти частное решение уравнения:

$$y''+4y=4\sin 2x-8\cos 2x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0, y'(0)=0$.

Решение. Общее решение Y данного уравнения равно сумме общего решения $Y_{одн}$ однородного уравнения и какого-либо частного решения $\bar{y}$ данного уравнения, то есть

$$Y = y_{одн} + \bar{y}$$

Для нахождения $y_{одн}$ составим характеристическое уравнение $k^2+4=0$, имеющее комплексные корни $k_1 = 2i \ и \ k_2 = -2i$. В этом случае общее решение однородного уравнения ищем в виде

$$y_{одн} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (4)$$

где $\alpha \pm \beta i$ - комплексные корни характеристического уравнения. Подставим в (4) $\alpha = 0, \beta = 2$, имеем:

$$y_{одн} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Для нахождения частного решения $\bar{y}$ неоднородного дифференциального уравнения воспользуемся следующей теоремой: если правая часть неоднородного уравнения есть функция $f(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$ и числа $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения, то существует частное решение $\bar{y} = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$. Если же числа $\alpha \pm \beta i$ являются корнями характеристического уравнения, то существует частное решение $\bar{y} = xe^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$.

Применяя эту теорему при $\alpha = 0, \beta = 2$, имеем:

$$\bar{y} = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Дважды дифференцируя последнее равенство, находим $\bar{y}''$:

$$\bar{y}'' = (4B - 4Ax)\cos 2x + (-4A - 4Bx)\sin 2x$$

Подставив в данное уравнение $\bar{y} \ и \ \bar{y}''$, получим:

$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = 4\sin 2x - 8\cos 2x,$$

Откуда $A = -1$, $B = -2$.

Следовательно, $\bar{y} = -x(\cos 2x + 2\sin 2x)$ и

$$y = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x - x(\cos 2x + 2\sin 2x)$$

Найдем y':

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x - \cos 2x - 2\sin 2x - x(-2\sin 2x + 4\cos 2x).$$

Используя начальные условия, получим систему

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ 2C_2 - 1 = 0, \ откуда \ C_1 = 0, C_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Следовательно, $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x - x(\cos 2x + 2\sin 2x)$ есть искомое частное решение данного дифференциального уравнения.

Задачи № 91-110; 111-130

Данные задачи относятся к теме «Числовые и степенные ряды». Рассмотрим предварительно следующие вопросы:

1. Понятие числового ряда.

Члены числовой последовательности, соединенные знаком (+) или (-), образуют числовой ряд вида:

$a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm ....\pm a_n \pm ....$ *Это бесконечный числовой ряд*

a_n - общий член, где n – порядковый номер члена.

Другая форма записи числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2. Понятие частичной суммы числового ряда и суммы ряда.

Частичной суммой S_n называется сумма первых n членов. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...+ a_n$. Конечный предел частичных сумм числового ряда при $n \to \infty$ называется суммой ряда S. $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

3. Какой числовой ряд называется сходящимся?

Если числовой ряд имеет сумму S, то ряд является сходящимся. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен ∞, то числовой ряд – расходящийся и суммы не имеет.

4. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости для знакоположительных рядов: признак сравнения, признак Даламбера, интегральный признак Коши.

Теорема. Если числовой ряд сходится, то предел его общего члена при $n \to \infty$ равен 0, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Необходимый признак сходимости не является достаточным. Поэтому для исследования числовых рядов на сходимость существуют достаточные признаки.

Признак сравнения. Даны два числовых ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если, начиная хотя бы с некоторого номера $n \ge N$, выполняется $a_n \le b_n$, то:

1) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
2) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Признак Даламбера. Дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему при $n \to \infty$, равный ℓ, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, то:

1) при $\ell < 1$ ряд сходится
2) при $\ell > 1$ ряд расходится
3) при $\ell = 1$ вопрос остается открытым

5. Признак Лейбница о сходимости знакочередующегося ряда.

Числовой ряд вида $\pm a_1 \mp a_2 \pm a_3 \mp a_4 ....$ *или* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ называется знакочередующимся.

Признак Лейбница. Если: 1) члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ убывают по абсолютной величине, т.е. $|a_1| > |a_2| > |a_3| > ....$ и 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то такой ряд сходится и его сумма $S \in (0; a_1)$.

6. Понятие степенного ряда и области его сходимости.

Степенным рядом называется функциональный ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.. + a_n x^n + \ldots.. ;$$

где $a_0; a_1; a_2; a_3; \ldots..a_n; \ldots..$ - коэффициенты ряда, $a_n x^n$ - общий член ряда – степенная функция.

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ - радиус сходимости; (-R;R) – интервал сходимости.

Интервал (-R;R) с включением одного или двух его концов называется областью сходимости степенного ряда.

7. Разложение в ряд Маклорена функций: $y = e^x$; $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = (1+x)^m$; $y = \ln(1+x)$

Всякая функция f(x) бесконечно дифференцируемая в интервале *(-R;R)* разлагается в ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots\ldots.$$

Интервал (-R;R) – интервал сходимости ряда Маклорена.

8.Применение степенных рядов в приближенных вычислениях.

На практике приходится прибегать к приближенным вычислениям функций; определенных интегралов; при решении дифференциальных уравнений. В этих случаях функцию разлагают в степенной ряд Маклорена, а ряд заменяют суммой конечного числа членов с требуемой точностью. Точность оценивается с помощью первого отброшенного члена.

С помощью рядов составлены таблицы тригонометрических функций; таблицы логарифмов; таблицы, применяемые в теории вероятностей и математической статистике.

Рассмотрим задачи:

Задача 1. Написать первые три члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n x^n}{n^2 3^n}$, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

Решение. Беря последовательно $n = 1, 2, 3, \ldots$, запишем данный ряд в виде:

$$\frac{5x}{1^2 \cdot 3} + \frac{5^2 x^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{5^3 x^3}{3^2 \cdot 3^3} + \ldots + \frac{5^n x^n}{n^2 \cdot 3^n} + \ldots.$$

Для нахождения области сходимости ряда применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}x^{n+1}n^2 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1} 5^n x^n}\right| = \frac{5}{3}|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{5}{3}|x| \cdot \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{5}{3}|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{5}{3}|x|$$

Данный ряд сходится абсолютно при тех значениях *x*, которые удовлетворяют неравенству $\frac{5}{3}|x| < 1$, *или* $|x| < \frac{3}{5}$, *или* $-\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}$

Исследуем сходимость ряда на концах полученного интервала. При $x=-\frac{3}{5}$ данный ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Последний ряд является знакочередующимся; абсолютная величина его члена стремится к нулю при $n\to\infty$ и члены убывают по абсолютной величине. Следовательно, по признаку Лейбница сходимости знакочередующихся рядов этот ряд сходится. Значит, $x=-\frac{3}{5}$ принадлежит области сходимости данного ряда.

При $x=\frac{3}{5}$ данный ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Исследуем сходимость этого ряда при помощи интегрального признака сходимости Коши. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right)=1$$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится и исследуемый ряд. Значит, при $x=\frac{3}{5}$ исходный ряд сходится.

Таким образом, $-\frac{3}{5}\le x\le\frac{3}{5}$ - область сходимости данного ряда.

Задача 2. Вычислить $\int_0^1\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде степенного ряда.
Заменив x в разложении функции $\sin x$ на $\sqrt[3]{x}$ имеем:

$$Sinx=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots..$$

$$\sin\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}-\frac{(\sqrt[3]{x})^3}{3!}+\frac{(\sqrt[3]{x})^5}{5!}-\frac{(\sqrt[3]{x})^7}{7!}+\ldots.$$

Тогда

$$\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}=x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{3!}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{5!}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{7!}+\ldots$$

$$\int_0^1\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx=\int_0^1\left(x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{3!}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{5!}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{7!}+\ldots\right)dx=\left[3x^{\frac{1}{3}}-\frac{x}{3!}+\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5!\cdot5}-\frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7!\cdot7}+\ldots\right]_0^1=$$

$$=3-\frac{1}{6}+\frac{1}{200}-\frac{1}{11760}+\ldots$$

Полученный знакочередующийся ряд удовлетворяет условию теоремы Лейбница. Так как четвертый его член по абсолютной величине меньше 0,001, то для обеспечения заданной точности достаточно взять первые три члена. Тогда

$$\int_0^1\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx\approx3-\frac{1}{6}+\frac{1}{200}\approx2{,}834.$$

Тренировочные задания

1. Найти указанные пределы

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5-x^4-x^3+3x^2}{-2x^2+3x-4}$
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+x^3}{x+4}$
3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+4}{x^4+x^3}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x^3}{x^2+x^4}$
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x-2}$
6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-9}-1}{x-5}$
7. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+6}-\sqrt{12}}$
8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{2x^2-5x+2}$
9. $\lim\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$
   а) $x\to 0$
   б) $x\to 1$
   в) $x\to\infty$
10. $\lim\dfrac{3x^4-4x^3+2x^2-x}{2x-3x^2-4x^4}$
   а) $x\to 1$
   б) $x\to 0$
   в) $x\to\infty$
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^3+2x^2-x}{2x-3x^2-4x^4}$
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x^3+2x^2-x}{2x-3x^2}$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(-\dfrac{x}{3}\right)}{x}$
15. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{y}{2}}{y^2}$
16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x$
17. $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+2\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$
18. $\lim\limits_{y\to 0}\left(1+\dfrac{y}{3}\right)^{\frac{2}{y}}$

2. Найти производные и дифференциалы функции

1. $y=6x^3+3x^2+4x-8+2$
2. $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}+\dfrac{4}{x^4}$
3. $y=\left(\sqrt{t+1}\right)\left(t^2+2\right)$
4. $y=e^x\left(e^x+2\right)$
5. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$
6. $y=\left(x^2+3\right)^5$
7. $y=\dfrac{1}{\left(x^2+3\right)^5}$
8. $y=\sqrt[5]{x^5+5x}$
9. $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x+5x}}$
13. $y=\sin\left(x^3+3\right)$
14. $Q=ctg\left(q^3+3\right)$
15. $S=\arcsin\sqrt{x}$
16. $y=x^4+4^x$
17. $y=e^{bx}\left(1-e^{-bx}\right)$
18. $y=\ln(x^3+3x)$
19. $y=\ln\sqrt{x}+tg\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}}$
20. $y=\ln tg\dfrac{x}{2}$
21. $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

10. $S = \dfrac{1}{t^2+2}$	22. $S = \sin^2 x + \sin^2 x$
11. $Q = e^{t^2}$	23. $Q = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$
12. $y = 5^{t^2+2t}$	24. $y = \ln \dfrac{e^x}{1+e^x}$

3. Найти полные дифференциалы для данных функций

1. $Z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$	2. $Z = xy(1 - x - y)$
3. $Z = x^3 - y^3 - 3xy$	4. $Z = 2x^2 + 6xy + 5y^2$
5. $Z = e^{2x+2xy}$	6. $Z = arcctg(xy)$
7. $Z = Ln(xy)$	8. $Z = tg(3x - y) - 6^{xy}$
9. $Z = \sqrt[3]{3x^2 + 5y^2}$	10. $Z = x^3 y^3 + x^2 y^2$
11. $Z = \arcsin(2xy^2)$	12. $Z = 2x^3 + xy^2 - 216x$

4.Найти неопределенные и определенные интегралы.

1. $\int \left(\dfrac{3x^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{3}{\sqrt[5]{x}} - \dfrac{x\sqrt{x}}{4} + 2 \right)$	2. $\int e^{3x} dx$
3. $\int \dfrac{3xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	4. $\int \dfrac{3\sin t}{\sqrt[3]{1+2\cos t}}$
5. $\int \dfrac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$	6. $\int \dfrac{2x-5}{x^2-5x+7} dx$
7. $\int \dfrac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	8. $\int \dfrac{\ln^3 x}{x} dx$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 3x}$	10. $\int e^{\cos 2x} \sin 2x dx$
11. $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{1-4x^4}}$	12. $\int xe^{5x} dx$
13. $\int x^5 \ln x dx$	14. $\int xarctg 2x dx$
15. $\int_1^4 \left(2x^2 - 3x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$	16. $\int_1^4 \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

ПРАВИЛО ВЫБОРА ВАРИАНТА

Вариант контрольной работы определяется по таблице в зависимости от двух последних цифр номера шифра личного дела студента. В колонке таблицы по вертикали расположены цифры от 0 до 9, каждая из которых - предпоследняя цифра номера шифра. В верхней строке по горизонтали размещены так же цифры от 0 до 9, каждая из которых - последняя цифра шифра.

Пересечение вертикальной и горизонтальной линий определяет номера заданий контрольной работы. Например, по последним двум цифрам номера шифра «78» находят вариант контрольной работы на пересечении строки с цифрой 7 и столбца с цифрой 8. Для контрольной работы №1 это номера:5, 11, 27, 40, 41, 58, 70, 79, 82.

ТАБЛИЦА ВЫБОРА ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

Предпоследняя ЦифрА шиФРа		Последняя цифра номера шифра									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		12	11	13	15	17	19	20	18	16	14
		24	26	28	30	25	27	29	21	23	22
		35	33	37	39	40	38	36	34	32	31
		46	48	50	49	47	41	42	43	44	45
		53	55	57	59	60	58	56	54	52	51
		61	63	65	67	69	70	68	66	64	62
		72	71	75	73	77	74	80	78	76	79
		91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
		111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
		14	12	11	13	15	17	19	20	18	16
		26	28	30	25	27	29	21	23	22	24
		33	37	39	40	38	36	34	32	31	35
		48	50	49	47	41	42	43	44	45	46
		55	57	59	60	58	56	54	52	51	53
		63	65	67	69	70	68	66	64	62	61
		87	86	84	82	81	83	89	88	85	90
		101	103	102	104	105	107	108	106	109	110
		130	129	128	127	126	125	124	123	122	121
		Последняя цифра номера шифра									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2
		16	14	12	11	13	15	17	19	20	18
		28	30	25	27	29	21	23	22	24	26
		37	39	40	38	36	34	32	31	35	33
		47	41	42	43	44	45	46	48	50	49
		57	59	60	58	56	54	52	51	53	55
		65	67	69	70	68	66	64	62	61	63
		73	75	79	77	80	71	76	74	72	78
		100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
		111	115	114	113	112	116	117	118	119	120
	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
		18	16	14	12	11	13	15	17	19	20
		30	25	27	29	21	23	22	24	26	28
		39	40	38	36	34	32	31	35	33	37
		41	42	43	44	45	46	48	50	49	47
		59	60	58	56	54	52	51	53	55	57
		67	69	70	68	66	64	62	61	63	65

		81	82	86	85	84	87	88	89	83	90
		101	103	102	105	104	106	107	108	110	109
		130	129	128	127	126	125	124	123	122	121
	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
		18	16	14	12	11	13	15	17	19	20
		25	27	29	21	23	22	24	26	28	30
		40	38	36	34	32	31	35	33	37	39
		50	49	47	41	42	43	44	45	46	48
		58	56	54	52	51	53	55	57	59	60
		69	70	68	66	64	62	61	63	65	67
		77	79	78	80	76	57	72	71	73:	74
		86	83	85	87	89	90	84	81	88	82
		100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
	5	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
		19	20	18	16	14	12	11	13	15	17
		27	29	21	23	22	24	26	28	30	25
		38	36	34	32	31	35	33	37	39	40
		49	47	41	42	43	44	45	46	48	50
		60	58	56	54	52	51	53	55	57	59
		70	68	66	64	62	61	63	65	67	69
		79	80	76	78	74	77	71	73	75	72
		91	92	93	94	95	100	99	98	97	96
		111	113	112	115	114	117	116	118	120	119
редпоследняя Цифра шиФра		Последняя цифра номера шифра									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	6	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
		17	19	20	8	16	14	12	11	13	15
		29	21	23	22	24	26	28	30	25	27
		40	38	36	34	32	31	35	33	37	39
		42	43	44	45	46	48	50	49	47	41
		56	54	52	51	53	55	57	59	60	58
		68	66	64	62	61	63	65	67	69	70
		81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
		110	109	108	107	106	101	102	103	104	105
		130	129	127	128	126	125	123	124	122	121
	7	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
		15	17	19	20	18	16	14	12	11	13
		21	23	22	24	26	28	30	25	27	29
		36	34	32	31	35	33	37	39	40	38
		43	44	45	46	48	50	49	47	41	42
		54	52	51	53	55	57	59	60	58	56
		66	64	62	61	63	65	67	69	70	68
		78	76	72	74	71	80	75	77	79	63
		91	93	92	95	94	96	97	98	99	100
		111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
		13	15	17	19	20	18	16	14	12	11
		23	22	24	26	28	30	25	27	29	21
		34	32	31	35	33	37	39	40	38	36
		44	45	46	48	50	49	47	41	45	43
		52	51	53	55	57	59	60	58	56	54
		64	62	61	63	65	67	69	70	68	66
		81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
		110	109	108	107	106	105	104	103	102	101
		121	122	123	124	125	126	127	128	129	130

		10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		11	13	15	17	19	20	18	16	14	12
		22	24	26	28	30	25	27	29	21	23
		32	31	35	33	37	39	40	38	36	34
	9	43	44	45	46	48	50	49	47	41	42
		51	53	55	57	59	60	58	56	54	52
		62	61	63	65	67	69	70	68	66	64
		74	72	73	71	75	76	79	80	78	77
		100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
		111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

Задачи для контрольных работ

Контрольная работа № 2

Введение в анализ

Задачи 1-10

Найти пределы данных функций

1. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2-3x^3+7}{4x^2-2x+8}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+2}{2x^3+5x}$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3x^2-10x+8}$ г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-5x+2}$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{x}$

ж) $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{3n^2-n+1}{2n^3+n^2}$ з) $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\dfrac{n-3}{n+5}\right)^{3n+2}$

2. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-4}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x+3}{x-2}$

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-5x-25}{x^2-25}$ г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x-1}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4-3x^3+5}{3x^4-5x^2+1}$ з) $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\dfrac{n-3}{n-2}\right)^{-n+5}$

3. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+3x-5}{x-3}$

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{x^2-3x+2}$ г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$

ж) $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{3n^2+n-1}{n^4+3n}$ з) $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\dfrac{n-6}{n-3}\right)^{n+4}$

4. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{27}}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{27x+\dfrac{2}{3}}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x+1}{x-2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2-x}{7x}$ г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-16x+3}{x^2-4x+3}$

д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ е) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{tg4y}{3y}$

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n+1}{1-2n+2n^2}$ з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{n+2}\right)^{n+2}$

5. а) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{x^3-x^2+1}{x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{-x^3+6x+1}{x+3}$

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^2-2}$ г) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2+15x+28}{x^2+7x+12}$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$ е) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{3\alpha^2}{\sin^2 2\alpha}$

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+5}{x^3+2x+1}$ з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-4}{n-5}\right)^{9n-6}$

6. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{8}}\dfrac{2x-8x+1}{1-\sqrt[3]{x}}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-x}{x-3}$

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$ г) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+7x-15}{3x^2+20x+25}$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8-2x+5x^4}{2+3x^2+x^4}$ з) $\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{2-x}{x}}$

7. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{9}}\dfrac{x-\sqrt{x}}{9x-\dfrac{1}{3}}$ б) $\lim\limits_{n\to-5}\dfrac{2n^2+1}{n+5}$

в) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{x^2-\dfrac{1}{9}}{x+\dfrac{1}{3}}$ г) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-3x-5}{3x^2+2x-1}$

д) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$ е) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^3}{\sin^3 2y}$

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{4x^3-6x+3}$ з) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1+6x}{2x}}$

8. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{8}}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+x}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1-x^2}{x-1}$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$ г) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2+15x+28}{x^2+7x+12}$

д) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x-10}{\sqrt{4x+9}-7}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin 3x}$

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+3}{x^3-8x+5}$ з) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{6x-1}{3x}}$

9. а) $\lim\limits_{x\to\frac{5}{4}}\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}$ б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3+x}{x+2}$

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x+3}$ г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-16x+3}{x^2-4x+3}$

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-3}$ е) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{tg4y}{3y}$

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+3}{x^3-8x+5}$ з) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$

10. а) $\lim\limits_{x\to\frac{-1}{8}}\dfrac{2+\sqrt[3]{x}}{x}$ б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{8x+x^2}{x+1}$

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$ г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^2-12x+5}{5x^2-2x-3}$

д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{3x+4}-4}$ е) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{5z}{\sin 3z}$

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+4}{x^4+6x+5}$ з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x+3}$

Дифференциальное исчисление
Задачи 11-20

Найти производные и дифференциалы функций

11. а) $y=3x+\dfrac{4}{x^3}-3\sqrt[3]{x^2}$ б) $y=(x^2+2)arctgx$

в) $y=\dfrac{\sin x}{x-3}$ г) $y=\left(3x^4-\dfrac{5}{\sqrt[4]{x}}+2\right)^4$

д) $y=\arcsin 2x+\sqrt{1-4x^2}$ е) $y=2^{tgx}+x\sin 2x$

12. а) $y=5x^2+\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$ б) $y=(x+3)\cdot\arcsin x$

в) $y=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$ г) $y=(5x^2+4x\sqrt[4]{x}+3)^4$

д) $y=\arccos\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$ е) $y=3^{\cos x}+x\sin 2x$

13. а) $y=4x^2-\dfrac{3}{x^2}+5\sqrt[5]{x^3}$ б) $y=e^x(x^3-1)$

в) $S=\dfrac{tgt}{t^2-2t}$ г) $y=\left(\dfrac{1}{5}x^5-3x\sqrt[3]{x}-4\right)^4$

д) $y=arctg\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-1}$ е) $y=e^{3x}-2x\cdot tg3x$

14. а) $y=3x^5-\dfrac{1}{x}+\sqrt[4]{x}$ б) $y=(x+1)\cdot\cos x$

в) $y=\dfrac{9-x^2}{9+x^2}$ г) $y=\left(\dfrac{1}{4}x^8-8\sqrt[8]{x^3-1}\right)^3$

д) $y=arctg\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}$ е) $y=2^{x^2+1}-x\cdot\sin 4x$

15. а) $y=7x^3-\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x^3}$ б) $y=x\cdot\arccos x$

в) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ г) $y=\left(5x^4-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}+3\right)^2$

д) $y=arctg\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}$ е) $y=x\cdot ctg3x+2^{x-2}$

16. а) $y=4x^7-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{2x}$ б) $y=(x+2)e^x$

в) $y=\dfrac{x^3}{x^2-2}$ г) $y=\left(3x^8+5\sqrt[5]{x^2}-3\right)^5$

д) $y=\arcsin\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$ е) $y=e^{tgx}+\sqrt{x}\cdot\cos 2x$

17. а) $y=9x^4+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt[3]{x}$ б) $y=(1+\sin x)\cdot 3^x$

в) $y=\dfrac{5-x^3}{5+x^3}$ г) $y=\left(4x^3+\dfrac{3}{x\sqrt[3]{x}}-2\right)^3$

д) $y=arctg\dfrac{1}{x-1}$ е) $y=3^{\sin x}-\sqrt[3]{x}\cdot tg5x$

18. а) $y=3x^5-\dfrac{1}{x^5}+\sqrt[5]{x}$ б) $y=(x^2+2)\cdot arctgx$

в) $y=\dfrac{1+e^{2x}}{1-e^{-2x}}$ г) $y=\left(7x^5-3x\sqrt[3]{x^2}-6\right)^4$

д) $y=\arcsin\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$ е) $y=\sqrt{x}\cdot ctg3x-2^{x^2}$

19. а) $y=2x^7-\dfrac{1}{x^7}+\sqrt[7]{x}$ б) $y=e^x\cdot(x^2-2)$

в) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ г) $y=\left(3x^4-\dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}-3\right)^5$

д) $y=\arcsin 3x-\sqrt{1-9x^2}$ е) $y=5^{\sqrt{x}}-x^2\cdot tg2x$

20. а) $y=4x^9-\dfrac{9}{x^9}+\sqrt[9]{x}$ б) $y=(x^2+3)\cdot 5^x$

в) $y=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$ г) $y=\left(8x^2-\dfrac{9}{x^2\sqrt{x}}+6\right)^5$

д) $y=arctge^{3x}$ е) $y=3^{\sqrt{x}}+\dfrac{\cos 2x}{x}$

Задачи 21-30

Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и построить её график.

21. $y=x^3-x^2-5x+10$ 22. $y=x^3-11x^2+39x-45$

23. $y=x^3+6x^2+9x+4$ 24. $y=x^3+x^2-5x+3$

25. $y = x^3 + 10x^2 + 32x + 32$ 26. $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 20$

27. $y = x^3 - 14x^2 + 60x - 72$ 28. $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 54$

29. $y = x^3 - 18x^2 + 105x - 196$ 30. $y = x^3 - 10x^2 + 28x - 24$

Задачи 31-40

Вычислить приближенные значения $\sqrt[n]{a}$ с точностью до 0,001, заменяя приращение функции $y = \sqrt[n]{x}$ дифференциалом.

31. n=3, a=125,93
32. n =3, a=255,16
33. n =5, a=242,05
34. n =4, a=256,96
35. n =3, a=216,99
36. n =5, a=32,85
37. n =3, a=124,07
38. n =5, a=243,95
39. n =4, a=87,84
40. n =3, a=215,04

Задачи 41-50

Найти частные производные и полный дифференциал функции

41. $Z = x \cdot e^{x-y^2}$ 42. $Z = 3^{xy} tg 3x$

43. $Z = x^2 tg 8y$ 44. $Z = \arcsin\left(x^2 y^2\right)$

45. $Z = y^3 \cos\left(x^2 y\right)$ 46. $Z = tgx \cdot e^{xy^2}$

47. $Z = \dfrac{x}{y} \cos \dfrac{x}{y}$ 48. $Z = e^{x^2 y} \cdot \cos y^3$

49. $Z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 50. $Z = arctg\left(y\sqrt{x}\right)$

Задачи 51-60.

Найти неопределённые интегралы, результаты интегрирования проверить дифференцированием

51. а) $\int \dfrac{3 + \sqrt[3]{x} - 2x}{\sqrt{x}} dx$ б) $\int e^{2x-7} dx$

в) $\int \dfrac{\ln^3(3x+4)}{3x+4} dx$ г) $\int \dfrac{xdx}{1+x^4}$

д) $\int \dfrac{\left(x^3 + \cos x\right)dx}{x^4 + \sin x}$ е) $\int (x+4)\sin 2x dx$

52. а) $\int \dfrac{2x^2 + 3\sqrt{x} - 1}{2x} dx$ б) $\int \sin(2-3x)dx$

в) $\int \dfrac{arctg^3 2x}{1+4x^2} dx$ г) $\int e^{x^4+4x}\left(x^3+1\right)dx$

д) $\int \dfrac{\left(3x^2 + e^x\right)dx}{x^3 + e^x}$ е) $\int x \cdot \cos 2x dx$

53. а) $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}dx$ б) $\int \cos(3x-5)dx$

в) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ г) $\int e^{\sin 3x}\cdot \cos 3x dx$

д) $\int \frac{(4x^3+e^x)}{e^x+x^4}dx$ е) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

54. а) $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}}dx$ б) $\int e^{7-2x}dx$

в) $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ г) $\int \frac{4x^3-\sin x}{x^4+\cos x}dx$

д) $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$ е) $\int x^4\cdot \ln x dx$

55. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}dx$ б) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$

в) $\int \sqrt[3]{2-3\cos 5x}\cdot \sin 5x dx$ г) $\int \frac{e^{ctg 2x}}{\sin^2 2x}dx$

д) $\int \frac{\cos x dx}{\sin x+2}$ е) $\int x\cdot e^{2x}dx$

56. а) $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int e^{10x+2}dx$

в) $\int \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}dx$ г) $\int \cos(x^3+2)\cdot x^2 dx$

д) $\int ctg 5x dx$ е) $\int x arctg x dx$

57. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+3}{x}dx$ б) $\int e^{2-3x}dx$

в) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{5-x^3}}dx$ г) $\int \sqrt[3]{4-\sin 3x}\cdot \cos 3x dx$

д) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(1+tgx)}$ е) $\int x\cdot \sin 3x dx$

58. а) $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int \sqrt{4x-3}dx$

в) $\int \frac{xdx}{\sin^2(5-6x^2)}$ г) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$

д) $\int \frac{x^2dx}{5+6x^3}$ е) $\int x\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx$

59. а) $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}dx$ б) $\int (2x-3)^5 dx$

в) $\int \frac{\ln(x+3)}{x+3}dx$ г) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-9x^4}}$

д) $\int \frac{3xdx}{4x^2+1}$ е) $\int x\cdot \sin 4x\cdot dx$

60. а) $\int \frac{3x^2 - \sqrt[5]{x} + 2}{x} dx$ б) $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$

в) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ г) $\int \frac{\cos x dx}{3 - \sin x}$

д) $\int \frac{5x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$ е) $\int \sqrt[3]{x} \cdot \ln x \cdot dx$

Задачи 61-70

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = ax^2 + bx + c$ и прямой $y = kx + b$.Сделать чертёж.

61. $y = -x^2 + 4x - 1$; $y = -x - 1$ 62. $y = x^2 - 6x + 7$; $y = x + 1$
63. $y = -x^2 + 6x - 5$; $y = x - 5$ 64. $y = x^2 - 6x + 7$; $y = -x + 7$
65. $y = -x^2 + 6x - 5$; $y = -x + 1$ 66. $y = -x^2 - 6x - 5$; $y = x + 1$
67. $y = x^2 + 6x + 7$; $y = x + 7$ 68. $y = -x^2 - 6x - 6$; $y = -x - 6$
69. $y = x^2 + 6x + 7$; $y = -x + 1$ 70. $y = x^2 - 4x + 1$; $y = x + 1$

Задачи 71-80

Найти общее решение дифференциального уравнения

71. $x \cdot \sqrt{1 + y^2} + y \cdot y'\sqrt{1 + x^2} = 0$
72. $(1+y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$
73. $(x^2 - x^2 y)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$
74. $y' + y \cdot tgx = 0$
75. $\cos x \cdot \sin y \cdot dy - \cos y \cdot \sin x \cdot dx = 0$
76. $e^y (1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$
77. $xy' - 2yx^2 = 0$
78. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 0$
79. $e^x (1 + y^2)dx = 2y(1 + e^x)dy$
80. $y' + xy\cos x = 0$

Задачи 81-90

Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение удовлетворяющее начальному условию: $y = y_0$ при $x = x_0$

81. $(x^2 + 1)y' - xy = x(x^2 + 1)$, $x_0 = \sqrt{3}; y_0 = 6$
82. $xy' - 2y = x + 1$, $x_0 = 2; y_0 = \frac{3}{2}$
83. $xy' + 2y = x^4$, $x_0 = \sqrt{2}; y_0 = \frac{13}{6}$
84. $xy' + y = x + 1$, $x_0 = 2; y_0 = \frac{3}{2}$
85. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 1$, $x_0 = 1; y_0 = 2$

86. $y' + y\cos x = \cos x$, $x_0 = \pi$; $y_0 = 5$

87. $xy' + 2y = \cos x$, $x_0 = 2\pi$; $y_0 = 0$

88. $y' - y \cdot tgx = \sin 2x$, $x_0 = \pi$; $y_0 = \dfrac{4}{3}$

89. $y'\cos x + y \cdot \sin x = 1$, $x_o = \pi$; $y_0 = 3$

90. $y' - 2y = e^{2x}$, $x_0 = 0; y_0 = 2$

Задачи 91-110

Дан степенной ряд $\sum \frac{a^n x^n}{b^n n^3}$. При заданных значениях a и b написать первые четыре члена ряда, найти интервал сходимости ряда, исследовать его сходимость на концах интервала и найти область сходимости.

91. a=2, b=4
92. a=5, b=8
93. a=7, b=5
94. a=3, b=4
95. a=2, b=6
96. a=5, b=7
97. a=2, b=3
98. a=4, b=9
99. a=3, b=5
100. a=7, b=6
101. a=4, b=7
102. a=2, b=5
103. a=5, b=2
104. a=3, b=2
105. a=6, b=4
106. a=7, b=4
107. a=4, b=5
108. a=4, b=3
109. a=8, b=3
110. a=3, b=7

Задачи 110-130.

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем разложения подынтегральной функции в ряд Маклорена и почленного интегрирования этого ряда.

111. $\int_0^{0,1} \frac{1-e^x}{x} dx$

112. $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

113. $\int_0^{0,25} e^{-x^2} dx$

114. $\int_0^{1} x \cdot \cos\sqrt{x} dx$

115. $\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^x dx$

116. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx$

117. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

118. $\int\limits_0^{\frac{1}{8}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

119. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x} \cdot \cos x dx$

120. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+ч^2}}$

121. $\int\limits_0^{0,1} e^{-2x^2} dx$

122. $\int\limits_0^{0,1} \ln(1+\sqrt{x}) dx$

123. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$

124. $\int\limits_0^1 x \cdot \sin \sqrt{x} dx$

125. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} dx$

126. $\int\limits_0^{0,5} e^{-3x^2} dx$

127. $\int \sqrt[3]{x^2} \cos dx$

128. $\int\limits_0^1 \frac{\sin \sqrt{x}}{x} dx$

129. $\int\limits_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$

130. $\int\limits_0^{0,25} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$