



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИДО

С.И. Качин

« ____ » _____ 2012 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 2

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов ИДО, обучающихся по направлению
140400 «Электроэнергетика и электротехника»

Составители

Л.И.Терехина, И.И.Фикс

Семестр	3
Кредиты	6
Лекции, часов	10
Практические занятия, часов	14
Индивидуальные задания	4
Формы контроля	экзамен

Издательство

Томского политехнического университета
2012



УДК 517

Математический анализ 2: методические указания и индивид. задания для студентов ИДО, обучающихся по направлению 140400 «Электроэнергетика и электротехника» / сост. Л.И. Терехина, И.И. Фикс – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 93 с.

Методические указания и индивидуальные задания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики и математической физики «___» _____ 2012 года, протокол № ____.

Зав. кафедрой ВММФ
профессор

А.Ю. Трифонов

Аннотация

Методические указания и индивидуальные задания по дисциплине «Математический анализ 2» предназначены для студентов 2 курса технических специальностей ИДО. Данная дисциплина изучается в одном семестре.

Приводится содержание основных тем дисциплины, темы практических занятий, варианты заданий для индивидуальных домашних заданий и список рекомендуемой литературы. Даны методические указания по выполнению индивидуальных домашних заданий.



Оглавление

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ.....	4
2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ	5
3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ	8
3.1. Тематика практических занятий.....	8
4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ	9
4.1. Общие методические указания.....	9
4.1.1. Требования к оформлению индивидуального задания	9
4.2. Варианты индивидуального задания №1 «Неопределенный интеграл»	10
4.3. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1	25
4.4. Варианты индивидуального задания №2 «Определенный интеграл».....	32
4.5. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 2	42
4.6. Варианты индивидуального задания №3 «Кратные интегралы»	52
4.7. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 3	60
4.8. Варианты индивидуального задания №4 «Скалярное и векторное поле»	68
4.9. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 4	77
5. ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ	85
5.2. Вопросы для подготовки к экзамену	85
5.3. Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину по КЗФ.....	88
5.4. Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину с применением ДОТ	89
6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ	92



1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Математический анализ 2» изучается в первом семестре второго курса студентами всех технических специальностей ИДО.

Задачами дисциплины являются: развитие математической интуиции, воспитание математической культуры; формирование навыков, необходимых для использования знаний при изучении специальных дисциплин и дальнейшей практической деятельности; овладение необходимым математическим аппаратом, дающим возможность анализировать, моделировать и решать технические задачи; воспитание отношения к математике как к инструменту исследования и решения технических задач, необходимому в дальнейшей работе.

В результате освоения дисциплины студент должен

знать:

основные понятия дифференциального и интегрального исчисления (предел, производная, дифференциал, неопределенный и определенный интегралы и их применение к решению прикладных задач);

уметь:

применять изученные методы для решения профессиональных задач, устанавливать границы применимости методов, уметь анализировать найденные решения;

владеть:

навыками применения современного математического инструментария для решения технических задач, методиками построения, анализа и применения математических моделей;

иметь опыт:

применения математической символики для выражения количественных и качественных отношений объектов исследования, аналитического и численного решения задач.

Дисциплина является базовой дисциплиной естественно-научного цикла (Б2). Для её успешного усвоения необходимы математические знания и умения на уровне среднего образования, а именно, необходимо свободно оперировать с простыми дробями, целыми и дробными степенями, с формулами сокращенного умножения, строить графики основных элементарных функций, находить области определения элементарных функций, оперировать с логарифмами.

Пререквизитами данной дисциплины являются «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» и «Дифференциальное исчисление».

Кореквизитами является «Информатика».



2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Неопределенный интеграл

Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Методы интегрирования: непосредственное, подведение под знак дифференциала, интегрирование по частям и подстановкой. Интегрируемые классы функций: рациональных дробей, простейших иррациональностей, рациональных тригонометрических функций, дифференциальных биномов. Понятие о неберущихся интегралах.

Рекомендуемая литература: [1, глава 1], [3, глава X], [4, глава V, п. 1], [5, ч. 1, глава IX].

Методические указания

Необходимо освоить основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование с помощью таблицы интегралов и основных свойств неопределенного интеграла, метод подведения под знак дифференциала, метод интегрирования по частям и замены переменной. Необходимо изучить интегрирование основных классов функций: интегралов с квадратным трехчленом в знаменателе дроби, рациональные дроби, иррациональные и тригонометрические функции.

Тема 2. Определенный интеграл

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл, его существование, свойства, геометрический и физический смыслы. Оценка интеграла, среднее значение функции в интервале. Основная формула интегрального исчисления (Ньютона – Лейбница). Вычисление определенных интегралов. Общая схема применения интеграла в решении геометрических и физических задач. Вычисление площадей плоских фигур, объемов тел, длин дуг. Решение физических задач. Понятие о несобственных интегралах по бесконечному промежутку и от разрывных функций. Их сходимость, оценка и вычисление.



Рекомендуемая литература: [1, глава 2], [3, глава XI], [4, глава V, п.п. 2,3,4; глава VI], [5 часть 1, глава X].

Методические указания

Необходимо научиться вычислять определенные интегралы, используя методы решения неопределенных интегралов. Определять среднее значение функции на интервале. Вычислять площади плоских фигур при различном способе задания границ области. Вычислять длины дуг плоских кривых при различном способе задания линий. Вычислять объемы тел вращения. Исследовать на сходимость несобственные интегралы 1-го и 2-го рода, использовать признаки сходимости.

Тема 3. Кратные интегралы

3.1. Двойной и тройной интегралы

Двойной интеграл: понятие, свойства, геометрический и физический смысл. Сведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах. Тройной интеграл: понятие, свойства, геометрический и физический смысл. Сведение тройного интеграла к повторному. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Использование кратных интегралов в решении геометрических и физических задач

3.2. Криволинейные и поверхностные интегралы

Криволинейные интегралы 1-го и 2-го родов, их свойства и вычисление. Интеграл по замкнутому контуру, формула Грина. Независимость от пути интегрирования. Интегрирование полного дифференциала.

Поверхностные интегралы 1-го и 2-го родов, их свойства и вычисление. Интеграл по замкнутой поверхности, формула Остроградского – Гаусса.

Рекомендуемая литература: [2, глава 1], [3, глава XIII; глава XIV], [4, глава VIII], [5 часть 2, глава 1].

Методические указания

При изучении данного раздела необходимо научиться расставлять пределы интегрирования по плоской области в декартовой и полярной



системах координат. Вычислять площади фигур с помощью двойных интегралов. Необходимо уметь расставлять пределы интегрирования в тройном интеграле по области в пространстве в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат, а также вычислять объемы тел с помощью тройного интеграла.

Тема 4. Скалярные и векторные поля

4.1. Скалярное поле

Скалярные поля. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению. Вектор-градиент, его свойства. Физический смысл вектора-градиента. Связь градиента и производной по направлению.

4.2. Векторное поле

Понятие векторного поля. Дивергенция и поток векторного поля через поверхность, физический смысл. Ротор и циркуляция векторного поля. Вычисление работы силового поля. Простейшие векторные поля: потенциальное, трубчатое и гармоническое. Физические примеры. Операторы Гамильтона и Лапласа, гармонические функции.

Рекомендуемая литература: [1, глава 2], [3, глава XIII; глава XIV], [4, глава VIII], [5 часть 2, глава 2].

Методические указания

В данном разделе основными задачами являются: вычисление потока и циркуляции векторного поля с использованием формул Остроградского, Стокса и Грина. Вычисление работы. Построение линий и поверхностей уровня скалярного поля. Нахождение производной по направлению и градиента скалярного поля.



3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Тематика практических занятий

1. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование, интегрирование подведением под знак дифференциала, интегрирование по частям и выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе дроби (2 часа).

2. Интегрирование рациональных дробей, иррациональных и тригонометрических функций, метод замены переменной, различные виды подстановок (2 часа).

3. Вычисление определенных интегралов, площадей, длин дуг и объемов тел вращения. Исследование на сходимость несобственных интегралов (2 часа).

4. Двойной интеграл. Расстановка пределов интегрирования в двойном интеграле в декартовой и полярной системах координат. Приложения двойного интеграла (2 часа).

5. Тройной интеграл. Расстановка пределов интегрирования в тройном интеграле по области в пространстве в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат, приложения тройного интеграла (2 часа).

6. Вычисление потока и циркуляции векторного поля. Формулы Остроградского, Стокса, Грина. Работа в силовом поле (2 часа).

7. Скалярное поле. Вычисление производной по направлению и градиента. Построение линий и поверхностей уровня скалярного поля (2 часа).

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

4.1. Общие методические указания

В соответствии с учебным графиком предусмотрено выполнение четырех индивидуальных домашних заданий. Выполнение этих заданий необходимо для закрепления теоретических знаний и приобретения практических навыков решения типовых задач. Номера индивидуальных заданий соответствуют темам 2 раздела.

Номер варианта индивидуального задания определяется по последней цифре номера зачетной книжки. Например, если номер зачетной книжки Д-5Б11/04, то номер варианта задания равен 4. Если номер зачетной книжки 3-5Б11/40, то номер варианта задания равен 10.

4.1.1. Требования к оформлению индивидуального задания

При оформлении индивидуального домашнего задания необходимо соблюдать следующие требования.

1. Индивидуальное задание должно иметь титульный лист, оформленный в соответствии со стандартами ТПУ [6]. На титульном листе указываются номер индивидуального задания, номер варианта, название дисциплины; фамилия, имя, отчество студента; номер группы, шифр. **Образец оформления и шаблон титульного листа** размещен на сайте ИДО в разделе СТУДЕНТУ → ДОКУМЕНТЫ (<http://portal.tpu.ru/ido-tpu>).

2. Каждое индивидуальное задание оформляется отдельно. Студенты, изучающие дисциплину **по классической заочной форме**, оформляют индивидуальные задания в отдельных тетрадях. Студенты, изучающие дисциплину **с применением дистанционных технологий**, оформляют индивидуальные задания в отдельных файлах.

3. Текст индивидуального задания набирается в текстовом процессоре Microsoft Word. Шрифт Times New Roman, размер 12–14 pt, для набора формул рекомендуется использовать редактор формул Microsoft Equation или MathType.

4. Решения задач следует располагать в той же последовательности, что и задания.

5. Каждая задача должна начинаться с условия задачи, ниже краткая запись задачи, если необходимо – рисунок, с условными обозначениями, которые в дальнейшем будут использованы при решении задач.



6. Решение должно быть подробным, с включением промежуточных расчётов и указанием использованных формул.

7. Страницы задания должны иметь сквозную нумерацию.

8. В задание включается список использованной литературы.

Если работа не соответствует требованиям, студент получает оценку «не зачтено». В этом случае работа должна быть исправлена и повторно предоставлена преподавателю. При доработке в текст необходимо включить дополнительные вопросы, полученные после проверки работы преподавателем, и ответы на эти вопросы.

Студент, не получивший положительной аттестации по индивидуальному заданию, не допускается к сдаче экзамена по данной дисциплине.

4.2. Варианты индивидуального задания №1 «Неопределенный интеграл»

Вариант 1

1. Найти интегралы, применяя простейшие преобразования и подведение под знак дифференциала

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}; \quad 2) \int \frac{dx}{10x^2 - 7};$$

$$3) \int \frac{e^{\arctg 3x}}{1+9x^2} dx; \quad 4) \int \cos(3e^x - 5) \cdot e^x dx;$$

$$5) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[4]{3 \sin x - 5}}; \quad 6) \int x^3 \cdot \sqrt[7]{3-5x^4} dx.$$

2. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям

$$1) \int (2x-1) \sin x dx; \quad 2) \int \sqrt[3]{x} \cdot \ln x dx;$$

$$3) \int \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx; \quad 4) \int (x^3 + 2x) \cdot e^{x^2} dx.$$

3. Найти интегралы, предварительно выделив полный квадрат в знаменателе дроби



$$1) \int \frac{(2x+3)dx}{x^2-5x+11}; \quad 2) \int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{3-4x-4x^2}}.$$

4. Найти интегралы от рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов

$$1) \int \frac{dx}{x(x+3)^2}; \quad 2) \int \frac{(x^2+5)dx}{(x-1)(x^2+2)}.$$

5. Найти интегралы от иррациональных функций

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}; \quad 2) \int \frac{(x-1)dx}{x\sqrt{x-3}};$$

$$3) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}; \quad 4) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^2}}.$$

6. Найти интегралы от тригонометрических функций

$$1) \int \cos 2x \cos 7x dx; \quad 2) \int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x};$$

$$3) \int \frac{dx}{\sin x - \cos x}; \quad 4) \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$$



Вариант 2

1. Найти интегралы, применяя простейшие преобразования и подведение под знак дифференциала

1) $\int (1-x)^2 \cdot (1-3x) dx$; 2) $\int x^4 \cdot \sqrt[7]{1-6x^5} dx$;

3) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln^2 x + 2}}$; 4) $\int \frac{(2x + 3\arcsin^2 x) dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

5) $\int \frac{(1-\cos x) dx}{(x-\sin x)^3}$; 6) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

2. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям

1) $\int \sqrt{x} \ln x dx$; 2) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$;

3) $\int x^2 \cdot e^{-2x} dx$; 4) $\int x^3 \cdot \operatorname{arctg} x dx$.

3. Найти интегралы, предварительно выделив полный квадрат в знаменателе дроби

1) $\int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{x^2+6x+4}}$; 2) $\int \frac{(2x-1) dx}{3x^2-3x+2}$.

4. Найти интегралы от рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов

1) $\int \frac{x dx}{(x+3)(x+2)(x+1)}$; 2) $\int \frac{(3x-1) dx}{x^2(x^2+5)}$.

5. Найти интегралы от иррациональных функций

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}};$

2) $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x+2}};$

3) $\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x} dx;$

4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

6. Найти интегралы от тригонометрических функций

1) $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^2 x};$

2) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x - 5};$

3) $\int \sin x \cdot \sin 5x dx;$

4) $\int \cos^3(x/2) dx.$

Вариант 3

1. Найти интегралы, применяя простейшие преобразования и подведение под знак дифференциала

1) $\int \frac{(4x+1)dx}{x^2-2};$

2) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}};$

3) $\int x^4 \cdot 5^{-4x^5} dx;$

4) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (3-7 \operatorname{tg} x)};$

5) $\int \frac{dx}{x \cdot (4 \ln x - 9)^3};$

6) $\int x^3 \cdot \sqrt[4]{4x^4-3} dx.$

2. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям

1) $\int \operatorname{arctg} 2x dx;$

2) $\int (3x-2) \cdot \sin 5x dx;$

3) $\int \sqrt{x^2-1} dx;$

4) $\int (x^2-x+1) \cdot \ln x dx.$

3. Найти интегралы, предварительно выделив полный квадрат в знаменателе дроби

1) $\int \frac{x dx}{x^2 + 4x + 29};$

2) $\int \frac{(2x + 3) dx}{\sqrt{x^2 - x}}.$

4. Найти интегралы от рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов

1) $\int \frac{(x - 1) dx}{(x + 1)^2 (x - 4)};$

2) $\int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 1)}.$

5. Найти интегралы от иррациональных функций

1) $\int \frac{dx}{x(1 + \sqrt[3]{x})};$

2) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x + 1}};$

3) $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2} dx;$

4) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}.$

6. Найти интегралы от тригонометрических функций

1) $\int \sin^4 2x dx;$

2) $\int \frac{dx}{4 - \cos^2 x + \sin^2 x};$

3) $\int \cos 3x \cdot \sin x dx;$

4) $\int \frac{\sin^5 x \cdot dx}{\cos^8 x}.$



Вариант 4

1. Найти интегралы, применяя простейшие преобразования и подведение под знак дифференциала

1) $\int \frac{e^{3\operatorname{tg}x-2}}{\cos^2 x} dx;$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (4-x)};$

3) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)};$

4) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx;$

5) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-9\sin^2 x}} dx;$

6) $\int \frac{x dx}{(5x^2+13)^4}.$

2. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям

1) $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx;$

2) $\int (4x^2-5x) \cdot e^{7x} dx;$

3) $\int \arcsin 3x dx;$

4) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx.$

3. Найти интегралы, предварительно выделив полный квадрат в знаменателе дроби

1) $\int \frac{(2x+1) dx}{x^2-6x+10};$

2) $\int \frac{x dx}{\sqrt{3-x-x^2}}.$

4. Найти интегралы от рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов

1) $\int \frac{(x+3) dx}{x^2(x+5)};$

2) $\int \frac{(x^2-1) dx}{x^3+5x}.$

5. Найти интегралы, применяя подходящие подстановки

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2} + \sqrt{x+2}} ; \quad 2) \int \frac{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} dx ;$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-4}} ; \quad 4) \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}} .$$

6. Найти интегралы от тригонометрических функций

$$1) \int \frac{dx}{1+3\cos x-2\sin x} ; \quad 2) \int \frac{dx}{\cos^2 x + 5\sin^2 x} ;$$

$$3) \int \sin(x/2)\sin(x/3)dx ; \quad 4) \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^7 x} .$$

Вариант 5

1. Найти интегралы, применяя простейшие преобразования и подведение под знак дифференциала

$$1) \int \frac{x dx}{x^4-16} ; \quad 2) \int \frac{(x-1) dx}{\sqrt{x^7}} ;$$

$$3) \int \frac{dx}{\sin^2 x (4-5\operatorname{ctg} x)} ; \quad 4) \int \frac{3^{2x} dx}{\sqrt{3^{4x}-8}} ;$$

$$5) \int \frac{dx}{x \cdot (5+4\ln^2 x)} ; \quad 6) \int x^5 \cdot e^{4+3x^6} dx .$$

2. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям

$$1) \int x \cdot e^{x/2} dx ; \quad 2) \int (3x-5)\cos x dx ;$$

$$3) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx ; \quad 4) \int x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot dx .$$



3. Найти интегралы, предварительно выделив полный квадрат в знаменателе дроби

1) $\int \frac{(7x-1)dx}{x^2-4x+8};$

2) $\int \frac{(3x-13)dx}{\sqrt{1+6x-3x^2}}.$

4. Найти интегралы от рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов

1) $\int \frac{(x^2+x+1)dx}{x(x+1)(x-2)};$

2) $\int \frac{dx}{(x-5)(x^2+5)}.$

5. Найти интегралы от иррациональных функций

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}};$

2) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-9}};$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$

4) $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{(x^2+1)^3}}.$

6. Найти интегралы от тригонометрических функций

1) $\int \frac{dx}{3+7\sin^2 x};$

2) $\int \frac{dx}{5-4\cos x};$

3) $\int \operatorname{tg}^3 x dx;$

4) $\int \cos 3x \cdot \cos 4x dx.$



Вариант 6

1. Найти интегралы, применяя простейшие преобразования и подведение под знак дифференциала

1) $\int \frac{dx}{(7-9x)^3};$

2) $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx;$

3) $\int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{4-e^{6x}}};$

4) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} dx;$

5) $\int \frac{x^2}{4-7x^3} dx;$

6) $\int e^{-x} \cdot \sin e^{-x} dx.$

2. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям

1) $\int (2x-3) \cdot \sin 5x \, dx;$

2) $\int x \cdot \ln(x+1) \, dx;$

3) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx;$

4) $\int x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x \, dx.$

3. Найти интегралы, предварительно выделив полный квадрат в знаменателе дроби

1) $\int \frac{(4x-6)dx}{2x^2+2x+5};$

2) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{5+x-x^2}}.$

4. Найти интегралы от рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов

1) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2(x+6)};$

2) $\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)}.$

5. Найти интегралы от иррациональных функций

1) $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}};$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[6]{x+3}};$

3) $\int \sqrt{16 - x^2} \cdot dx;$

4) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx.$

6. Найти интегралы от тригонометрических функций

1) $\int \frac{dx}{5 + 3\cos^2 x + 7\sin^2 x};$

2) $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx;$

3) $\int \frac{dx}{3\sin x + 8\cos x - 1};$

4) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}.$

Вариант 7

1. Найти интегралы, применяя простейшие преобразования и подведение под знак дифференциала

1) $\int \frac{dx}{(5x - 2)^{5/2}};$

2) $\int \frac{\arccos^3 x - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$

3) $\int \frac{\operatorname{tg}(2x + 1)}{\cos^2(2x + 1)} dx;$

4) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{3^{2x} - 7}};$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (4x + 9)};$

6) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{4 - 9\ln^2 x}}.$



2. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям

1) $\int x \cdot \sin 2x \, dx;$

2) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[4]{x^3}} \, dx;$

3) $\int x^2 \cdot e^{3x} \cdot dx;$

4) $\int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$

3. Найти интегралы, предварительно выделив полный квадрат в знаменателе дроби

1) $\int \frac{(5x+6)dx}{3x^2+2x+1};$

2) $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$

4. Найти интегралы от рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов

1) $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x+3)(x+4)^2};$

2) $\int \frac{x \, dx}{(x+2)(x^2+4)}.$

5. Найти интегралы от иррациональных функций

1) $\int \frac{\sqrt{x} \, dx}{4x - \sqrt[3]{x^2}};$

2) $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{x+2}};$

3) $\int x^2 \cdot \sqrt{x^2-4} \, dx;$

4) $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{x^2+2}}.$

6. Найти интегралы от тригонометрических функций

1) $\int \frac{dx}{5 - \sin^2 x};$

2) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x};$

3) $\int \cos 3x \cdot \sin 8x \, dx;$

4) $\int \operatorname{tg}^6 x \, dx.$

Вариант 8

1. Найти интегралы, применяя простейшие преобразования и подведение под знак дифференциала

1) $\int \frac{\sin 5x dx}{3 - 2 \cos 5x};$

2) $\int \frac{dx}{x(4 + 5 \ln x)^5};$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (x - 9)};$

4) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}};$

5) $\int \frac{(x - 1)}{\sqrt{16 - x^2}} dx;$

6) $\int \frac{e^{3/x}}{x^2} dx.$

2. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям

1) $\int (7x + 5) \cos 3x dx;$

2) $\int \ln(x^2 + 9) dx;$

3) $\int \operatorname{arctg}(1/x) dx;$

4) $\int x^5 \cdot e^{x^2} dx.$

3. Найти интегралы, предварительно выделив полный квадрат в знаменателе дроби

1) $\int \frac{(7x - 4) dx}{\sqrt{x^2 - 2x}};$

2) $\int \frac{(x + 5) dx}{3x^2 + 6x + 1}.$

4. Найти интегралы от рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов

1) $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x(x - 1)(x + 2)};$

2) $\int \frac{dx}{x^3 + 3x}.$



5. Найти интегралы от иррациональных функций

1) $\int \frac{dx}{x - 4\sqrt[3]{x^2}};$ 2) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}};$

3) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}};$ 4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

6. Найти интегралы от тригонометрических функций

1) $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x \cdot dx;$ 2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 3};$

3) $\int \cos 5x \cdot \cos^2 3x dx;$ 4) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x}.$

Вариант 9

1. Найти интегралы, применяя простейшие преобразования и подведение под знак дифференциала

1) $\int \frac{x dx}{\cos^2(x^2 - 4)};$ 2) $\int 5^{\frac{1-9x}{15}} dx;$

3) $\int x^4 \cdot \sqrt{1-6x^5} dx;$ 4) $\int \frac{dx}{4+5x^2};$

5) $\int \frac{e^x dx}{4-9e^{2x}};$ 6) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln^2 x - 6}}.$

2. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям

1) $\int (x^3 + x)e^{-x^2} dx;$ 2) $\int (x-5)\sin 4x dx;$

3) $\int x \cdot \ln(x-1) dx;$ 4) $\int \sqrt{1+x^2} dx.$



3. Найти интегралы, предварительно выделив полный квадрат в знаменателе дроби

1) $\int \frac{(x+1)dx}{6x^2 - 3x + 1}$; 2) $\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{7-4x-x^2}}$.

4. Найти интегралы от рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов

1) $\int \frac{2x^2 - x}{(x+4)(x^2+5)} dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^4 - 16}$.

5. Найти интегралы от иррациональных функций

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[6]{x^5}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx$;

3) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(2+x^2)^5}}$; 4) $\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt{x^2-1}}$.

6. Найти интегралы от тригонометрических функций

1) $\int \cos x \cdot \sin 2x \cdot \cos 7x dx$; 2) $\int \frac{dx}{3+5\sin x}$;

3) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; 4) $\int \frac{dx}{3-2\cos^2 x}$.

Вариант 10

1. Найти интегралы, применяя простейшие преобразования и подведение под знак дифференциала

$$1) \int \frac{dx}{\arcsin^2 x \cdot \sqrt{1-x^2}}; \quad 2) \int \frac{\sin x \, dx}{1 + \cos^2 x};$$

$$3) \int \frac{dx}{x\sqrt{4-5\ln x}}; \quad 4) \int \frac{x^2}{\sqrt{5+x^6}} dx;$$

$$5) \int \frac{dx}{(1+x^2) \cdot \operatorname{arctg} x}; \quad 6) \int \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2}.$$

2. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям

$$1) \int \operatorname{arctg} 4x \, dx; \quad 2) \int (1-x^2) \cdot e^{-2x} \, dx;$$

$$3) \int (1-7x) \cdot \sin 3x \, dx; \quad 4) \int \frac{\ln x}{\sqrt[6]{x}} \, dx.$$

3. Найти интегралы, предварительно выделив полный квадрат в знаменателе дроби

$$1) \int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+5}; \quad 2) \int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{x^2+6x-8}}.$$

4. Найти интегралы от рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов

$$1) \int \frac{(2x^2+3) \, dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}; \quad 2) \int \frac{dx}{(x^2+3)(x-2)}.$$

5. Найти интегралы от иррациональных функций

1) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{4-x}};$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+2}\sqrt{x}};$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$

4) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}.$

6. Найти интегралы от тригонометрических функций

1) $\int \frac{dx}{2+5\cos x};$

2) $\int \frac{dx}{4-9\sin^2 x};$

3) $\int \cos 3x \cdot \cos^2 x \cdot dx;$

4) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos x}.$

4.3. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1 «Неопределенный интеграл»

1. Найти интегралы, применяя простейшие преобразования и метод подведения под знак дифференциала:

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{(1-x)^2}{x^2} dx &= \int \frac{1-2x+x^2}{x^2} = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 \right) dx = \int \frac{1}{x^2} dx - 2 \int \frac{dx}{x} + \int dx = \\ &= -\frac{1}{x} - 2 \ln |x| + x + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}+10}} &= \left| x^4 dx = \frac{1}{5} d(x^5) \right| = \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5)}{\sqrt{(x^5)^2+10}} = \\ &= \frac{1}{5} \ln |x^5 + \sqrt{x^{10}+10}| + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx &= \int \frac{x dx}{x^2+1} - \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx = \\ &= \left| x dx = \frac{1}{2} d(x^2+1), \frac{dx}{x^2+1} = d(\operatorname{arctg} x) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2} \ln |x^2+1| - \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[6]{1+5\ln x}} &= \left| \frac{dx}{x} = d(\ln x) = \frac{1}{5} d(1+5\ln x) \right| = \\ &= \frac{1}{5} \int (1+5\ln x)^{-1/6} d(1+5\ln x) = \frac{1}{5} \frac{(1+5\ln x)^{-1/6+1}}{-1/6+1} = \frac{6}{25} (1+5\ln x)^{5/6} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \int \frac{2^x dx}{\sqrt{7-3 \cdot 2^x}} &= \left| 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} d(2^x) = -\frac{1}{3\ln 2} d(7-3 \cdot 2^x) \right| = \\ &= -\frac{1}{3\ln 2} \int \frac{d(7-3 \cdot 2^x)}{\sqrt{7-3 \cdot 2^x}} = -\frac{2}{3\ln 2} \sqrt{7-3 \cdot 2^x} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \int x^2 \cdot e^{3-x^3} dx &= \left| x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3) = -\frac{1}{3} d(3-x^3) \right| = \\ &= -\frac{1}{3} \int e^{3-x^3} d(3-x^3) = -\frac{1}{3} e^{3-x^3} + c. \end{aligned}$$

2. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям

Формула интегрирования по частям имеет вид $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$$1) \int (2x+3) \cos 5x dx =$$

$$\begin{aligned} &\left| \begin{array}{l} u=2x+3, \quad du=2 \cdot dx, \\ dv=\cos 5x dx, \quad v=\int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) = \frac{1}{5} \sin 5x \end{array} \right| = \\ &= (2x+3) \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{5} \int \sin 5x dx = \frac{2x+3}{5} \sin 5x + \frac{2}{25} \cos 5x + c. \end{aligned}$$

$$2) \int x \operatorname{tg}^2 x dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} u=x, \quad du=dx, \quad dv=\operatorname{tg}^2 x dx, \\ v=\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x \end{array} \right| =$$

$$= x(\operatorname{tg} x - x) - \int (\operatorname{tg} x - x) dx = x(\operatorname{tg} x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c.$$

$$\begin{aligned} 3) \int x \cdot e^{-x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^{-x} dx, \quad v = \int e^{-x} dx = -\int e^{-x} d(-x) = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= -x \cdot e^{-x} - \int (-e^{-x}) \cdot dx = -x \cdot e^{-x} - \int e^{-x} \cdot d(-x) = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \int x^2 \ln^2 x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = \frac{2 \ln x dx}{x}, \\ dv = x^2 dx, \quad v = \frac{1}{3} x^3 \end{array} \right| = \frac{1}{3} x^3 \ln^2 x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{2 \ln x dx}{x} = \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln^2 x - \frac{2}{3} \int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = x^2 dx, \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} \right) = \\ &= \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \right) = \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2x^3}{9} \ln x + \frac{2x^3}{27} = \\ &= \frac{x^3}{27} (9 \ln^2 x - 6 \ln x + 2) + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \int \operatorname{arctg} 2x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} 2x \quad du = \frac{2dx}{1+4x^2} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{2x dx}{1+4x^2} = \\ &= x \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{d(x^2)}{1+4x^2} = \\ &= x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \int \frac{d(4x^2 + 1)}{1+4x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + c. \end{aligned}$$

3. Найти интегралы, предварительно выделив полный квадрат в знаменателе дроби

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{(3x+5) dx}{x^2+6x-7} &= \left| \begin{array}{l} x^2+6x-7=(x^2+2 \cdot x+9)-9-7=(x+3)^2-16; \\ x+3=t; \quad x=t-3; \quad dx=dt; \\ x^2+6x-7=t^2-16 \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{(3(t-3)+5) dt}{t^2-16} = \int \frac{(3t-4) dt}{t^2-16} = \int \frac{3t dt}{t^2-16} - \int \frac{4 dt}{t^2-16} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2 - 16)}{t^2 - 16} - 4 \int \frac{dt}{t^2 - 4^2} = \frac{3}{2} \ln |t^2 - 16| - 4 \cdot \frac{1}{8} \ln \left| \frac{t-4}{t+4} \right| = \\ &= \frac{3}{2} \ln |x^2 + 6x - 7| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+3)-4}{(x+3)+4} \right| = \frac{3}{2} \ln |x^2 + 6x - 7| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+7} \right| + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \left| \begin{array}{l} x^2+x+1 = \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}; \\ x+1/2 = t; \quad x = t-1/2; \quad dx = dt; \\ x^2+x+1 = t^2 + 3/4 \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{2(t-1/2)-1}{\sqrt{t^2+3/4}} dt = \int \frac{2t-2}{\sqrt{t^2+3/4}} dt = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2+3/4}} dt - \int \frac{2}{\sqrt{t^2+3/4}} dt = \\ &= \int \frac{d(t^2+3/4)}{\sqrt{t^2+3/4}} - \int \frac{2}{\sqrt{t^2+3/4}} dt = \\ &= 2\sqrt{t^2+3/4} - 2 \ln \left| t + \sqrt{t^2+3/4} \right| = \\ &= 2\sqrt{x^2+x+1} - 2 \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right| + c. \end{aligned}$$

4. Найти интегралы от рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов

$$1) \int \frac{dx}{(x+4)^2(x-2)}$$

Разложим подынтегральную функцию на простые слагаемые

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+4)^2(x-2)} &= \frac{1}{36} \left(\frac{-6}{(x+4)^2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-2} \right) \\ \int \frac{dx}{(x+4)^2(x-2)} &= \frac{1}{36} \int \left(\frac{-6}{(x+4)^2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{36} \left(-6 \int \frac{dx}{(x+4)^2} - \int \frac{dx}{x+4} + \int \frac{dx}{x-2} \right) = \\ &= \frac{1}{36} \left(-6 \int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2} - \int \frac{d(x+4)}{x+4} + \int \frac{d(x-2)}{x-2} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{36} \left(\frac{6}{x+4} - \ln |x+4| + \ln |x-2| \right) + c.$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{dx}{(x+3)(x^2+4)} \\ \frac{1}{(x+3)(x^2+4)} &= \frac{1}{-5} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{x-3}{x^2+4} \right) = -\frac{1}{5} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{x^2+4} \right) \\ \int \frac{dx}{(x+3)(x^2+4)} &= -\frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x+3} - \frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{x^2+4} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{5} \left(\int \frac{d(x+3)}{x+3} - \int \frac{x dx}{x^2+4} + \int \frac{3 dx}{x^2+4} \right) = \\ &= -\frac{1}{5} \left(\int \frac{d(x+3)}{x+3} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} + 3 \int \frac{dx}{x^2+4} \right) = \\ &= -\frac{1}{5} \left(\ln |x+3| - \frac{1}{2} \ln |x^2+4| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + c. \end{aligned}$$

5. Найти интегралы от иррациональных функций

Здесь мы воспользуемся выбором подходящих подстановок

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}} dx = \\ = \left| \begin{array}{l} x = t^4, \quad dx = 4t^3 dt, \\ 1 - \sqrt[4]{x} = 1 - t, \quad t \sqrt[4]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3 dt}{1-t} = 4 \int \frac{t^5 dt}{1-t} = \\ = 4 \int \left(-t^4 - t^3 - t^2 - t - 1 + \frac{1}{1-t} \right) dt = \\ \text{(здесь выполнено деление } t^5 \text{ на } (1-t)) \\ = 4 \left(-\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t - \ln |1-t| \right) = \text{(возвращаемся к переменной } x) \\ = 4 \left(-\frac{\sqrt[4]{x^5}}{5} - \frac{x}{4} - \frac{\sqrt[4]{x^3}}{3} - \frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt[4]{x} - \ln |1-\sqrt[4]{x}| \right) + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt{x+3}} &= \\ &= \left| \begin{array}{l} x+3 = t^6, \quad dx = 6t^5 dt, \\ \sqrt{x+3} = t^2, \quad \sqrt[3]{x+3} = t^2 \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^2 + t^3} = 6 \int \frac{t^3}{1+t} = \\ &= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln |1+t| \right) = | t = \sqrt[6]{x+3} | = \\ &= 6 \left(\frac{\sqrt{x+3}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x+3}}{2} + \sqrt[6]{x+3} - \ln |1 + \sqrt[6]{x+3}| \right) + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \left| \begin{array}{l} x = 2 \sin t, \quad t = \arcsin \frac{x}{2}, \\ dx = 2 \cos t dt \end{array} \right| = \int \frac{4 \sin^2 t \cdot 2 \cos t dt}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} = \\ &= 4 \int \frac{\sin^2 t \cdot \cos t}{\cos t} dt = 4 \int \sin^2 t dt = 2 \int (1 - \cos 2t) dt = 2t - \sin 2t = \\ &= | t = \arcsin \frac{x}{2} | = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \sin(2 \arcsin \frac{x}{2}) + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}} &= \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t, \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{\operatorname{tg}^2 t dt}{\sqrt{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^5} \cos^2 t} = \\ &= \int \frac{\sin^2 t dt}{\cos^4 t \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^5}} = \int \frac{\sin^2 t \cdot \cos^5 t dt}{\cos^4 t} = \int \sin^2 t \cdot \cos t dt = \int \sin^2 t d(\sin t) = \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 t = | t = \operatorname{arctg} x | = \frac{1}{3} \sin^3(\operatorname{arctg} x) + c. \end{aligned}$$

6. Найти интегралы от тригонометрических функций

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{dx}{2-4\sin x} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2-4\frac{2t}{1+t^2}} = \\ &= \int \frac{2dt}{2t^2-8t+2} = \int \frac{dt}{t^2-4t+1} = \\ &= \int \frac{dt}{(t-2)^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-2-\sqrt{3}}{t-2+\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2)-2-\sqrt{3}}{\operatorname{tg}(x/2)-2+\sqrt{3}} \right| + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{dx}{3+\cos^2 x} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3+\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{3t^2+4} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2+4/3} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx = - \int \frac{(1-\cos^2 x)d(\cos x)}{\cos^5 x} = \\ &= - \int \left(\frac{d(\cos x)}{\cos^5 x} - \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} \right) = \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{2\cos^2 x} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \int \operatorname{ctg}^3 5x dx &= \left| \operatorname{ctg} 5x = t, \quad x = \frac{1}{5} \operatorname{arctg} t, \quad dx = -\frac{1}{5} \frac{dt}{1+t^2} \right| = -\frac{1}{5} \int \frac{t^3}{1+t^2} = \\ & \text{(выполняем деление } t^3 \text{ на } (t^2+1)) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{5} \int \left(t - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = -\frac{t^2}{10} + \frac{1}{10} \ln |1+t^2| = -\frac{1}{10} (\operatorname{ctg}^2 5x - \ln(1 + \operatorname{ctg}^2 5x)) + c.$$

4.4. Варианты индивидуального задания №2 «Определенный интеграл»

Вариант 1

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_9^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{1+x^6}};$$

$$2) \int_0^{\pi} (x+2) \cos(x/2) dx;$$

$$3) \int_3^4 \frac{dx}{x^2-6x+10};$$

$$4) \int_0^{\pi/3} \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx.$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \operatorname{arctg} x, \quad [0; \sqrt{3}];$$

$$2) y = \frac{x}{x^2 + 3x - 1}, \quad [1; 3].$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt[3]{x}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = \ln(1+t), \\ y = t(2-t), \quad y = 0. \end{cases}$$

4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) вокруг оси OX , 2) вокруг оси OY .

$$1) \begin{cases} y = \sqrt{x-1}, \\ y = 0, \quad y = 1, \quad x = 1/2. \end{cases}$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

5. Вычислить длины дуг линий, заданных уравнениями

$$1) L: \begin{cases} y = e^x + 6, \\ \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}. \end{cases}$$

$$2) L: \begin{cases} \rho = 5\varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq 12/5. \end{cases}$$

6. Вычислить несобственные интегралы или показать их расходимость

$$1) \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2-4x};$$

$$2) \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}.$$

Вариант 2

1. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{array}{ll} 1) \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x \, dx; & 2) \int_0^{\pi/4} x \cdot \sin 2x \, dx; \\ 3) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{2 + \sin x}; & 4) \int_1^3 \frac{x \, dx}{x^2 + 3x - 1}. \end{array}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}, \quad [1/3; 1/8]; \quad 2) y = \frac{1}{(11+5x)^3}, \quad [-2; -1].$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x, \\ y = 0. \end{cases} & 2) \begin{cases} x = t^2, \\ y = 2t - t^3. \end{cases} \end{array}$$

4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) вокруг оси OX , 2) вокруг оси OY :

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} (y-1)^2 = x, \\ x = 0, \quad y = 2. \end{cases} & 2) \begin{cases} y = \sin x, \\ y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \end{array}$$

5. Вычислить длины дуг линий, заданных уравнениями

$$\begin{array}{ll} 1) L: \begin{cases} y = 1 - \ln \sin x, \\ x \in [\pi/6; \pi/3]. \end{cases} & 2) L: \begin{cases} \rho = 3(1 - \cos \varphi), \\ \varphi \in [0; \pi/2]. \end{cases} \end{array}$$

6. Вычислить несобственные интегралы или показать их расходимость

$$\begin{array}{ll} 1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}; & 2) \int_1^5 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^3 - 1}}. \end{array}$$



Вариант 3

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$2) \int_1^2 \ln(3x+2) dx;$$

$$4) \int_0^{\pi/4} 2 \cos x \cdot \sin 3x dx;$$

$$6) \int_{2/3}^{7/3} \frac{x dx}{\sqrt{3x+2}}.$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}, \quad [1; 4]; \quad 2) y = \frac{\ln x}{x^5}, \quad [1; 2].$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y^2 = x+1, \\ y^2 = 9-x. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = t^2, & x = 0, \\ y = e^{t^2}, & y = e. \end{cases}$$

4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) вокруг оси OX , 2) вокруг оси OY :

$$1) \begin{cases} y = \sqrt{1-x^2}, \\ y = x, \\ y = 0, \quad (x > 0, y > 0). \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y^2 + x - 4 = 0, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

5. Вычислить длины дуг линий, заданных уравнениями

$$1) L: \begin{cases} y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x}, \\ 1/9 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$2) L: \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3/3 - t, \\ 0 \leq t \leq \sqrt{3}. \end{cases}$$

6. Вычислить несобственные интегралы или показать их расходимость

$$1) \int_0^{\infty} x \cdot \sin x \, dx;$$

$$2) \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x \, dx}{\sqrt[6]{(1 - \sin 3x)^5}}.$$

Вариант 4

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt[3]{1+x^2} \, dx;$$

$$2) \int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} \, dx;$$

$$3) \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \, dx;$$

$$4) \int_{1/3}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{9 + 6x - 9x^2}}.$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{x}{\sin^2 x}, \quad x \in [\pi/4; \pi/2]; \quad 2) y = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \in [0; \pi/4].$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = e^{-x}, \\ y = e^x, \\ y = e. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t \cdot \cos^2 t, \quad t \in [0; \pi/2]. \end{cases}$$

4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) вокруг оси OX , 2) вокруг оси OY :

$$1) \begin{cases} x^3 = (y-1)^2; \\ y = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

$$2) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

5. Вычислить длины дуг линий, заданных уравнениями

$$1) L: y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}. \quad 2) L: \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ \pi/6 \leq \varphi \leq \pi/4. \end{cases}$$



6. Вычислить несобственные интегралы или показать их расходимость

$$1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}; \quad 2) \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}.$$

Вариант 5

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx; \quad 2) \int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx;$$

$$3) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5-3\cos x}; \quad 4) \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \cos^2 x, \quad [-\pi/2; \pi/2]; \quad 2) y = \frac{1}{e^x + 1}, \quad [0; 2].$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = 3/x, \\ y = 4 - x. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = t, \\ y = t(3-t), \quad y = 0. \end{cases}$$

4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) вокруг оси OX , 2) вокруг оси OY :

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y^2 = 3x/2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = x, \quad x = 0, \quad x = 1. \end{cases}$$

5. Вычислить длины дуг линий, заданных уравнениями

$$1) L: \begin{cases} y = x^2 / 4 - (\ln x) / 2, \\ 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$$

6. Вычислить несобственные интегралы или показать их расходимость

$$1) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2}; \quad 2) \int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}.$$

Вариант 6

1. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{array}{ll} 1) \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}; & 2) \int_1^2 \frac{(x-2)dx}{x^2-2x+2}; \\ 3) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}; & 4) \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x \cdot \cos x dx}{\sin^2 x}. \end{array}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \sqrt{1-2x}, \quad [0; 1/2]; \quad 2) y = \sin^3 x, \quad [0; 2\pi].$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} y^2 + 8x = 16, \\ y^2 - 24x = 48. \end{cases} & 2) \begin{cases} x = \ln(1+t), \\ y = 5t - t^2, \\ y = 0. \end{cases} \end{array}$$

4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) вокруг оси OX, 2) вокруг оси OY:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} y = 8 - x^2, \\ y = x^2. \end{cases} & 2) \begin{cases} y = 2 \cos t, \\ x = 5 \sin t. \end{cases} \end{array}$$

5. Вычислить длины дуг линий, заданных уравнениями

$$\begin{array}{ll} 1) L: \begin{cases} y = \ln x, \\ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}. \end{cases} & 2) L: \begin{cases} \rho = \sin^3(\varphi/3), \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases} \end{array}$$

6. Вычислить несобственные интегралы или показать их расходимость

$$\begin{array}{ll} 1) \int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{x^3-1} dx; & 2) \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx. \end{array}$$

Вариант 7

1. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{array}{ll} 1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}; & 2) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}}; \\ 3) \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx; & 4) \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \cdot dx. \end{array}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1}{3\sin x + \cos x}, \quad [0; \pi/4]; \quad 2) y = (e^x + e^{-x}), \quad [\ln 2; \ln 3].$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} y = \sin(\pi x/2), \\ y = x^2. \end{cases} & 2) \begin{cases} x = 1 - \cos t, \\ y = t - \sin t, \\ y = (\pi x)/2. \end{cases} \end{array}$$

4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) вокруг оси OX , 2) вокруг оси OY :

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} y = e^{-2x} - 1, \\ y = e^{-x} + 1, \\ x = 0. \end{cases} & 2) \begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3 \ln t, \\ x = 0, \quad y = 0. \end{cases} \end{array}$$

5. Вычислить длины дуг линий, заданных уравнениями

$$1) L: \begin{cases} y = -\ln \cos x, \\ 0 \leq x \leq \pi/6. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 5 \sin^2 t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

6. Вычислить несобственные интегралы или показать их расходимость

$$1) \int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}; \quad 2) \int_0^{1/3} \frac{e^{3+1/x}}{x^2} dx.$$

Вариант 8

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{3x+25}};$$

$$2) \int_{-2}^0 x^2 e^{-x/2} dx;$$

$$3) \int_0^{\pi/4} \sin^3 2x dx;$$

$$4) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}, \quad x \in [0; 9]; \quad 2) y = x \cdot \cos x, \quad x \in [0; \pi/2].$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$1) \begin{cases} y = 6x^2 - x^4, \\ y = 1, \quad (x > 0). \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 2 \sin 2t, \\ y = 2 \sin t, \\ t \in [0; \pi/2]. \end{cases}$$

4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) вокруг оси OX , 2) вокруг оси OY :

$$1) \begin{cases} y = \sin x, \\ 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^2 + 1, \\ x = -a, \quad x = a, \quad y = 1/2. \end{cases}$$

5. Вычислить длины дуг линий, заданных уравнениями

$$1) L: \begin{cases} y = \ln(x^2 - 1), \\ 2 \leq x \leq 3. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} \rho = 3e^{\varphi/3}, \\ -1/2 \leq \varphi \leq 1/2. \end{cases}$$

6. Вычислить несобственные интегралы или показать их расходимость

$$1) \int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}; \quad 2) \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}.$$

Вариант 9

1. Вычислить определённые интегралы

$$\begin{array}{ll} 1) \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8 + 1}; & 2) \int_1^e x^5 \ln x dx; \\ 3) \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^3 x dx; & 4) \int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}. \end{array}$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$\begin{array}{l} 1) y = (x-2) \cdot \sqrt{3x-1}, \quad x \in [1/3; 5/3]; \\ 2) y = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}, \quad x \in [0; \pi]. \end{array}$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = 3x - 1. \end{cases} & 2) \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \quad y = 0, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases} \end{array}$$

4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} y = x(4-x), \\ y = 0. \end{cases} & 2) \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \\ y = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases} \end{array}$$

5. Вычислить длины дуг линий, заданных уравнениями

$$1) L: \begin{cases} y = (e^{2x} + e^{-2x} + 3) / 4, \\ 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$2) L: \begin{cases} x = t^3 / 3, \\ y = 4 - t^2 / 2, \quad t \in [0; \sqrt{8}]. \end{cases}$$

6. Вычислить несобственные интегралы или показать их расходимость

$$\begin{array}{ll} 1) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 5x}}{1+25x^2} dx; & 2) \int_1^{0.75} \frac{dx}{\sqrt[3]{4x-3}}. \end{array}$$



Вариант 10

1. Вычислить определённые интегралы

$$1) \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad 2) \int_{-3}^0 (x-2)e^{-x/3} dx;$$

$$3) \int_0^{\pi} \sin 3x \cdot \cos 5x dx; \quad 4) \int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx.$$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

$$1) y = x \cdot e^{-x}, \quad x \in [0; \ln 5]; \quad 2) y = \frac{x^{-1/2}}{1+x^{-1/3}}, \quad x \in [1/2; 1].$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = 1 + 3x^2/4. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 3 \sin t, \quad y = 3/2, \\ y = 3 \cos t, \quad (y \geq 3/2) \end{cases}$$

4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) вокруг оси OX , 2) вокруг оси OY :

$$1) \begin{cases} y^2 = 4x/3, \\ x = 3. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x, \\ y = x + \sin^2 x, \\ 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

5. Вычислить длины дуг линий, заданных уравнениями

$$1) L: \begin{cases} y = 1 - \arccos x + \sqrt{1-x^2}, \\ 0 \leq x \leq 9/16. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} \rho = \varphi^2, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

6. Вычислить несобственные интегралы или показать их расходимость

$$1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln 3 \cdot (x^2 + 2x)}; \quad 2) \int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9} \cdot dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}.$$

4.5. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 2 «Определенный интеграл»

1. Вычислить определённые интегралы

$$1.1. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 + \cos x}}$$

Найдем сначала неопределенный интеграл, используя прием подведения под знак дифференциала, а затем воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница

$$\begin{aligned} - \int_0^{\pi/4} \frac{d(1 + \cos x)}{1 + \cos x} &= -\ln |1 + \cos x| \Big|_0^{\pi/4} = -(\ln |1 + \cos(\pi/4)| - \ln |1 + \cos 0|) = \\ &= -(\ln |1 + \sqrt{2}/2| - \ln 2) \approx -\ln 0,85 \approx 0,16. \end{aligned}$$

$$1.2. \int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x \, dx$$

Воспользуемся методом интегрирования по частям

$$\begin{aligned} &= \left| \begin{array}{l} u = \arccos 2x, \quad du = -\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}, \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \arccos 2x \Big|_{-1/2}^{1/2} + \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2x dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \arccos 1 + \frac{1}{2} \arccos(-1) - \frac{1}{4} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} = \\ &= 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57. \end{aligned}$$

$$1.3. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$$

Теория рекомендует использовать универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}(x/2) = t$ причем необходимо сменить пределы интегрирования

$$= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \\ x = 0 \rightarrow t = 0, x = \pi/2 \rightarrow t = 1 \end{array} \right. \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin t = \frac{2t}{1+t^2} \Bigg| =$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{1+t^2+2t} = \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} \Big|_0^1 = -(1-2) = 1.$$

$$\begin{aligned} & 1.4. \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \\ & = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, \quad t = \arcsin x, \\ dx = \cos t dt, \quad x_1 = 1/2 \Rightarrow t_1 = \pi/6, \\ \sqrt{1-x^2} = \cos t, \quad x_2 = \sqrt{3}/2 \Rightarrow t_2 = \pi/3 \end{array} \right. = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos t dt}{\sin t \cdot \cos t} = \\ & = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \right| = \ln 0,577 - \ln 0,268 \approx 0,77. \end{aligned}$$

2. Найти среднее значение функции в интервале

$$y = \frac{\sqrt{3x-2}}{x}, \quad [1;6]$$

Решение. Среднее значение функции в интервале находим по формуле

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

т.е. необходимо вычислить интеграл от функции в промежутке и разделить на длину этого промежутка.

$$f(c) = \frac{1}{6-1} \int_1^6 \frac{\sqrt{3x-2}}{x} dx = \frac{1}{5} \int_1^6 \frac{\sqrt{3x-2}}{x} dx$$

Для решения интеграла сделаем замену

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-2} &= t, \quad 3x-2 = t^2, \quad x = \frac{1}{3}(t^2+2), \quad dx = \frac{2t}{3} dt, \\ x=1 &\Rightarrow t=1, \quad x=6 \Rightarrow t=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(c) &= \frac{1}{5} \int_1^4 \frac{t \cdot 2t \cdot dt}{3 \cdot \frac{1}{3}(t^2 + 2)} = \frac{2}{5} \int_1^4 \frac{t^2}{t^2 + 2} dt = \frac{2}{5} \int_1^4 \frac{(t^2 + 2) - 2}{t^2 + 2} dt = \\ &= \frac{2}{5} \int_1^4 \left(1 - \frac{2}{t^2 + 2}\right) dt = \frac{2}{5} \int_1^4 dt - \frac{4}{5} \int_1^4 \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{2}{5} t \Big|_1^4 - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_1^4 = \\ &= \frac{2}{5} \cdot (4 - 1) - \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{4}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \frac{6}{5} - \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{4}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx \\ &\approx 1,2 - 0,57 \cdot (1,23 - 0,61) = 1,2 - 0,35 = 0,85. \end{aligned}$$

В задании нужно решить два примера на нахождение среднего значения. Ясно, что разница состоит только в решении интегралов.

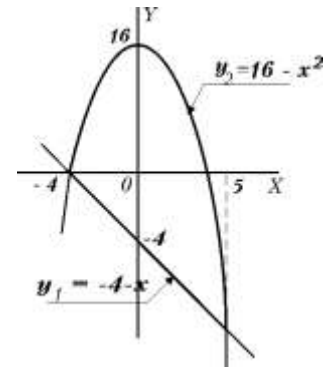
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

3.1. параболой $y = 16 - x^2$ и прямой $x + y + 4 = 0$.

Строим фигуру. Находим абсциссы точек пересечения линий

$$-4 - x = 16 - x^2 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 5.$$

В пределах изменения аргумента $-4 \leq x \leq 5$ верхней границей служит $y_2(x) = 16 - x^2$, а нижней $y_1(x) = -4 - x$.



Площадь фигуры

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx = \int_{-4}^5 [(16 - x^2) - (-4 - x)] dx = \\ &= \int_{-4}^5 (20 - x^2 + x) dx = \left(20x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-4}^5 = 180 - \frac{189}{3} + \frac{9}{2} = 121,5. \end{aligned}$$

3.2. $xy = 2$, $y = 2x$, $y = 3$.

Строим фигуру. Видим, что наиболее подходит для решения задачи формула

$$S = \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)] dy.$$

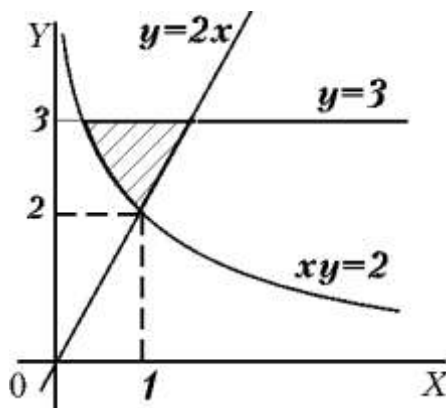
В нашем случае

$$x_2(y) = 2/y, \quad x_1(y) = y/2,$$

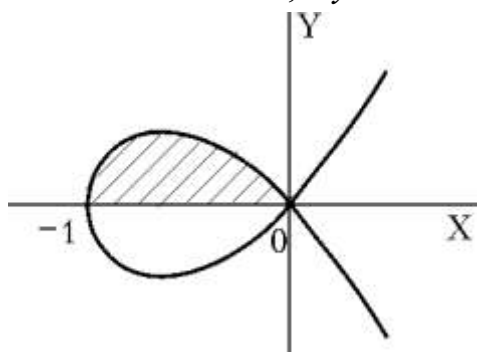
$c = 2$, $d = 3$. (значение $c = 2$ получили как точку пересечения графиков функций $xy = 2$, $y = 2x$).

Итак,

$$S = \int_2^3 \left(\frac{y}{2} - \frac{2}{y} \right) dy = \left(\frac{y^2}{4} - 2 \ln y \right) \Big|_2^3 = \frac{5}{4} - 2 \ln \frac{3}{2}.$$



3.3. $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.

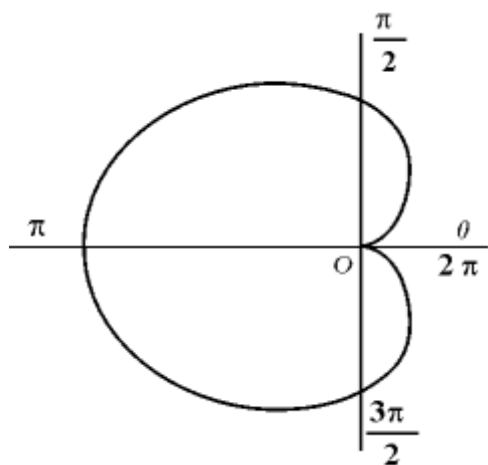


Строим кривую. Видим, что фигура симметрична относительно оси OY . Найдем площадь верхней половинки и результат умножим на 2. Это криволинейная трапеция. Изменению x от -1 до 0 соответствует изменение параметра t от 0 до -1 .

Следовательно, площадь, ограниченная петлей, может быть найдена по формуле

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'_t \cdot dt = 2 \int_0^{-1} (t^3 - t) \cdot (t^2 - 1)' dt = 2 \int_0^{-1} (t^3 - t) \cdot 2t dt = \\ &= -4 \int_{-1}^0 (t^4 - t^2) dt = -4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

3.4. $\rho = 1 - \cos \varphi$



Строим линию в полярных координатах. Площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, будем вычислять по формуле

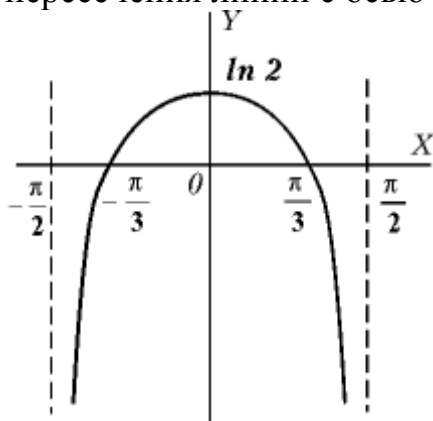
$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

Функция $\rho(\varphi) = 1 - \cos \varphi$. При определении пределов интегрирования учтем симметрию фигуры. Можно взять интеграл по φ в пределах от 0 до π , и результат удвоить. Тогда площадь фигуры

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \int_0^{\pi} (1 - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos \varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= \left(\frac{3}{2} \varphi - 2\sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

4. Найти длину дуги линии

4.1. Найти длину линии $y = \ln(2\cos x)$ между соседними точками пересечения линии с осью OX .



Линия задана в декартовой системе координат, поэтому используем формулу

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$$

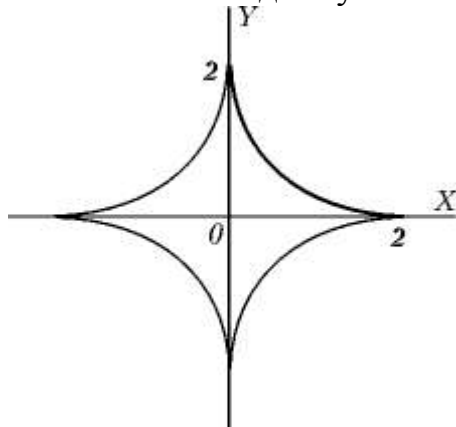
Пределы интегрирования – точки пересечения кривой с осью OX – находим из условия

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow \ln(2\cos x) = 0 \Rightarrow \\ 2\cos x &= 1, \cos x = 1/2, \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 &= -\frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Найдем $y_{x'} = \frac{1}{2\cos x}(-2\sin x) = -\operatorname{tg} x$, $1 + (y_{x'})^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Итак,
$$L = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{1/\cos^2 x} dx = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left| \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} =$$
$$= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right| \approx 2,62.$$

4.2. Найти длину части астроида



$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$$

от значения $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi/2$.

Линия задана параметрически:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Длину дуги вычисляем по формуле

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} \cdot dt$$

(параметр t должен меняться от меньшего значения к большему.)

Найдем отдельно

$$x'_t = -6\cos^2 t \cdot \sin t, \quad y'_t = 6\sin^2 t \cdot \cos t,$$

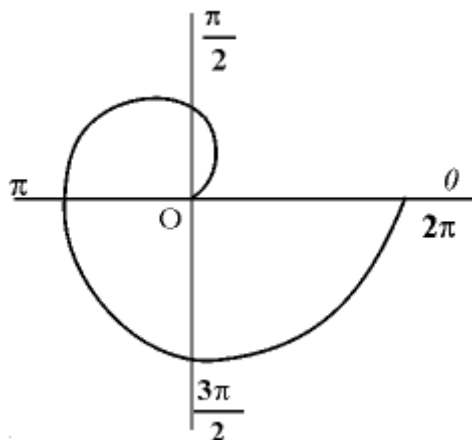
$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = 36\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 36\sin^4 t \cdot \cos^2 t = 36\sin^2 t \cdot \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) =$$
$$= 36\sin^2 t \cdot \cos^2 t = 9\sin^2 2t.$$

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{9\sin^2 2t} = 3|\sin 2t|.$$

Так как $\cos t$ и $\sin t$ положительны в первой четверти, получим

$$L = 3 \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -\frac{3}{2} \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{3}{2} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{3}{2} (-1 - 1) = 3.$$

4.3. Найти длину первого витка спирали Архимеда $\rho = 3\varphi$.



Линия $\rho = 3\varphi$ задана в полярной системе координат уравнением вида $\rho = \rho(\varphi)$, длина дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho'_{\varphi})^2} \cdot d\varphi.$$

Чтобы вычислять длину дуги, необходимо определить пределы изменения угла φ , соответствующие крайним точкам дуги.

В рассматриваемой задаче первый виток спирали соответствует изменению угла φ от 0 до 2π . Находим предварительно

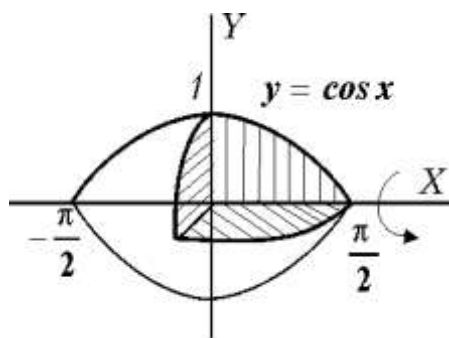
$$\rho_{\varphi'} = (3\varphi)' = 3, \quad \sqrt{\rho^2 + (\rho'_{\varphi})^2} = \sqrt{(3\varphi)^2 + 3^2} = 3\sqrt{1 + \varphi^2}.$$

$$\begin{aligned} L &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho'_{\varphi})^2} = 3 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi = 3 \left(\frac{1}{2} \varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \varphi + \sqrt{1 + \varphi^2} \right| \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 3\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{3}{2} \ln \left| 2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2} \right| \approx 63,7. \end{aligned}$$

5. Найти объем тела вращения.

5.1. Найти объем тела вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями

$$y = \cos x, \quad y = 0.$$



Из рисунка видно, что объем тела можно вычислить по формуле

$$V_{ox} = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$$

Пределы интегрирования находим из равенства

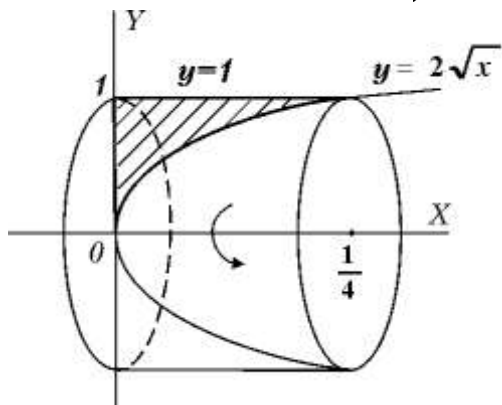
$$\cos x = 0, \Rightarrow x_1 = -\pi/2, \quad x_2 = \pi/2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} V_{ox} &= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \\ &= \pi \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx = \pi \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

5.2. Найти объем тела вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2\sqrt{x}, \quad y = 1, \quad x = 0.$$



Из рисунка видно, что объем можно вычислить по формуле

$$V_{ox} = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)] dx,$$

причем $y_2(x) = 1$, $y_1(x) = 2\sqrt{x}$.

Пределы интегрирования находим из равенства

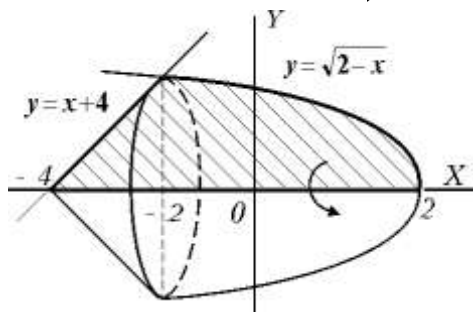
$$2\sqrt{x} = 1, \Rightarrow x = 1/4.$$

Тогда

$$V_{ox} = \pi \int_0^{1/4} [1^2 - (2\sqrt{x})^2] dx = \pi \int_0^{1/4} (1 - 4x) dx = \pi(x - 2x^2) \Big|_0^{1/4} = \frac{\pi}{8}.$$

5.3. Найти объем тела вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sqrt{2-x}, \quad y = x+4, \quad y = 0.$$



Из рисунка видно, что в данном случае объем тела вращения удет равен сумме объемов, так как при изменении x от -4 до 2 фигура сверху ограничена двумя линиями. Найдем координаты точки пересечения прямой и параболы

$$x+4 = \sqrt{2-x} \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 2 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x + 14 = 0 \Rightarrow x_1 = -7, \quad x_2 = -2.$$

($x_1 = -7$ – посторонний корень)

Таким образом, имеем

$$y(x) = \begin{cases} x+4, & x \in [-4; -2], \\ \sqrt{2-x}, & x \in [-2; 2]. \end{cases}$$

При нахождении объема по формуле $V_{ox} = \pi \int_a^b y^2(x) dx$ необходимо

разбить интеграл на два интеграла, в каждом из которых будет своя подынтегральная функция

$$V_{ox} = \pi \int_{-4}^{-2} (x+4)^2 dx + \pi \int_{-2}^2 (\sqrt{2-x})^2 dx = \pi \int_{-4}^{-2} (x^2 + 8x + 16) dx +$$

$$+ \pi \int_{-2}^2 (2-x) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 16x \right) \Big|_{-4}^{-2} + \pi \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32\pi}{3}.$$

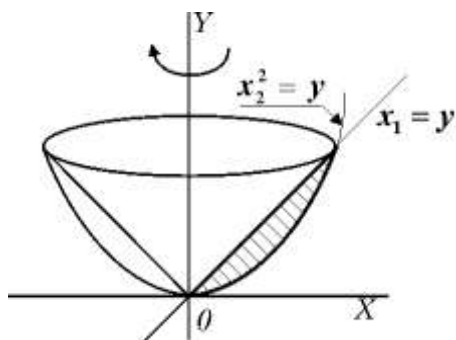
5.4. Найти объем тела вращения вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2, \quad y = x.$$

Из рисунка видно, что в данном случае объем равен

$$V_{oy} = \pi \int_c^d [x_2^2(y) - x_1^2(y)] dy.$$

Пределы интегрирования находим из равенства



$$x^2 = x \Rightarrow x_1 = 0, y_1 = c = 0, \quad x_2 = 1, y_2 = d = 1.$$

Тогда, учитывая, что $x_2^2(y) = y$, $x_1(y) = y$, $x_1^2(y) = y^2$, получим

$$V_{oy} = \pi \int_0^1 (y - y^2) dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

6. Вычислить несобственные интегралы или показать их расходимость

$$1) \int_2^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{(x^4 + 3x^2 + 2)^3}}; \quad 2) \int_0^{1/3} \frac{\ln(1+2x)}{1 - \cos 3x} dx.$$

Решение.

$$6.1. \int_2^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{(x^4 + 3x^2 + 2)^3}}.$$

Данный интеграл с бесконечными пределами интегрирования является несобственным интегралом 1-го рода.

Воспользуемся признаком сравнения. Для этого представим функцию при $x \rightarrow \infty$ в виде $f(x) \sim \frac{A}{x^k}$. Несобственный интеграл 1-го рода от такой функции сходится при $k > 1$ и расходится при $k \leq 1$.

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[5]{(x^4 + 3x^2 + 2)^3}} \sim \frac{x^2}{\sqrt[5]{(x^4)^3}} \sim \frac{x^2}{\sqrt[5]{x^{12}}} = \frac{x^2}{x^{12/5}} =$$
$$= \frac{1}{x^{(12/5)-2}} = \frac{1}{x^{2/5}}, \quad k = \frac{2}{5} < 1,$$

т.о., интеграл расходится.

$$6.2. \int_0^{1/3} \frac{\sqrt{x} \cdot \ln(1+2x)}{1 - \cos 3x} dx$$

Подынтегральная функция терпит разрыв 2-го рода в точке $x = 0$, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \cdot \ln(1+2x)}{1 - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \cdot 2x}{(3x)^2 / 2} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x\sqrt{x}}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{9\sqrt{x}} = \frac{4}{0} = \infty$$

При нахождении предела использовалась таблица эквивалентных бесконечно малых величин.

Используем признак сравнения для несобственных интегралов 2-го рода. Сравниваем с функцией вида

$$f(x) = \frac{A}{(b-x)^k}, \quad f(x) = \frac{A}{(x-a)^k}.$$

Несобственные интегралы от этих функций сходятся при $k < 1$ и расходятся при $k \geq 1$.

В нашем примере $a = 0$. Итак

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot \ln(1+2x)}{1 - \cos 3x} \sim \frac{4}{9\sqrt{x}}, \quad k = 1/2 < 1.$$

Вывод: интеграл сходится.



4.6. Варианты индивидуального задания №3 «Кратные интегралы»

Вариант 1

1. В двойном интеграле $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D) , ограниченной линиями:

1) $x^2 + y^2 = 1, x^2 = 1 - 2y, x = 0, (x > 0, y > 0)$;

2) $x = 4 - y^2, x - y + 2 = 0$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2, x \leq y \leq \sqrt{3}x$$

(в полярной системе координат).

3. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D) , при заданной поверхностной плотности $\delta(x; y)$

$$D: \{6 - x \leq y \leq 2x, x = 4\}, \delta(x; y) = x^2$$

(в декартовой системе координат).

4. Записать тройной интеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V) , ограниченной поверхностями:

$$x^2 + y^2 = 16y, z + y = 16, x \geq 0, z \geq 0$$

(в цилиндрической системе координат).

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = \sqrt{y}, z = 0, x = 1, y = 4x$$

(в декартовой системе координат).

Вариант 2

1. В двойном интеграле $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D) , ограниченной линиями:

1) $x^2 + y^2 = 1, \quad x + y = 1, \quad (x > 0; y > 0).$

2) $x^2 - y^2 = 9, \quad 5y = 4x, \quad y = 0, \quad (x > 0; y > 0).$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
 $xy = 1; \quad x + y = 5$

(в декартовой системе координат).

3. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D) , при заданной поверхностной плотности $\delta(x; y)$

$$D: \{x^2 + y^2 \leq 3x, \quad y \geq 0\}, \quad \delta(x; y) = (x^2 + y^2)^3$$

(в полярной системе координат).

4. Записать тройной интеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$ в виде

повторного и расставить пределы интегрирования по области (V) , ограниченной поверхностями:

$$z = x^2, \quad x + y = 2, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

(в декартовой системе координат).

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = 3x^2 + 3y^2 + 1, \quad z = 5 - 3x^2 - 3y^2$$

(в цилиндрической системе координат).

Вариант 3

1. В двойном интеграле $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D) , ограниченной линиями:

1) $y = 2x, \quad y = 2x + 3, \quad x = 1, \quad x = 2.$

2) $x = 27 - y^2, \quad x = -6y.$



2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$2y = \sqrt{x}; 2xy = 1; x = 16$$

(в декартовой системе координат).

3. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D) , при заданной поверхностной плотности $\delta(x; y)$

$$D: \{0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}, \delta(x; y) = x^2 + 2y^2$$

(в декартовой системе координат).

4. Записать тройной интеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$ в виде

повторного и расставить пределы интегрирования по области (V) , ограниченной поверхностями:

$$z = 2(x^2 + y^2), \quad z = 4 - 2(x^2 + y^2)$$

(в цилиндрической системе координат).

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = 4 - x^2, \quad y = 5, \quad y = 0, \quad z = 0$$

(в декартовой системе координат).

Вариант 4

1. В двойном интеграле $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D) , ограниченной линиями:

$$1) \quad y = 11 - x^2, \quad y = -10x.$$

$$2) \quad x^2 + y^2 = 25, \quad 3y = 4x, \quad y = 0, \quad (x > 0, y > 0).$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$(x^2 + y^2)^2 \leq 4x^2 y$$

(в полярной системе координат).

3. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D) , при заданной поверхностной плотности $\delta(x; y)$

$$D: \{x \leq y \leq 3x, \quad 0 \leq x \leq 2\}, \quad \delta(x; y) = 2x^2 + y^2$$

(в декартовой системе координат).

4. Записать тройной интеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$ в виде

повторного и расставить пределы интегрирования по области (V) , ограниченной поверхностями:



$$x^2 + y^2 = 2y, \quad x^2 + y^2 = 4y, \quad z = 0, \quad z = 2, \quad x \geq 0$$

(в цилиндрической системе координат).

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \geq 0$$

(в сферической системе координат).

Вариант 5

1. В двойном интеграле $\int\limits_{(D)} f(x; y) dx dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D) , ограниченной линиями:

$$1) \quad x^2 + y^2 = 9, \quad y^2 - x^2 = 1, \quad x = 0, \quad y = 0; \quad (x > 0; \quad y > 0).$$

$$2) \quad y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = e.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$(x^2 + y^2)^2 \leq (x^2 - y^2)$$

(в полярной системе координат).

3. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D) , при заданной поверхностной плотности $\delta(x; y)$

$$D: \{x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x\}, \quad \delta(x; y) = 2x + y$$

(в декартовой системе координат)

4. Записать тройной интеграл $\int\limits_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$ в виде

повторного и расставить пределы интегрирования по области (V) , ограниченной поверхностями:

$$z^2 = 36(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad (x > 0, \quad z > 0)$$

(в цилиндрической системе координат).

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x = 3, \quad y = 2x, \quad z = 4\sqrt{y}, \quad z \geq 0$$

(в декартовой системе координат).



Вариант 6

1. В двойном интеграле $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D) , ограниченной линиями:

1) $x = y^2, \quad y^2 = 4 - x.$

2) $x + y = 1; \quad x + 2y + 2 = 0; \quad x = 0.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x; \quad x^2 = 2 - y$$

(в декартовой системе координат).

3. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D) , при заданной поверхностной плотности $\delta(x; y)$

$$D: \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 36, \quad -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\}, \quad \delta(x; y) = 6xy^2$$

(в полярной системе координат)

4. Записать тройной интеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$ в виде

повторного и расставить пределы интегрирования по области (V) , ограниченной поверхностями:

$$z = 4 - y^2, \quad z = 2 + y^2, \quad x = -1, \quad x = 2$$

(в декартовой системе координат).

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad y \geq 0$$

(в цилиндрической системе координат).

Вариант 7

1. В двойном интеграле $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D) , ограниченной линиями:

1) $xy = 1, \quad x^2 = y, \quad y = 2, \quad x = 0, \quad (x > 0).$

2) $x^2 + y^2 = 4, \quad y^2 = 3x, \quad y = 0, \quad (x > 0, \quad y > 0).$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x^2 + y^2 \leq 10x, \quad y \geq 0$$

(в полярной системе координат).

3. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D) , при заданной поверхностной плотности $\delta(x; y)$

$$D: \{3 - x \leq y \leq 3 + x, \quad 0 \leq x \leq 3\}; \quad \delta(x; y) = \sqrt{2x + 3y}$$

(в декартовой системе координат).

4. Записать тройной интеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$ в виде

повторного и расставить пределы интегрирования по области (V) , ограниченной поверхностями:

$$y = 2 - x^2 - z^2, \quad y = 1, \quad z \geq 0$$

(в цилиндрической системе координат).

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$y^2 = 2x, \quad z = 2 - x, \quad z = 0$$

(в декартовой системе координат).

Вариант 8

1. В двойном интеграле $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D) , ограниченной линиями:

1) $x^2 + y^2 = 2, \quad x^2 = y, \quad (y > 0).$

2) $x + y = 2, \quad y \leq 1, \quad x = 0, \quad y = 0.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 3/x; \quad y = 8e^x; \quad y = 3; \quad y = 8$$

(в декартовой системе координат).

3. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D) , при заданной поверхностной плотности $\delta(x; y)$

$$D: \{x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}, \quad \delta(x; y) = x^3$$

(в полярной системе координат).

4. Записать тройной интеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$ в виде

повторного и расставить пределы интегрирования по области (V) , ограниченной поверхностями:

$$3x + 4y = 12, \quad z = 6 - x^2 - y^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

(в декартовой системе координат).

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y \geq 0$$

(в сферической системе координат).

Вариант 9

1. В двойном интеграле $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ перейти к повторному и

расставить пределы интегрирования по области (D) , ограниченной линиями:

$$1) \quad x^2 = y + 2, \quad x^2 + y = 0.$$

$$2) \quad y = x^{2/3}, \quad y = 1 - \sqrt{4x - x^2 - 3}, \quad y = 0.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y + x - 4 = 0; \quad y - x + 4 = 0; \quad x = 0, \quad x = 1$$

(в декартовой системе координат).

3. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D) , при заданной поверхностной плотности $\delta(x; y)$

$$D: \{x \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}, \quad \delta(x; y) = y$$

(в полярной системе координат).



4. Записать тройной интеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V) , ограниченной поверхностями:

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad z \geq 0$$

(в цилиндрической системе координат).

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x = 0, \quad y = 2x, \quad y = 1, \quad x + y + z = 3, \quad (z \geq 0)$$

(в декартовой системе координат).

Вариант 10

1. В двойном интеграле $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D) , ограниченной линиями:

$$1) \quad y = x^2, \quad x + y = 1, \quad x = 1, \quad x = 3.$$

$$2) \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x + y = 1, \quad y = 0, \quad (y > 0).$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2 \leq 4 - x, \quad y \geq -x/3$$

(в декартовой системе координат).

3. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D) , при заданной поверхностной плотности $\delta(x; y)$

$$D: \{x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0\}, \quad \delta(x; y) = x^2 y$$

(в полярной системе координат)

4. Записать тройной интеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V) , ограниченной поверхностями:

$$z = 16 - x^2 - y^2, \quad y \leq 2x, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0$$

(в декартовой системе координат).

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$4z = x^2 + y^2 + 8, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad z = 0$$

(в цилиндрической системе координат).

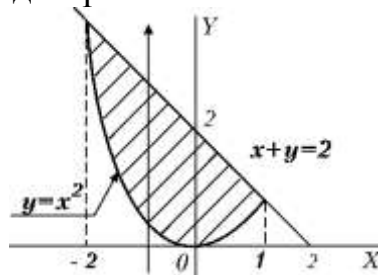
**4.7. Решение типового варианта и образец оформления
индивидуального задания № 3 «Кратные интегралы»**

1. В двойном интеграле $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D) , ограниченной линиями:

1.1. $y = x^2$, $x + y = 2$.

Решение.

1) строим область в декартовой системе координат



2) находим абсциссы точек пересечения линий, ограничивающих область

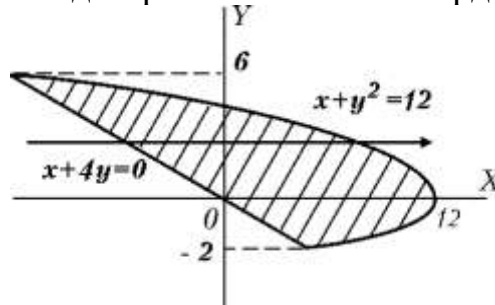
$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x, \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1, \\ x_2 = -2. \end{matrix}$$

3) записываем интеграл в виде повторного и расставляем пределы интегрирования

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy.$$

1.2. область (D) ограничена линиями: $x + y^2 = 12$ и $x + 4y = 0$.

1) строим область в декартовой системе координат



2) находим абсциссы точек пересечения линий, ограничивающих область:

$$\begin{cases} x + y^2 = 12, \\ x + 4y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 - y^2, \\ x = -4y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 - y^2 = -4y, \\ y^2 - 4y - 12 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2, \\ y_2 = 6. \end{cases}$$

3) записываем интеграл в виде повторного и расставляем пределы интегрирования:

$$\int\limits_{(D)} f(x, y) dx dy = \int\limits_c^d \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx = \int\limits_{-2}^6 \int\limits_{-4y}^{12-y^2} f(x, y) dx.$$

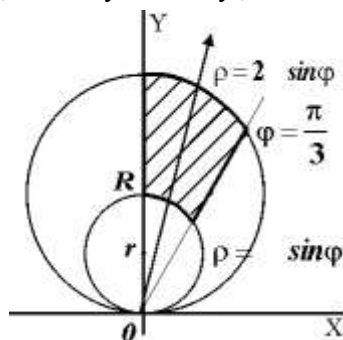
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

2.1. $x^2 + y^2 = 2ry$, $x^2 + y^2 = 2Ry$, $x = 0$, $y = x\sqrt{3}$
(в полярной системе координат).

Решение.

1) Строим область (D) .

$$x^2 + y^2 = 2ry, \quad x^2 + y^2 = 2Ry, \quad x = 0, \quad y = x\sqrt{3}$$



Так как область ограничена окружностями, перейдем к полярным координатам

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = \rho^2, \\ x^2 + y^2 &= 2r \sin \varphi \Rightarrow \rho = 2r \sin \varphi, \quad \rho_1 = 2R \sin \varphi, \\ x^2 + y^2 &= 2R \sin \varphi \Rightarrow \rho_2 = 2R \sin \varphi, \\ y &= x\sqrt{3} \Rightarrow \rho \sin \varphi = \sqrt{3} \rho \cos \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_1 = \pi / 3, \\ x &= 0 \Rightarrow \rho \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \pi / 2. \end{aligned}$$

2) Элемент площади $ds = dx dy = \rho d\rho d\varphi$.

3) Формула для вычисления площади в полярной системе координат примет вид

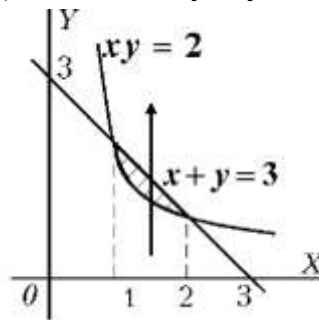
$$\begin{aligned}
 S &= \int\limits_{(D)} ds = \int\limits_{(D^*)} \rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2r \sin \varphi}^{2R \sin \varphi} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi (\rho^2) \Big|_{2r \sin \varphi}^{2R \sin \varphi} = \\
 &= \frac{1}{2} \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} (4R^2 \sin^2 \varphi - 4r^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = 2(R^2 - r^2) \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \\
 &= (R^2 - r^2) \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = (R^2 - r^2) \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \\
 &= (R^2 - r^2) \left((\pi/2 - \pi/3) - \frac{1}{2} (\sin \pi - \sin 2\pi/3) \right) = (R^2 - r^2) \left(\pi/6 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right).
 \end{aligned}$$

2.2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями
 $xy = 2$, $x + y = 3$

(в декартовой системе координат).

Решение.

1) Строим область (D) , занимаемую указанной фигурой.



Площадь фигуры вычисляем в декартовой системе координат по формуле

$$S = \int\limits_{(D)} ds = \int\limits_{(D)} dx dy.$$

2) При построении повторного интеграла в данном случае порядок интегрирования значения не имеет.

$$S = \int\limits_{(D)} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.$$

3) Для расстановки пределов заметим, что переменная x изменяется от $x=1$ до $x=2$.

Эти значения получаются из совместного решения уравнений

$$xy = 2 \text{ и } x + y = 3, \quad y = 2/x, \quad x + 2/x = 3, \quad x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Внутренняя переменная y при этом меняется от $y_1(x) = 2/x$ (линия входа в область) до $y_2(x) = 3 - x$ (линия выхода). Тогда

$$S = \int_1^2 dx \int_{2/x}^{3-x} dy = \int_1^2 dx \left(y \Big|_{2/x}^{3-x} \right) = \int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x} \right) dx =$$

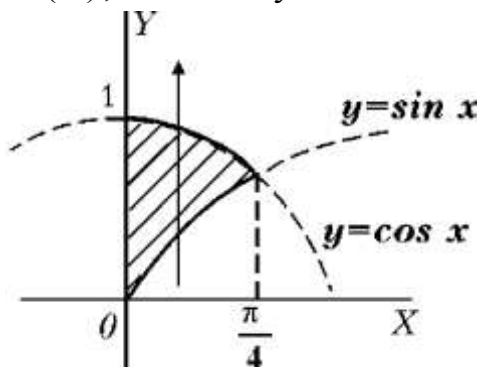
$$= \left(3x - \frac{x^2}{2} - 2 \ln x \right) \Big|_1^2 = 3(2-1) - \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) - 2(\ln 2 - \ln 1) = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \approx 0,1.$$

3. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D) , при заданной поверхностной плотности $\delta(x, y) = x \cdot y$ (в декартовой системе координат).

$$(D): y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x \leq \pi/4.$$

Решение.

1) Строим область (D) , занимаемую пластинкой.



2) Массу пластинки вычисляем по формуле в декартовой системе координат

$$M = \int_{(D)} \delta(x, y) ds = \int_{(D)} \delta(x, y) dx dy.$$

Расставляем пределы интегрирования согласно границам области

$$M = \int_{(D)} x \cdot y dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} x \cdot y dy = \int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} x \cdot y dy = \int_0^{\pi/4} x dx \int_{\sin x}^{\cos x} y dy =$$

(вычисляем сначала внутренний, а затем внешний интегралы)

$$= \int_0^{\pi/4} x dx \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{\sin x}^{\cos x} \right) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} x \cdot \cos 2x dx =$$

Получили определенный интеграл от функции одной переменной, который берем по частям

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos 2x dx, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{2} \left(x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin 2x dx \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\pi/4} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cdot \cos 0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{16} (\pi - 2).
 \end{aligned}$$

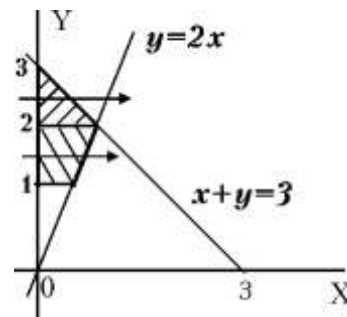
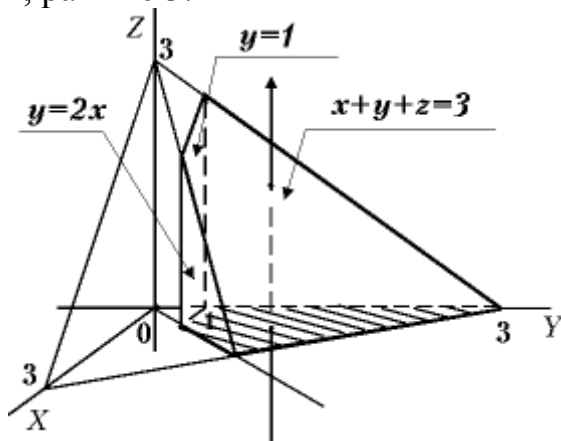
4. Записать тройной интеграл $\iiint_{(V)} f(x, y, z) dv$ в виде повторного и

расставить пределы интегрирования по области (V) , ограниченной поверхностями:

$$4.1. (V): \{x=0, y=1, y=2x, x+y+z=3, x \geq 0, z \geq 0\}$$

(в декартовой системе координат).

Решение. 1) Строим область интегрирования. Она ограничена плоскостями координат YOZ и XOY , плоскостью $y=1$, параллельной координатной плоскости XOZ , плоскостью $y=2x$, проходящей через ось OZ , и плоскостью $x+y+z=3$, отсекающей на осях координат отрезки, равные 3.



2) Спроектируем эту область на плоскость XOY . Проекция показана на рисунке. Область (D) ограничена прямыми $x=0, y=1, y=2x, x+y=3$. Последнее уравнение получено как линия пересечения плоскости $x+y+z=3$ и $z=0$.

3) Пересечем тело стрелкой, параллельной оси OZ . Тогда при любых значениях переменных (x, y) из области (D) стрелка входит в область на поверхности входа $z=0$ (плоскость XOY) и выходит на

поверхности выхода $x + y + z = 3$. Таким образом, переменная z меняется от своего значения на нижней границе $z_1 = 0$ до $z_2(x, y) = (3 - x - y)$ – значения на верхней границе области (V) . Элемент $dv = dx dy dz$.

Следовательно, отделяя внутренний интеграл по z , будем иметь

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{(D)} dx dy \int_0^{3-x-y} f(x, y, z) dz.$$

4) Расставляем пределы интегрирования в двойном интеграле по области (D) , проектируя ее на ось OY . При этом область необходимо разбить на две части прямой $y = 2$. Значение $y = 2$ получено из решения системы уравнений $\{x + y = 3, y = 2x\}$. Для двойного интеграла будем иметь

$$\iint_{(D)} dx dy = \int_1^2 dy \int_0^{y/2} dx + \int_2^3 dy \int_0^{3-y} dx.$$

Тройной интеграл также будет являться суммой двух тройных интегралов

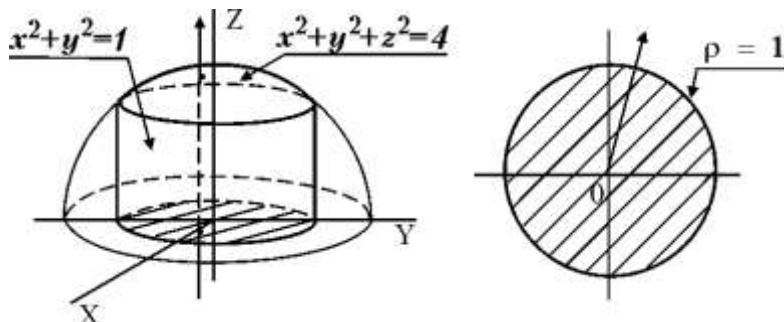
$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dv = \int_1^2 dy \int_0^{y/2} dx \int_0^{3-x-y} f(x, y, z) dz + \int_2^3 dy \int_0^{3-y} dx \int_0^{3-x-y} f(x, y, z) dz.$$

$$4.2. (V): \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 1, z \geq 0\}$$

(в цилиндрической системе координат).

Решение. 1) Строим область интегрирования. Она ограничена снизу плоскостью $z = 0$, сверху – сферической поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, с боков – цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = 1$.

Проведем стрелку, параллельную оси OZ и пересекающую данное тело. Тогда $z = 0$ – поверхность входа, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ – поверхность выхода.



Перейдем к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

2) Проецируем эту область на плоскость XOY . Получим круг радиуса 1.

3) Запишем уравнения границ в цилиндрической системе координат

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow z = +\sqrt{4 - \rho^2}.$$

Пределы изменения переменных ρ и φ определяем по проекции (в полярных координатах) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 1$.

4) Элемент объема $dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz$.

5) Записываем интеграл

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f(\rho, \varphi, z) dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} f(\rho, \varphi, z) dz. \end{aligned}$$

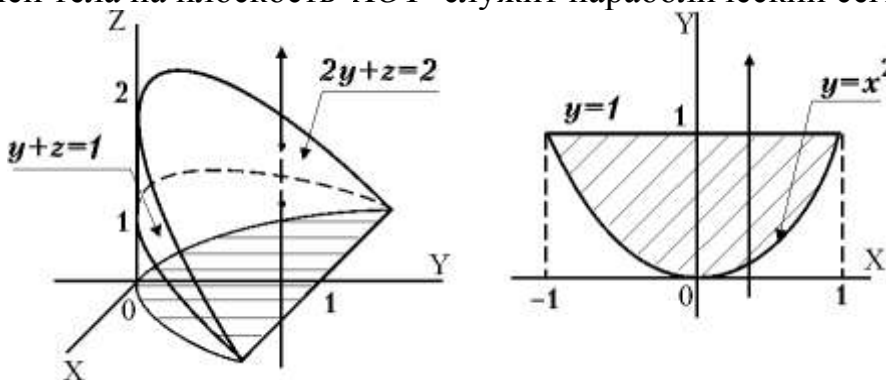
5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$5.1. (V): \{2y + z = 2, \quad y + z = 1, \quad x^2 = y\}$$

(в декартовой системе координат).

Решение. Объем тела, занимающего данную область (V) , можно вычислить с помощью тройного интеграла $V = \iiint_{(V)} dv$.

Данное тело ограничено снизу и сверху плоскостями $y + z = 1$, $2y + z = 2$, а с боков – параболическим цилиндром $y = x^2$. Проекцией тела на плоскость XOY служит параболический сегмент.



Решаем задачу в декартовой системе координат.

По рисунку легко записать пределы изменения переменных. Для всех значений $-1 \leq x \leq 1$ переменная y изменяется в пределах от параболы $y = x^2$ до прямой $y = 1$, а переменная z при этом изменяется от нижней плоскости $z = 1 - y$ и до верхней $z = 2 - 2y$.

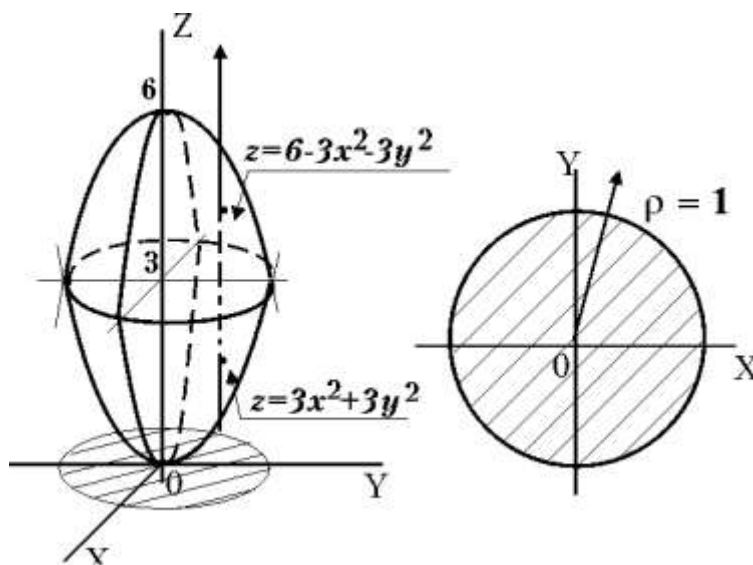
Элемент объема в декартовой системе координат $dv = dx dy dz$. Итак, объем данного тела

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{(V)} dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_{1-y}^{2-2y} dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy (z|_{1-y}^{2-2y}) = \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 ((2-2y) - (1-y)) dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (1-y) dy = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx (1-y)^2 \Big|_{x^2}^1 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-2x^2+x^4) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$5.2. (V): \{z = 3x^2 + 3y^2, z = 6 - 3x^2 - 3y^2\}$$

(в цилиндрической системе координат).

Решение. Тело занимает пространство между двумя встречными параболоидами и проецируется на плоскость XOY в виде круга радиусом $R=1$. Вычисление объема удобнее вести в цилиндрических координатах. Формулы перехода от декартовых координат к цилиндрическим $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$.



Уравнения поверхностей имеют следующий вид

$$z = 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow z = 3\rho^2, \quad z = 6 - (3x^2 + 3y^2) \Rightarrow z = 6 - 3\rho^2.$$

Пределы изменения цилиндрических переменных

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 3\rho^2 \leq z \leq 6 - 3\rho^2.$$

Элемент объема в цилиндрических координатах $dv = \rho d\rho d\varphi dz$.

Объем тела в цилиндрических координатах определяется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{(V)} dv = \iiint_{(V)} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{3\rho^2}^{6-3\rho^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \left(z \Big|_{3\rho^2}^{6-3\rho^2} \right) = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho (6 - 3\rho^2 - 3\rho^2) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (6\rho - 6\rho^3) d\rho = \\ &= \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \cdot \left(3\rho^2 - \frac{3}{2}\rho^4 \right) \Big|_0^1 = 2\pi \cdot \left(3 - \frac{3}{2} \right) = 3\pi. \end{aligned}$$

4.8. Варианты индивидуального задания №4 «Скалярное и векторное поле»

Вариант 1

1. Найти работу силового поля $\vec{F}(x; y) = x^2 \cdot \vec{i} + \frac{1}{y^2} \cdot \vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L: xy = 1$, заключенной между точками $(1; 1)$ и $(4; 1/4)$.

2. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали

1) $\vec{A} = \{x; 3y; 2z\}$,

где S – часть плоскости $x + y + z = 1$, вырезанной координатными плоскостями;

2) $\vec{A} = (6x - \cos y) \cdot \vec{i} + (e^x + z) \cdot \vec{j} + (2y + 3z) \cdot \vec{k}$,

где S – полная поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 3$.

3) $\vec{A} = 3x \cdot \vec{i} - z \cdot \vec{k}$,

где S – полная поверхность тела, ограниченного поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$, $(z \geq 0)$.



3. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L :

1) $\vec{A} = \{y^{-1}; -x^{-1}\}$, L – контур треугольника $\triangle ABC$ с вершинами $A(1;1)$, $B(2;1)$, $C(2;2)$;

2) $\vec{A} = 2yz \cdot \vec{i} + xz \cdot \vec{j} - x^2 \cdot \vec{k}$, $L - \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 1, (z > 0). \end{cases}$

4. Построить поверхности уровня скалярного поля

$$U(x; y; z) = y^2 + z^2 - 2x.$$

5. Для скалярного поля $U(x; y; z) = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz$ найти:

1) производную в точке $M_0(1;1;1)$ в направлении вектора $\vec{a} = \{4; -2; 3\}$;

2) величину и направление вектора наибольшей скорости изменения поля в точке $M_0(1;1;1)$.

Вариант 2

1. Найти работу силового поля $\vec{F}(x; y) = x^3 \cdot \vec{i} + x^2 \cdot \vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L: y = x^2$, заключенной между точками $(1;1)$ и $(3;9)$.

2. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

1) $\vec{A} = \{x; 0; (\pi z - 1)\}$,

где S – часть плоскости $12x + 3y + 2z = 6$, вырезанной координатными плоскостями;

2) $\vec{A} = (4x - 2y^2) \cdot \vec{i} + (\ln z - 4y) \cdot \vec{j} + (x + 3z/4) \cdot \vec{k}$,

где S – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3$.

3) $\vec{A} = (zx + y) \cdot \vec{i} + (xy - z) \cdot \vec{j} + (x^2 + yz) \cdot \vec{k}$,

где S – полная поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 2$, ограниченная плоскостями $z = 1$, $z = 0$.

3. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L

1) $\vec{A} = \{y^2; (3x + y)\}$, $L - \begin{cases} y = x^2, \\ y = 4. \end{cases}$

2) $\vec{A} = y \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j} + 2z \cdot \vec{k}$, $L - \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 / 4 = 0, \\ z = 2. \end{cases}$

4. Построить линии уровня скалярного поля $U(x; y) = \frac{y}{x^2}$.



5. Для скалярного поля $U(x; y; z) = x^2y - \sqrt{xy + z^2}$ найти:

1) производную в точке $M_0(1; 5; -2)$ в направлении вектора $\vec{a} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$;

2) величину и направление вектора наибольшей скорости изменения поля в точке $M_0(1; 5; -2)$.

Вариант 3

1. Найти работу силового поля $\vec{F}(x; y) = \cos^2 x \cdot \vec{i} + \frac{1}{y^3} \cdot \vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L: y = \operatorname{tg} x$, заключенной между точками $(\pi/4; 1)$ и $(\pi/3; \sqrt{3})$.

2. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

1) $\vec{A} = \{0; 9\pi y; (7z + 1)\}$,

где S – часть плоскости $x + y + z = 1$, вырезанной координатными плоскостями;

2) $\vec{A} = (e^{-z} - x) \cdot \vec{i} + (xz + 3y) \cdot \vec{j} + (z + x^2) \cdot \vec{k}$,

где S – полная поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $2x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3) $\vec{A} = x^2 \cdot \vec{i} + xy \cdot \vec{j} + 3z \cdot \vec{k}$,

где S – полная поверхность конуса $x^2 + y^2 = z^2$, ограниченного плоскостью $z = 4$.

3. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L

1) $\vec{A} = \{x^2y^2; x^2 + x^3y\}$, L – контур треугольника OAB с вершинами $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(0; 1)$;

2) $\vec{A} = 2yz \cdot \vec{i} + xz \cdot \vec{j} + y^2 \cdot \vec{k}$, $L = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + y^2 = 4, (z > 0). \end{cases}$

4. Построить линии уровня скалярного поля

$$U(x; y) = x - \sqrt{y + 2}.$$

5. Для скалярного поля $U(x; y; z) = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$ найти:

1) производную в точке $M_0(2; 4; 4)$ в направлении вектора нормали к поверхности $S: 2x^2 - y^2 + 4z = 0$, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ ;

2) величину и направление вектора наибольшей скорости изменения поля в точке $M_0(2; 4; 4)$

Вариант 4

1. Найти работу силового поля $\vec{F}(x; y) = y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j}$ вдоль дуги астроиды $L: x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq \pi/4$.

2. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

1) $\vec{A} = \{x; 4y; 5z\}$,

где S – часть плоскости $2x + 4y + z = 2$, вырезанной координатными плоскостями;

2) $\vec{A} = (e^y + 2x) \cdot \vec{i} + (xz - y) \cdot \vec{j} + (1/4)(e^{xy} - z) \cdot \vec{k}$,

где S – поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3$.

3) $\vec{A} = 2(z - y) \cdot \vec{j} + (x - z) \cdot \vec{k}$,

где S – полная поверхность тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z - 1, x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

3. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L :

1) $\vec{A} = \{x^3; -y^3\}$, L – окружность $x^2 + y^2 = 9$;

2) $\vec{A} = yz \cdot \vec{i} + 2xz \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}$, $L - \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

4. Построить линии уровня скалярного поля $U(x; y) = y - \sqrt{x + 2}$.

5. Для скалярного поля $U(x; y; z) = xy - x/z$ найти:

1) производную в точке $M_0(-4; 3; 1)$ в направлении вектора $\vec{l} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$;

2) величину и направление вектора наибольшей скорости изменения поля в точке $M_0(-4; 3; 1)$.

Вариант 5

1. Найти работу силового поля $\vec{F}(x; y) = (x + y) \cdot \vec{i} + (x - y) \cdot \vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2$.

2. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

1) $\vec{A} = \{x; 2y; z\}$,

где S – часть плоскости $x + 2y + 2z = 2$, вырезанной координатными плоскостями;

2) $\vec{A} = (\ln y + 7x) \cdot \vec{i} + (\sin z - 2y) \cdot \vec{j} + (e^y - 2z) \cdot \vec{k}$,

где S – поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$.

3) $\vec{A} = xz \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$,

где S – полная поверхность параболоида $x^2 + y^2 = 1 - z$, ограниченного плоскостью $z = 0$.

3. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L :

1) $\vec{A} = \{(x + y); 2x\}$, L – вдоль окружности $x^2 + y^2 = 2x$;

2) $\vec{A} = 2y \cdot \vec{i} + \vec{j} - 2yz \cdot \vec{k}$, $L - \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 2. \end{cases}$

4. Построить поверхности уровня скалярного поля

$$U(x; y; z) = z - \sqrt{x}.$$

5. Для скалярного поля $U(x; y; z) = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz$ найти:

1) производную в точке $M_0(1; 1; 1)$ в направлении вектора $\vec{a} = \{4; -2; 3\}$;

2) величину и направление вектора наибольшей скорости изменения поля в точке $M_0(1; 1; 1)$.

Вариант 6

1. Найти работу силового поля $\vec{F} = (x^2 + 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 - 2x) \cdot \vec{j}$ вдоль дуги кривой $L: y = 2 - \frac{x^2}{8}$, между точками $A(-4; 0)$ и $B(0; 2)$.

2. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

1) $\vec{A} = \{9\pi x; (5y + 1); 4\pi z\}$,

где S – часть плоскости $2x - y + 2z = 6$, вырезанной координатными плоскостями;

$$2) \vec{A} = (\sqrt{z} - x) \cdot \vec{i} + (e^x + 3y) \cdot \vec{j} + \sqrt{x + y} \cdot \vec{k},$$

где S – полная поверхность усечённого конуса $z^2 + y^2 = x^2$, $x = 2$, $x = 5$.

$$3) \vec{A} = 2x \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k},$$

где S – поверхность тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $y = 4x^2$, $y = 1$, $z = y$, $z = 0$, ($x \geq 0$).

3. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L :

$$1) \vec{A} = \{2y; (x + y)\}, \quad L - \text{граница области } y^2 \leq x \leq 4;$$

$$2) \vec{A} = xz \cdot \vec{i} - \vec{j} + y \cdot \vec{k}, \quad L - \begin{cases} z = 5(x^2 + y^2) - 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

4. Построить линии уровня скалярного поля

$$U(x; y) = 2x - \sqrt{y - 3}.$$

5. Для скалярного поля $U(x; y; z) = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$ найти:

1) производную в точке $M_0(1; -2; 4)$ в направлении вектора нормали к поверхности $S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16$, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ ;

2) величину и направление вектора наибольшей скорости изменения поля в точке $M_0(1; -2; 4)$.

Вариант 7

1. Найти работу силового поля $\vec{F}(x; y) = \cos^3 x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L: y = \sin x$, заключенной между точками $(0; 0)$ и $(\pi/2; 1)$.

2. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

1) $\vec{A} = \{2x; y; -3z\}$, S – часть плоскости $x + y + z = 1$, вырезанной координатными плоскостями;

2) $\vec{A} = (3z^2 + x) \cdot \vec{i} + e^x \cdot \vec{j} + e^y \cdot \vec{k}$, S – полная поверхность конуса $x^2 + y^2 = z^2$, ограниченного плоскостью $z = 4$.



3) $\vec{A} = x^2 \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + xz \cdot \vec{k}$, S – полная поверхность четверти параболоида $x^2 + y^2 = z$, $z=1$, $x=0$, $y=0$.

3. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L :

1) $\vec{A} = \{(y-x); (2x-y)\}$, L – окружность $x^2 + y^2 = x$;

2) $\vec{A} = y \cdot \vec{i} + 3x \cdot \vec{j} + z^2 \cdot \vec{k}$, $L = \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1, \\ z = 3. \end{cases}$

4. Построить поверхности уровня скалярного поля

$$U(x; y; z) = y - \sqrt{x^2 - z^2}.$$

5. Для скалярного поля $U(x; y; z) = -2 \ln(x^2 - 5) - 4xyz$ найти:

1) производную в точке $M_0(1; 1; 1)$ в направлении вектора нормали к поверхности $S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1$, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ ;

2) величину и направление вектора наибольшей скорости изменения поля в точке $M_0(1; 1; 1)$.

Вариант 8

1. Найти работу силового поля $\vec{F}(x; y) = x^2 \cdot \vec{i} + xy \cdot \vec{j}$ вдоль отрезка прямой от точки $A(0; 1)$ до точки $B(1; 2)$.

2. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали

1) $\vec{A} = \{x; y; z\}$,

где S – часть плоскости $6x + 3y + 2z = 6$, вырезанной координатными плоскостями;

2) $\vec{A} = (\cos z + 3x) \cdot \vec{i} + (x - 2y) \cdot \vec{j} + (3z + y^2) \cdot \vec{k}$,

где S – полная поверхность параболоида $36(x^2 + y^2) = z$, ограниченного плоскостью $z = 6$.

3) $\vec{A} = x^2 \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$,

где S – полная поверхность полушара $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$, ($z > 0$).

3. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L :

1) $\vec{A} = \{(x-y); (3x-2)\}$, L – окружность $x^2 + y^2 = 6y$;



$$2) \vec{A} = (x^2 - y) \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + \vec{k}, \quad L - \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 9. \end{cases}$$

4. Построить поверхности уровня скалярного поля

$$U(x; y; z) = x + \sqrt{z^2 + y^2}.$$

5. Для скалярного поля $U(x; y; z) = 2\sqrt{x+y} + y \operatorname{arctg} z$ найти:

- 1) производную в точке $M_0(3; -2; 1)$ в направлении вектора $\vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$;
- 2) величину и направление вектора наибольшей скорости изменения поля в точке $M_0(3; -2; 1)$.

Вариант 9

1. Найти работу силового поля $\vec{F}(x; y) = xy^2 \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L: x = t^2, y = t, 0 \leq t \leq 1$.

2. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

$$1) \vec{A} = \{\pi x; 2; 2\pi z\},$$

где S – часть плоскости $3x + 2y + 6z = 6$, вырезанной координатными плоскостями;

$$2) \vec{A} = (y^2 + z^2 + 6x) \cdot \vec{i} + (e^z - 2y) \cdot \vec{j} + (y - z) \cdot \vec{k},$$

где S – полная поверхность конуса $9(x^2 + z^2) = y^2$, ограниченного плоскостью $y = 4$.

$$3) \vec{A} = x \cdot \vec{i} + 3y \cdot \vec{j} + 2z \cdot \vec{k},$$

где S – поверхность тела, ограниченного поверхностями $2(x^2 + y^2) = z, z = 4 - 2(x^2 + y^2)$.

3. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L :

1) $\vec{A} = \{(y - x^2); (2x + y^2)\}$, L – линия пересечения поверхностей $x^2 + z^2 = R^2, y = x$;

$$2) \vec{A} = 4x \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - xy \cdot \vec{k}, \quad L - \begin{cases} z - 1 = 2(x^2 + y^2), \\ x^2 + y^2 = 4, \quad (z > 0). \end{cases}$$

4. Построить поверхности уровня скалярного поля

$$U(x; y; z) = x^2 + y^2 - z.$$



5. Для скалярного поля $U(x; y; z) = 7\ln(1/13 + x^2) - 4xyz$:

1) найти производную в точке $M_0(1; 1; 1)$ в направлении вектора нормали к поверхности $S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7$, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ ;

2) величину и направление вектора наибольшей скорости изменения поля в точке $M_0(1; 1; 1)$.

Вариант 10

1. Найти работу силового поля $\vec{F}(x; y) = (x^2 + y^2) \cdot \vec{i} + xy \cdot \vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L: y = e^x$, заключенной между точками $(0; 1)$ и $(1; e)$.

2. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали:

1) $\vec{A} = \{-2x; y; 4z\}$,

где S – часть плоскости $2x + 6y + 3z = 6$, вырезанной координатными плоскостями.

2) $\vec{A} = (\sqrt{z} - x) \cdot \vec{i} + (x - y) \cdot \vec{j} + (y^2 - z) \cdot \vec{k}$,

где S – полная поверхность параболоида $x^2 + y^2 = z + 1$, $z = 0$.

3) $\vec{A} = 4x \cdot \vec{i} - 2y \cdot \vec{j} - z \cdot \vec{k}$, где S – полная поверхность тела, ограниченного поверхностями $3x + 2y = 12$, $3x + y = 6$, $x + y + z = 6$, $y = 0$, $z = 0$.

4. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L :

1) $\vec{A} = \{y^2; (x + y)^2\}$, $L - \Delta ABC$ с вершинами в точках $A(2; 0)$, $B(2; 2)$, $C(0; 2)$;

2) $\vec{A} = yz \cdot \vec{i} + 2xz \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}$, L – линия пересечения поверхностей $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ и $x^2 + y^2 = 9$.

5. Построить линии уровня скалярного поля $U(x; y) = y^2 - (x + 2)^2$.

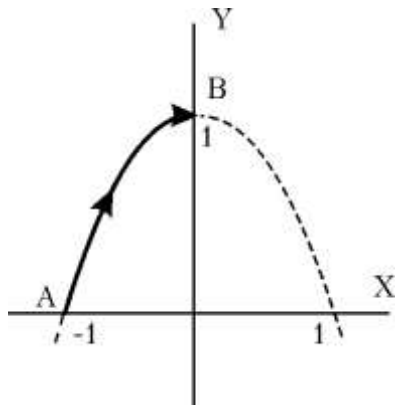
6. Для скалярного поля $U(x; y; z) = xz^2 - \sqrt{x^3 y}$ найти:

1) производную в точке $M_0(2; 2; 4)$ в направлении вектора нормали к поверхности $S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0$, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ ;

2) величину и направление вектора наибольшей скорости изменения поля в точке $M_0(2; 2; 4)$.

**4.9. Решение типового варианта и образец оформления
индивидуального задания № 4 «Скалярное и векторное поле»**

1. Найти работу силового поля $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + (y + 2x) \cdot \vec{j}$ при перемещении единицы массы по дуге параболы $y = 1 - x^2$ от точки $A(-1; 0)$ до точки $B(0; 1)$.



Решение. Работа плоского поля находится по формуле

$$\begin{aligned} A &= \int_{(L)} (\vec{F} \cdot d\vec{l}) = \int_{(L)} P \cdot dx + Q \cdot dy = \\ &= \int_{(L)} y \cdot dx + (y + 2x) \cdot dy. \end{aligned}$$

Из уравнения контура интегрирования имеем

$$y = 1 - x^2, \quad dy = -2x \, dx, \quad -1 \leq x \leq 0.$$

Подставляем в интеграл:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (1 - x^2) \cdot dx + (1 - x^2 + 2x) \cdot (-2x) \, dx = \\ &= \int_{-1}^0 (2x^3 - 5x^2 - 2x + 1) \, dx = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{5}{3}x^3 - x^2 + x \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

2.1. Найти поток векторного поля $\vec{A} = 7x\vec{i} + 5y\vec{j} + z\vec{k}$ через часть плоскости $x + 2y + 4z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ в направлении внешней нормали.

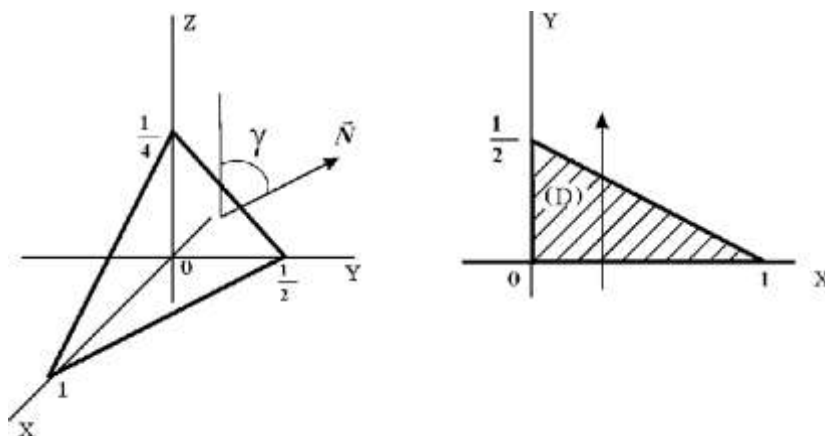
Решение. Поток вычисляем по формуле $\Pi = \iint_{(\sigma)} (\vec{A} \cdot \vec{n}^o) \, d\sigma$.

Выпишем все сомножители подынтегрального выражения.

Вектор поля $\vec{A} = \{7x, 5y, z\}$ дан по условию.

Вектор нормали к поверхности $F(x, y, z) = x + 2y + 4z - 1 = 0$:

$\vec{N} = \{F'_x, F'_y, F'_z\} = \{1, 2, 4\}$. Вектор образует с осью OZ острый угол и является вектором именно внешней нормали.



Так как $|\vec{N}| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$, то $\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{21}}\{1, 2, 4\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$.

Ввиду того, что проецирование на все три координатные плоскости для данной поверхности равнозначно, остановимся на проецировании на плоскость XOY . Тогда элемент площади

$$d\sigma = \frac{dx dy}{|\cos \gamma|} = \frac{dx dy}{4/\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{4} dx dy.$$

Подставим все найденное в формулу вычисления потока

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{(\sigma)} (\vec{A} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{(\sigma)} \{7x, 5y, z\} \frac{1}{\sqrt{21}} \{1, 2, 4\} \frac{\sqrt{21}}{4} dx dy = \\ &= \iint_{(\sigma)} \left(\frac{7x \cdot 1}{4} + \frac{5y \cdot 2}{4} + \frac{z \cdot 4}{4} \right) dx dy = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{7}{4}x + \frac{5}{2}y + z \right) dx dy. \end{aligned}$$

Последнее, что осталось сделать, это выразить из уравнения поверхности интегрирования переменную z : $z = \frac{1}{4}(1-x-2y)$ и подставить вместо z в подынтегральную функцию. Получим теперь уже двойной интеграл по проекции

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{(D)} \left(\frac{7}{4}x + \frac{5}{2}y + \frac{1}{4}(1-x-2y) \right) dx dy = \iint_{(D)} \left(\frac{3}{2}x + 2y + \frac{1}{4} \right) dx dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} \left(\frac{3}{2}x + 2y + \frac{1}{4} \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}xy + y^2 + \frac{1}{4}y \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}(1-x)} dx = \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{3}{8} \right) dx = \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{8}x \right) \Big|_0^1 = \frac{13}{48}. \end{aligned}$$

2.2. Найти поток вектора $\vec{A} = \{\sqrt{z} - 2x, e^x + 4y, \sqrt{y} + 3z\}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности $\{x^2 + y^2 = z^2, z = 6\}$.

Решение. Так как поверхность замкнута, воспользуемся формулой Остроградского

$$\Pi = \oint\oint_{(\sigma)} (\vec{A} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{A} \cdot dv.$$

Найдем дивергенцию векторного поля

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial(\sqrt{z} - 2x)}{\partial x} + \frac{\partial(e^x + 4y)}{\partial y} + \frac{\partial(\sqrt{y} + 3z)}{\partial z} = -2 + 4 + 3 = 5. \end{aligned}$$

Дивергенция поля есть постоянная величина, и в физическом смысле поле представляет собой сплошной источник с одинаковой во всех точках удельной мощностью, равной 5 ед.

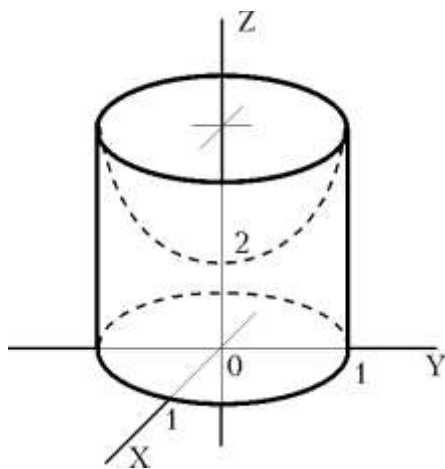
Поток векторного поля

$$\Pi = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{A} \cdot dv = 5 \cdot \iiint_{(V)} dv = 5 \cdot V_{\text{конуса}} = 5 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot H = 5 \cdot 72\pi = 360\pi.$$

Радиус R основания конуса получим, приняв в уравнении конуса $x^2 + y^2 = z^2$: $z=6$, т.е. $x^2 + y^2 = 6^2 \Rightarrow R=6$. Высота конуса $H=6$.

2.3. Найти поток вектора $\vec{A} = 2(z-y) \cdot \vec{j} + (x+6z) \cdot \vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности

$$z = x^2 + y^2 + 2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z \geq 0.$$



$$\begin{aligned} \text{Найдем дивергенцию поля } \operatorname{div} \vec{A} &= \\ &= \frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial 2(z-y)}{\partial y} + \frac{\partial(x+6z)}{\partial z} = \\ &= 0 - 2 + 6 = 4. \end{aligned}$$

$$\Pi = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{A} \cdot dv = 4 \cdot \iiint_{(V)} dv = 4 \cdot V.$$

Хотя в данном примере дивергенция и является постоянной величиной, но готовой формулы для объема данного тела нет, поэтому вычисляем

объем с помощью тройного интеграла, используя цилиндрическую систему координат:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad dv = dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz, \\z &= x^2 + y^2 + 2 \Rightarrow z = \rho^2 + 2, \quad x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1, \\0 &\leq z \leq \rho^2 + 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \iiint_{(V)} dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\rho^2+2} dz = 2\pi \int_0^1 \rho d\rho \left(z \Big|_0^{\rho^2+2} \right) = \\&= 2\pi \int_0^1 \rho(\rho^2 + 2) d\rho = 2\pi \int_0^1 (\rho^3 + 2\rho) d\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^4}{4} + \rho^2 \right) \Big|_0^1 = 2,5\pi.\end{aligned}$$

3.1. Найти модуль циркуляции вектора $\vec{A} = \{(x+y), y^2\}$ вдоль контура треугольника ABC с вершинами в точках $A(0; 0)$, $B(2; 2)$, $C(0; 4)$.

Решение. Поскольку мы имеем плоское поле, воспользуемся формулой Грина

$$\mathcal{C} = \oint_{(L)} (\vec{A} \cdot \vec{dl}) = \oint_{(L)} P dx + Q dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

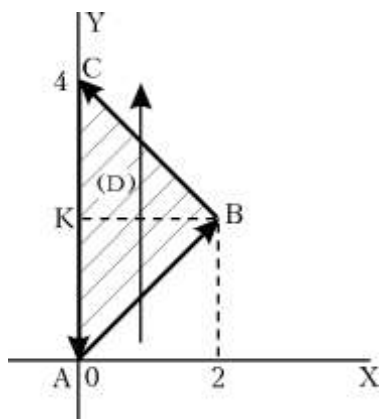
Имеем

$$P(x, y) = (x + y), \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad Q(x, y) = y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1.$$

Тогда

$$\mathcal{C} = - \iint_{(D)} dx dy = -S_{\text{треуг.}} = -1/2 \cdot 4 \cdot 2 = -4.$$

Модуль циркуляции равен $|\mathcal{C}| = 4$.

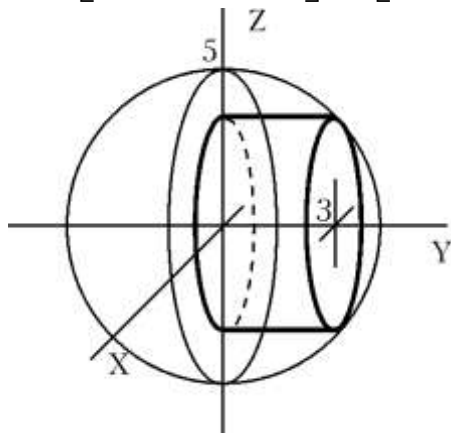


Поскольку подынтегральная функция является постоянной величиной, вычисление циркуляции сводится к вычислению площади области интегрирования. Здесь мы можем воспользоваться известной из геометрии формулой площади треугольника, основание которого $AC = 4$, а высота $KB = 2$.

3.2. Найти модуль циркуляции вектора $\vec{A} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + y^2\vec{k}$ вдоль линии пересечения поверхностей сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ и цилиндра $x^2 + z^2 = 16$, ($y > 0$).

1) Находим координаты вектора-ротора $\overrightarrow{rotA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & 2xz & y^2 \end{vmatrix} =$

$$= [(y^2)'_y - (2xz)'_z] \vec{i} - [(y^2)'_x - (yz)'_z] \vec{j} + [(2xz)'_x - (yz)'_y] \vec{k} = \{2y - 2x; y; z\}.$$



2) Находим единичный вектор нормали.

Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ и цилиндр $x^2 + z^2 = 16$ в правой полуплоскости ($y > 0$) пересекаются по окружности радиуса $R = 4$, лежащей в плоскости $y = 3$.

Действительно, из решения системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + z^2 = 16, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 + y^2 = 25, \\ y = 3. \end{cases}$$

Наиболее простой поверхностью, которую можно натянуть на контур, и является плоскость $y = 3$, единичный вектор нормали к которой $\vec{n}_0 = \{0, 1, 0\}$.

3) Находим циркуляцию по формуле Стокса

$$I = \iint_{(\sigma)} (\overrightarrow{rotA} \cdot \vec{n}^o) d\sigma = \iint_{(\sigma)} \{(2y - 2x), y, z\} \cdot \{0, 1, 0\} d\sigma = \iint_{(\sigma)} y d\sigma.$$

Переходим к двойному интегралу по проекции нашей поверхности (плоскости $y = 3$) на плоскость XOZ . Проекцией будет круг $D: x^2 + z^2 \leq 16$ радиуса $R = 4$. Элемент площади поверхности $d\sigma$ в точности совпадает со своей проекцией, которая равна $dx dz$, а значение переменной y на поверхности равно 3.

$$I = \iint_{(\sigma)} y d\sigma = \left| \frac{d\sigma = dx dz}{y = 3} \right| = \iint_{(D)} 3 dx dz = 3 S_{\text{круга}} = 3 \pi 4^2 = 48\pi.$$

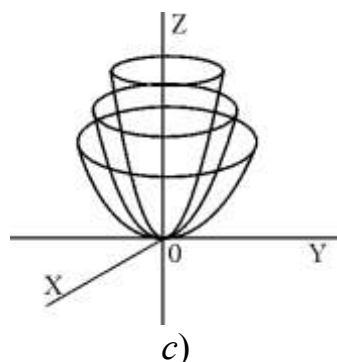
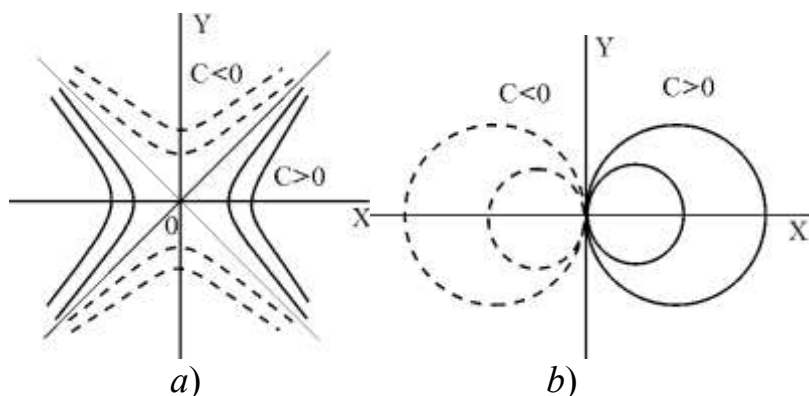
4. Построить линии и поверхности уровня скалярного поля

$$U = x^2 - y^2$$

Решение. Семейство линий уровня определяется уравнением

$$x^2 - y^2 = C, \Rightarrow \frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{C} = 1.$$

Это семейство равнобоких гипербол с асимптотами $y = x$, $y = -x$. В зависимости от знака взятой константы C действительной осью гипербол может быть и ось OX , и ось OY (рис. а)



$$2) U = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Семейство линий уровня определяется уравнением

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = C, \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{x}{C}.$$

Это семейство окружностей с центром, смещенным по оси влево или вправо в зависимости от знака C на величину $|1/2C|$ и радиусом

$$R = \frac{1}{(2C)^2} \text{ (рис. b).}$$

$$3) U = \frac{z}{x^2 + y^2}.$$

Семейство поверхностей равного уровня определяется уравнением

$$\frac{z}{x^2 + y^2} = C, \Rightarrow z = C(x^2 + y^2).$$

Это семейство параболоидов, с вершинами в начале координат и осью симметрии OZ (рис.с) В зависимости от знака C параболоиды могут быть направлены вверх или вниз.

5. Для скалярного поля $U = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}$ найти:

1) производную в точке $M_0(3; 0; -4)$ в направлении вектора нормали к поверхности $S: x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 4$, образующего острый угол с положительным направлением оси OZ ;

2) величину и направление вектора наибольшей скорости изменения поля в точке $M_0(3; 0; -4)$

Решение.

Рассмотрим решение первой части задачи (5.1.).

1) Находим частные производные функции $U(x; y; z)$ в точке M_0

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{M_0} = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_{M_0} = \frac{6}{10} - \frac{3}{\sqrt{25}} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{M_0} = \left(\frac{2y}{1 + x^2 + y^2} \right)_{M_0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{M_0} = - \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_{M_0} = - \frac{-4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}.$$

2) Находим вектор направления. Как известно, координатами вектора нормали к поверхности, заданной уравнением $S: F(x; y; z) = 0$, являются частные производные функции $F(x; y; z)$, т.е. $\vec{N} = \{F'_x; F'_y; F'_z\}$.

Находим вектор нормали к заданной поверхности

$$S: x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 4 \Rightarrow$$

$$F(x; y; z) = x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 - 4z - 4 \Rightarrow \vec{N} = \{2x - 6; 18y; 2z - 4\}.$$

Вычисляем координаты вектора нормали в данной точке

$$M_0(3; 0; -4): \vec{N} = \{0; 0; -12\}.$$

Находим единичный вектор, разделив каждую координату вектора на его длину ($|\vec{N}| = 12$): $\vec{l}^o = \{0; 0; -1\}$.

Так как в условии задачи сказано, что вектор нормали должен образовывать с осью OZ острый угол, то координата z должна быть положительной, поэтому берем противоположный вектор $\vec{l}^o = \{0; 0; 1\}$.

Направляющие косинусы $\cos \alpha = 0$; $\cos \beta = 0$; $\cos \gamma = 1$.

3) Вычисляем производную по направлению

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \cos \gamma = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{4}{5} \cdot 1 = 0,8.$$

Решаем вторую часть задачи (5.2.)

Величину и направление вектора наибольшей скорости изменения поля в точке характеризует вектор-градиент поля. При этом модуль вектора-градиента показывает величину этой максимальной скорости роста поля, а направление задают направляющие косинусы вектора градиента.

Находим частные производные функции $U(x; y; z)$ и вычисляем их в заданной точке M_0 . Это уже сделано в первой части решения.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{M_0} = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{M_0} = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{M_0} = \frac{4}{5}.$$

Записываем вектор градиента

$$\overrightarrow{\text{grad} U} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + \frac{4}{5} \cdot \vec{k} = \{0; 0; 4/5\}.$$

Находим модуль этого вектора, т.е. величину наибольшей скорости изменения функции и

$$|\overrightarrow{\text{grad} U}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (4/5)^2} = \sqrt{(4/5)^2} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Направление вектора-градиента задается его направляющими косинусами:

$$\cos \alpha = \frac{0}{4/5} = 0; \quad \cos \beta = \frac{0}{4/5} = 0; \quad \cos \gamma = \frac{4/5}{4/5} = 1.$$



5. ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ

5.1. Требования для сдачи экзамена

После завершения изучения дисциплины студенты сдают экзамен. К экзамену допускаются только те студенты, у которых зачтены все индивидуальные задания.

Студенты, изучающие дисциплину по классической заочной форме обучения, сдают экзамен во время экзаменационной сессии по билетам (в устной или письменной форме).

Студенты, изучающие дисциплину с применением дистанционных образовательных технологий, сдают экзамен дистанционно (через Интернет, на сайте ИДО).

5.2. Вопросы для подготовки к экзамену

Неопределенный интеграл

1. Дайте определение первообразной функции и неопределенного интеграла. Укажите его геометрический смысл. В чем состоит критерий правильности результата неопределенного интегрирования?

2. Запишите таблицу основных неопределенных интегралов.

3. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.

4. В чем состоит свойство инвариантности основных формул интегрирования? Изложите суть метода подведения под знак дифференциала.

5. Перечислите основные типы интегралов, берущихся методом интегрирования по частям. В чем состоит сам метод?

6. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле. В чем состоит принцип выбора подходящей подстановки? Каковы основные этапы проведения замены переменной?

7. Какие выбираются алгебраические подстановки при интегрировании иррациональных функций?

8. В каких случаях при интегрировании иррациональных функций используются тригонометрические подстановки?

9. Сформулируйте схему разложения рациональной дроби на простейшие слагаемые. Интегрирование правильных и неправильных дробей.

10. В каких случаях при интегрировании тригонометрических функций можно обойтись без подстановок, а в каких используются тригонометрические подстановки?



11. Что Вы знаете о неберущихся интегралах? Приведите примеры.

Определенный интеграл

1. Расскажите схему составления интегральной суммы и определенного интеграла для данной функции в данном интервале.

2. Сформулируйте геометрический смысл определенного интеграла.

3. Сформулируйте и поясните геометрически теорему существования определенного интеграла.

4. Сформулируйте и поясните геометрически простейшие свойства определенного интеграла.

5. Запишите и геометрически поясните теорему о среднем значении для определенного интеграла. Что такое среднее значение функции в интервале?

6. Сформулируйте теорему о производной интеграла по переменному верхнему пределу.

7. Выведите формулу Ньютона – Лейбница. В чем заключается сходство и различие определенного и неопределенного интегралов?

8. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах методы вычисления определенных интегралов (непосредственное, интегрирование по частям, замены переменной).

9. Дайте определение несобственного интеграла по бесконечному промежутку. В чем его геометрический смысл? Как установить сходимость несобственных интегралов 1-го рода?

10. Дайте определение несобственного интеграла от неограниченной функции. В чем его геометрический смысл? Как установить сходимость несобственных интегралов 2-го рода?

11. Запишите формулы для вычисления площадей плоских фигур, объемов тел по площади поперечного сечения и тел вращения, длин дуг плоских кривых и площадей поверхности вращения.

12. Решения каких физических задач сводятся к вычислениям определенных или несобственных интегралов?

Кратные интегралы

1. Расскажите схему составления интегральной суммы для функции двух переменных в данной плоской области.

2. Сформулируйте определение двойного интеграла и его геометрический смысл

3. Сформулируйте и запишите основные свойства двойного интеграла.



4. Сформулируйте теорему о среднем значении функции в плоской области, сформулируйте ее геометрический смысл.
5. Что такое повторный интеграл? Как выбирается порядок интегрирования? Как проводится вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат?
6. Запишите формулу замены переменных в двойном интеграле. Якобиан перехода от декартовых координат к полярным.
7. Изложите схему перехода в двойном интеграле от декартовых координат к полярным.
8. Какие возможны приложения двойного интеграла? Запишите формулы.
9. Изложите схему составления интегральной суммы для функции трех переменных в некоторой области трехмерного пространства.
10. Сформулируйте определение и запишите основные свойства тройного интеграла.
11. Сформулируйте теорему о среднем значении в тройном интеграле.
12. Изложите схему вычисления тройного интеграла в декартовой системе координат.
13. Запишите формулу замены переменных в тройном интеграле. Якобиан перехода от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим.
14. Изложите схему перехода в тройном интеграле от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим.
15. Какие возможны приложения тройного интеграла?

Скалярное и векторное поле

1. Дайте определение скалярного поля. Приведите физические примеры.
2. Что называется производной скалярного поля по направлению? В чем ее физический смысл? Запишите формулу вычисления производной по направлению.
3. Дайте понятие градиента скалярного поля. Запишите и поясните связь вектора-градиента с производной по направлению. Докажите, что вектор-градиент в каждой точке перпендикулярен к линии уровня, проходящей через эту точку.
4. Дайте определение векторного поля. Приведите физические примеры.
5. Дайте определение и запишите формулу для вычисления потока векторного поля в векторной и координатной формах.

6. Дайте понятие дивергенции векторного поля. В чем состоит ее физический смысл? Запишите формулу для вычисления дивергенции.
7. Запишите формулу Остроградского – Гаусса в векторной и координатной формах для вычисления потока векторного поля через замкнутую поверхность. Поясните физический смысл формулы.
8. Поясните физический смысл циркуляции на примере векторного поля скоростей частиц текущей жидкости.
9. Дайте определение и запишите формулу вычисления циркуляции векторного поля в векторной и координатной формах.
10. Дайте понятие ротора векторного поля. Запишите формулу нахождения ротора.
11. Запишите формулы Стокса и Грина. Поясните их смысл.
12. Какое векторное поле называется потенциальным? Что такое потенциал? Как он находится? Сформулируйте свойства потенциального поля.
13. Какое векторное поле называется соленоидальным? Что такое векторная трубка? Сформулируйте свойства соленоидального поля.
14. Какое векторное поле называется гармоническим? Сформулируйте свойства гармонического поля.
15. Дайте понятие оператора Гамильтона. Как с его помощью можно записать дифференциальные векторные операции первого порядка?
16. Дайте понятие оператора Лапласа и гармонической функции.

5.3. Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину по классической заочной форме

Билет включает семь задач. Экзамен считается сданным, если решены 4 задачи и более. Также преподаватель может задать теоретические вопросы по изученному материалу.

1. Решить интегралы

$$\text{а) } \int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx, \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{x^2}{(5x^3+2)^2} dx.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$2y = \sqrt{x}, \quad 2xy = 1, \quad x = 16.$$

3. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ по области (D) , ограниченной линиями

$$y = 5 - x^2, \quad y = 1.$$

4. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$ по области (V) , ограниченной поверхностями

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 2 - x^2 - y^2$$

в цилиндрической системе координат.

5. Найти поток векторного поля

$$\vec{A} = (x - y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (x^2 + 2z + 4)\vec{k}$$

через замкнутую поверхность $x^2 + z^2 = 4$, $y = 1$, $y = 3$

6. Найти циркуляцию плоского векторного поля

$\vec{A} = (x + 2y)\vec{i} + (y - x)\vec{j}$ вдоль контура $x^2 + y^2 = 9$, обходимого в положительном направлении, используя формулу Грина.

7. Найти градиент скалярного поля

$$U(x; y; z) = \frac{x^2 y}{z - 1} \text{ в точке } M_0(1; -1; 2).$$

5.4. Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину с применением дистанционных образовательных технологий

В данном разделе приведены примеры вопросов из экзаменационного билета для студентов, сдающих экзамен в онлайн режиме (через Интернет на сайте ИДО).

Экзаменационный билет включает в себя задания следующих типов: задания на выбор единственного ответа; задания на выбор множественных ответов; задания на установление последовательности; задания на установление соответствия; задания для краткого ответа.

1. Задание на выбор единственного ответа

Интеграл $\int \cos \frac{3}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$ равен

- 1) $-\frac{1}{3} \sin \frac{3}{x} + C$
- 2) $\frac{1}{3} \sin \frac{3}{x} + C$
- 3) $-\sin \frac{3}{x} + C$
- 4) $\sin \frac{3}{x} + C$

2. Задание на выбор множественных ответов

Укажите интегралы, равные нулю в соответствии со свойствами определенного интеграла по симметричному промежутку

- 1) $\int_{-3}^3 x^3 \cdot \sqrt{1+x^2} dx$
- 2) $\int_{-3}^3 x^2 \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot dx$
- 3) $\int_{-3}^3 x^6 (1+x^2) \cdot dx$
- 4) $\int_{-3}^3 x^3 \cdot (1+x^4) \cdot dx$

3. Задание на установление последовательности

В двойном интеграле $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ по области (D) , ограни-

ченной линиями $y + x^2 = 2$, $y = x$, $y = -x$, $y \geq 0$ расставлены пре-

делы интегрирования $\int_a^0 dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy + \int_c^d dx \int_{y_3(x)}^{2-x^2} f(x; y) dy$. Укажите по-

следовательно выражения a , c , d , $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$.



- 1) $-x$
- 2) -1
- 3) $2 - x^2$
- 4) x
- 5) 1
- 6) 0

4. Задание на установление соответствия

Установите соответствие формулы вычисления с геометрическим приложением

- | | |
|---|--|
| 1) $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \delta(\varphi; \rho) \cdot \rho \cdot d\rho$ | 1) Объем тела в цилиндрической системе координат |
| 2) $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$ | 2) Площадь плоской фигуры в декартовой системе координат |
| 3) $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho \cdot d\rho \int_{z_1(\rho; \varphi)}^{z_2(\rho; \varphi)} \delta(\rho; \varphi; z) dz$ | 3) Масса тела в цилиндрической системе координат |
| 4) $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho \cdot d\rho \int_{z_1(\rho; \varphi)}^{z_2(\rho; \varphi)} dz$ | 4) Объем тела в декартовой системе координат |
| 5) $\int_0^b dx \int_0^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} dz$ | 5) Масса пластинки в полярной системе координат |

5. Задание для краткого ответа

Вычислить работу векторного поля $\vec{A} = (x + y) \cdot \vec{i} + (x - y) \cdot \vec{j}$ по линии $y = x^2$ от точки $M_1(0;0)$ до точки $M_2(2;4)$.



6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Литература обязательная

1. Терехина Л.И., Фикс И.И. Высшая математика. Часть 3. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Дифференциальные уравнения. Ряды: учебное пособие. – Томск, 2008. – 203 с.
2. Терехина Л.И., Фикс И.И. Высшая математика. Часть 4. Кратные интегралы. Теория поля. Функции комплексного переменного. Операционный метод: учебное пособие. – Томск, 2009. – 192 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для втузов. – М.: Наука, 1978.
4. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа: учебник. – М.: Наука 1971.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие в 2-х ч. – М.: Высш. шк. – часть 1, часть 2 – 1980 (1986).

Интернет-ресурсы

6. СТО ТПУ 2.5.01–2006. Система образовательных стандартов. Работы выпускные, квалификационные, проекты и работы курсовые. Структура и правила оформления / ТПУ [Электронный ресурс] – Томск, 2006. – Режим доступа <http://portal.tpu.ru/departments/head/methodic/standart>, свободный.



Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 2

Методические указания и индивидуальные задания

Составители

ТЕРЕХИНА Людмила Ивановна
ФИКС Иван Иванович

Рецензент

*кандидат технических наук,
доцент кафедры ПГС ЭНИН*

Е.П. Теплухин

Компьютерная верстка

О.С. Вадутов

Подписано к печати . Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать Херох. Усл.печ.л. 1,16. Уч.-изд.л. 1,05.

Заказ . Тираж экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества

Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО



ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.

Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru