



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИДО

С.И. Качин

« ____ » _____ 2012 г.

МАТЕМАТИКА 3

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов ИДО, обучающихся по направлениям
240100 «Химическая технология»,
241000 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии,
нефтехимии и биотехнологии»

Составитель

О.Н. Имас

Семестр	3
Кредиты	6
Лекции, часов	8
Практические занятия, часов	10
Индивидуальные задания	№ 1, № 2, № 3, № 4
Самостоятельная работа, часов	164
Формы контроля	экзамен

Издательство

Томского политехнического университета
2012



УДК 53

Математика 3: метод. указ. и индивид. задания для студентов ИДО, обучающихся по направлениям 240100 «Химическая технология», 241000 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии» / сост. О.Н. Имас; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 187 с.

Методические указания и индивидуальные задания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики «____» _____ 2012 г., протокол № ____.

Зав. кафедрой ВМ
профессор, доктор физ.-мат. наук

_____ К.П. Арефьев

Аннотация

Методические указания и индивидуальные задания по дисциплине «Математика 3» предназначены для студентов ИДО, обучающихся по 240100 «Химическая технология», 241000 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии».

Приведены содержание основных тем дисциплины, темы практических занятий и список рекомендуемой литературы. Приведены варианты заданий для индивидуальных домашних заданий. Даны методические указания по выполнению индивидуальных домашних заданий.



ОГЛАВЛЕНИЕ

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ	4
2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ	5
3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ	15
4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ	16
4.1. Общие методические указания	16
4.1.1. Требования к оформлению индивидуального задания	16
4.2. Варианты индивидуального задания № 1	17
4.3. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1	40
4.4. Варианты индивидуального задания № 2	56
4.5. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 2	76
4.6. Варианты индивидуального задания № 3	91
4.7. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 3	111
4.8. Варианты индивидуального задания № 4	137
4.9. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 4	158
5. ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ	180
5.1. Требования для сдачи экзамена	180
5.2. Вопросы для подготовки к экзамену	180
5.3. Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину по КЗФ	182
5.4. Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину с применением ДОТ	183
6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ	186



1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Математика 3» изучается в 3 семестре студентами ИДО, обучающимися по направлениям 240100 «Химическая технология», 241000 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии».

Целями преподавания дисциплины являются:

- развитие математической интуиции;
- воспитание математической культуры;
- овладение логическими основами курса, необходимыми для решения теоретических и практических задач;
- овладение понятиями дисциплины, такими как неопределенный и определенный интеграл, интегральная сумма, несобственный интеграл, кратный интеграл, дифференциальное уравнение, числовой ряд, функциональный ряд, ряд Тейлора, ряд Фурье.

В результате изучения дисциплины студент должен *знать* основы интегрального исчисления функции одной и нескольких переменных; *уметь* применять методы интегрального исчисления, методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и методы гармонического анализа для решения практических задач; *владеть* методами интегрального исчисления.

Дисциплина «Математика 3» входит в базовую часть математического и естественнонаучного цикла (Б2). Знание содержания дисциплины необходимо для освоения остальных дисциплин математического, естественнонаучного и профессионального цикла ООП.

Пререквизиты. Для освоения дисциплины необходимы знания дифференциального исчисления функции одной и нескольких переменных.

Кореквизиты. Параллельно с данной дисциплиной могут изучаться дисциплины гуманитарного, социального и экономического цикла, дисциплины естественнонаучного цикла: «Физика», «Информатика».



2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Неопределенный интеграл

Первообразная функция. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица интегралов. Методы интегрирования: рациональные и иррациональные функции, тригонометрические выражения.

Рекомендуемая литература: [1, с. 3–51], [3], [7, с. 5–64].

Методические указания

При изучении этой темы необходимо выучить наизусть таблицу интегралов и основные формулы интегрирования. Внимательно разберите основные методы интегрирования: метод подведения под знак дифференциала, метод подстановки и метод интегрирования по частям. Особую трудность в изучении представляет метод подведения под знак дифференциала. Для успешного овладения этим методом вместе с таблицей интегралов используйте и таблицу производных (или таблицу дифференциалов). Тщательно разберите все решённые примеры в [1]. Следует учесть, что в интегральном исчислении нет общих правил. Интегрирование может быть выполнено не единственным способом. Но даже и тогда, когда имеется теоретическое правило вычисления интеграла, оно может оказаться далеко не лучшим.

Ниже сформулированы теоретические вопросы, которые помогут подготовиться к выполнению индивидуальных заданий. Приступать к решению задач можно только в том случае, если ответы на вопросы не вызвали затруднений. В противном случае необходимо снова обратиться к рекомендованной литературе.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое первообразная для функции?
2. Для каких функций существуют первообразные?
3. Как связаны между собой две первообразные для одной и той же функции?
4. Что такое неопределённый интеграл от функции?
5. Какими свойствами обладает неопределённый интеграл?
6. Какая операция является обратной операции интегрирования?
7. Какие интегралы называются «неберущимися»? Приведите пример.



8. В чём состоит свойство инвариантности формул интегрирования?
9. Запишите формулу интегрирования по частям в неопределённом интеграле.
10. Для нахождения каких интегралов используется формула интегрирования по частям?
11. Как сделать замену переменной в неопределённом интеграле?
12. Назовите основные методы интегрирования.
13. Какие дроби называются простейшими?
14. Какая рациональная дробь называется правильной?
15. Какая рациональная дробь называется неправильной?
16. Какие рациональные дроби можно представить в виде суммы простейших дробей?
17. Каков алгоритм разложения рациональной дроби на простейшие дроби?
18. Как найти коэффициенты разложения правильной рациональной дроби на простейшие?
19. Каков алгоритм интегрирования рациональной дроби?
20. В результате какой подстановки интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ сводится к интегралу от рациональной функции?
21. Какие существуют методы нахождения интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где $m, n \in \mathbb{Z}$?
22. Какие существуют методы нахождения интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$?
23. Какие существуют методы нахождения интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$?
24. Какие существуют методы нахождения интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$?
25. Что такое «дифференциальный бином»?
26. В каких случаях интеграл от дифференциального бинома выражается через элементарные функции?



Тема 2. Интегральное исчисление функции одной и нескольких переменных

1.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл и его свойства. Основные методы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона–Лейбница.

2.2. Геометрические приложения определенного интеграла. Вычисление площадей, длины дуги, объема тела вращения в различных системах координат. Приложения определенного интеграла в механике.

2.3. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций. Признаки сходимости. Абсолютная сходимость. Понятие главного значения несобственного интеграла.

2.4. Задачи, приводящие к понятию кратного интеграла. Определение двойного интеграла. Достаточные условия интегрируемости. Свойства кратных интегралов. Сведение к повторному интегралу.

2.5. Криволинейные координаты, якобиан перехода, замена переменных в кратных интегралах.

Рекомендуемая литература: [1, с. 52–87], [2, с. 3–37], [7, с. 65–140].

Методические указания

При изучении темы «определенные интегралы» обратите внимание на их связь с неопределёнными интегралами. Для вычисления определённых интегралов используйте формулу Ньютона–Лейбница, применяя при этом все изученные правила и методы нахождения первообразных. Решение задач о нахождении площади плоских фигур следует начинать с построения соответствующей области в декартовой системе координат. При построении кривых в полярной системе координат и параметрической форме полезно вспомнить методы построения этих кривых, изученные в курсе «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» (1 семестр). При исследовании несобственных интегралов на сходимость не пытайтесь сразу найти первообразную. Очень часто исследуемый интеграл является неберущимся. Вам необходимо лишь установить его сходимость или расходимость. Для этого достаточно использовать признаки сходимости для несобственных интегралов.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. В чём заключается сходство и различие между определённым и неопределённым интегралами?

2. Запишите формулу интегрирования по частям в неопределённом интеграле.



3. Запишите формулу интегрирования по частям в определённом интеграле.
4. Для нахождения каких интегралов используется формула интегрирования по частям?
5. Как изменится определённый интеграл, если пределы интегрирования поменять местами?
6. Запишите формулу Ньютона – Лейбница.
7. Как сделать замену переменной в неопределённом интеграле?
8. Как сделать замену переменной в определённом интеграле?
9. Назовите основные методы интегрирования.
10. Чему равен определённый интеграл по симметричному интервалу от нечётной функции?
11. Чему равен определённый интеграл по симметричному интервалу от чётной функции?
12. Как с помощью определённого интеграла найти среднее значение функции на отрезке?
13. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью интеграла?
14. Какой геометрический смысл определённого интеграла?
15. Что такое несобственный интеграл?
16. Какой несобственный интеграл называется сходящимся?
17. Какой несобственный интеграл называется расходящимся?
18. Что такое определённый интеграл с переменным верхним пределом?
19. Как определить знак определённого интеграла, не вычисляя его?
20. В каком случае несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования имеет геометрический смысл?
21. Чему равна производная определённого интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу?
22. В чём заключается свойство аддитивности определённого интеграла?
23. Чем отличается кратный интеграл от повторного.
24. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью двойного интеграла?
25. Как вычислить массу неоднородной плоской фигуры с помощью двойного интеграла?
26. Как вычислить площадь плоской фигуры, образованной пересечением окружностей, с помощью двойного интеграла в полярных координатах?



Тема 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения

3.1. Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений. Задача Коши.

3.2. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним, Однородные уравнения и приводящиеся к ним. Линейные уравнения, уравнения Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах.

3.3. Комплексные числа и действия над ними.

3.4. Дифференциальные уравнения высших порядков: основные понятия, задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.

3.5. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Свойства линейного дифференциального оператора. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций. Определитель Вронского.

3.6. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) высших порядков. Свойства решений. Теорема об общем решении ЛОДУ. ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

3.7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ). Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Структура общего решения ЛНДУ. ЛНДУ с постоянными коэффициентами. Отыскание частного решения ЛНДУ по виду правой части уравнения.

Рекомендуемая литература: [1, с. 88–144], [8, с.7–117].

Методические указания

При решении многих физических и технических задач приходится находить неизвестную функцию по известному соотношению между этой функцией, её производными и независимой переменной. Уравнение, содержащее функцию и её производную, называется дифференциальным уравнением. Далеко не все дифференциальные уравнения могут быть разрешены аналитически – общее решение записано в виде функции. Наша задача изучить основные типы дифференциальных уравнений, методы решений которых теоретически хорошо обоснованы. Еще меньше типов дифференциальных уравнений разрешаются аналитически среди уравнений высших порядков. Однако, как показала многолетняя практика, именно линейные уравнения описывают основные инженерные задачи. И именно для них была построена законченная теория построения общего решения. Наша задача изучить основные принципы построения общего решения и использовать их при решении задач.

Чтобы успешно освоить данную тему, необходимо повторить первый изученный раздел данной дисциплины: неопределённый интеграл.



Ниже сформулированы теоретические вопросы, которые помогут подготовиться к выполнению индивидуальных заданий. Приступать к решению задач можно только в том случае, если ответы на вопросы не вызвали затруднений. В противном случае необходимо снова обратиться к рекомендованной литературе.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое дифференциальное уравнение?
2. Какое дифференциальное уравнение называется обыкновенным?
3. Что называется порядком дифференциального уравнения?
4. Как определить порядок дифференциального уравнения?
5. Что называется решением дифференциального уравнения?
6. Что означает «проинтегрировать дифференциальное уравнение»?
7. Какое решение дифференциального уравнения называется общим?
8. Какое решение дифференциального уравнения называется частным?
9. Что называется общим интегралом дифференциального уравнения?
10. Что называется частным интегралом дифференциального уравнения?
11. Чем общее решение отличается от общего интеграла дифференциального уравнения?
12. Чем частное решение отличается от частного интеграла дифференциального уравнения?
13. Какое решение дифференциального уравнения называется особым?
14. Как формулируется задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка?
15. При каких условиях дифференциальное уравнение первого порядка имеет решение?
16. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделёнными переменными?
17. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными?
18. Что означает «разделить переменные в дифференциальном уравнении»?
19. Каков признак дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными?
20. При каком условии функция $f(x, y)$ называется однородной функцией n -го измерения относительно своих аргументов x и y ?
21. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным уравнением?



22. Как свести однородное дифференциальное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными?
23. Каков признак однородного дифференциального уравнения?
24. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным уравнением?
25. Каков признак линейного дифференциального уравнения?
26. Каков алгоритм решения линейного уравнения?
27. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением в полных дифференциалах?
28. Каков признак дифференциального уравнения первого порядка в полных дифференциалах?
29. При каких условиях возможно понижение порядка дифференциального уравнения?
30. Какое дифференциальное уравнение n -го порядка называется линейным?
31. Какое линейное дифференциальное уравнение n -го порядка называется однородным?
32. Какое линейное дифференциальное уравнение n -го порядка называется неоднородным?
33. Какая система функций называется линейно независимой на заданном отрезке?
34. При каком условии система функций является линейно независимой на заданном отрезке?
35. Что называется фундаментальной системой решения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка?
36. Что называется характеристическим уравнением, соответствующим данному линейному однородному дифференциальному уравнению n -го порядка с постоянными коэффициентами?
37. Как получить характеристическое уравнение, соответствующее данному линейному однородному дифференциальному уравнению n -го порядка с постоянными коэффициентами?
38. Какой вид имеет общее решение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, если все корни характеристического уравнения действительны и различны?
39. Какой вид имеет общее решение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, если все корни характеристического уравнения действительны, но среди них встречаются кратные?
40. Какой вид имеет общее решение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, если все корни характеристического уравнения комплексно-сопряжённые?



41. Какую структуру имеет общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами?
42. В каком случае частное решение неоднородного уравнения может быть найдено методом неопределённых коэффициентов?
43. Какой метод применяется для решения линейного неоднородного уравнения с правой частью общего вида?

Тема 4. Числовые и функциональные ряды

- 4.1. Числовые ряды: основные определения и свойства. Необходимое условие сходимости. Гармонический ряд. Обобщенный гармонический ряд.
- 4.2. Знакоположительные ряды. Признаки сходимости знакоположительных рядов: сравнения, Даламбера, Коши, интегральный.
- 4.3. Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Оценка остатка ряда.
- 4.4. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся числовых рядов.
- 4.5. Функциональные последовательности и ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.
- 4.6. Степенные ряды. Свойства степенных рядов. Теорема Абеля.
- 4.7. Ряд Тейлора. Разложения элементарных функций в степенные ряды. Применения степенных рядов.
- 4.8. Ряды Фурье по ортогональным системам. Минимальное свойство частных сумм рядов Фурье, критерии сходимости. Пространство функций со скалярным произведением.
- 4.9. Сходимость тригонометрических рядов. Тригонометрические ряды Фурье. Неполные ряды Фурье.

Рекомендуемая литература: [1, с. 153–200], [9, с. 8–84].

Методические указания

При изучении данного раздела обратите внимание на объект исследования – это сумма бесконечного числа слагаемых, которая в зависимости от вида слагаемых бывает либо конечна, либо бесконечна. Именно бесконечность суммирования приводит к новым свойствам рядов, не характерным для конечных сумм, например, сумма ряда может измениться при перемене мест слагаемых. Поэтому, внимательно изучите основные теоретические положения данной темы: определения и свой-

ства, а также постарайтесь разобраться в обоснованиях и доказательствах неочевидных утверждений.

Другим весьма востребованным в прикладных науках функциональным рядом является тригонометрический ряд Фурье – ряд по тригонометрической системе функций. Это наиболее простой представитель гармонического анализа. Для лучшего понимания построения этого объекта Вам необходимо вспомнить определения ортогональности системы функций, определение скалярного произведения в линейном пространстве (дисциплина «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»).

Ниже сформулированы теоретические вопросы, которые помогут подготовиться к выполнению индивидуальных заданий. Приступать к решению задач можно только в том случае, если ответы на вопросы не вызвали затруднений. В противном случае необходимо снова обратиться к рекомендованной литературе.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что называется числовым рядом?
2. Какой ряд называется знакопостоянным?
3. Какой ряд называется знакоположительным?
4. Какой ряд называется знакопеременным?
5. Какой ряд называется знакочередующимся?
6. Что называется частичной суммой ряда?
7. В каком случае числовой ряд называется сходящимся?
8. В каком случае числовой ряд называется расходящимся?
9. Что такое сумма ряда?
10. Что такое остаток ряда?
11. Какими свойствами обладают сходящиеся ряды?
12. Какой ряд называется гармоническим?
13. Как формулируется необходимый признак сходимости ряда?

14. Что можно сказать о сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0?$$

15. Что можно сказать о сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0?$$

16. Какие достаточные признаки используются для исследования на сходимость рядов с положительными членами?



17. При каком условии сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$?
18. При каком условии расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$?
19. При каком условии сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$?
20. При каком условии расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$?
21. Какой ряд называется абсолютно сходящимся?
22. Какой ряд называется условно сходящимся?
23. Какие условия содержит теорема Лейбница?
24. Какой ряд называется функциональным?
25. Что называется точкой сходимости функционального ряда?
26. Что называется областью сходимости функционального ряда?
27. Как найти область сходимости функционального ряда?
28. Какой функциональный ряд называется степенным?
29. Какой вид имеет область сходимости степенного ряда?
30. Что называется радиусом сходимости степенного ряда?
31. Что называется точкой сходимости функционального ряда?
32. Какую область сходимости имеет степенной ряд, если его радиус сходимости равен нулю?
33. Какую область сходимости имеет степенной ряд, если его радиус сходимости равен бесконечности?
34. Что такое ряд Тейлора?
35. Чем ряд Тейлора отличается от ряда Маклорена?
36. Что значит разложить функцию в ряд Тейлора?
37. Какой вид имеет ряд Тейлора для функции $y = e^x$?
38. Какой вид имеет ряд Тейлора для функции $y = \ln(1+x)$?
39. Какой вид имеет ряд Тейлора для функции $y = \sin x$?
40. Какой вид имеет ряд Тейлора для функции $y = \cos x$?
41. Какой вид имеет ряд Тейлора для функции $y = (1+x)^m$?
42. Какая система функций называется ортогональной?
43. Какой ряд называется тригонометрическим рядом Фурье?
44. Для какого интервала построена теория рядов Фурье?
45. Какие условия должны выполняться для функции, чтобы функция сходилась к своему ряду Фурье?
46. Чему равна сумма ряда в точках разрыва функции?
47. Какие ряды Фурье называются неполными?



3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Тематика практических занятий

1. Непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям, интегрирование рациональных функций, интегрирование тригонометрических и иррациональных функций (2 часа).
2. Определенный интеграл, замена переменных, приложение определенного интеграла (2 часа).
3. Несобственные интегралы I и II рода (2 часа).
4. Кратные интегралы (2 часа).
5. Дифференциальные уравнения (2 часа).
6. Числовые ряды (2 часа).
7. Функциональные ряды (2 часа).

Рекомендуемая литература: [1,2,3,7]

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

4.1. Общие методические указания

В соответствии с учебным графиком предусмотрено выполнение четырех индивидуальных домашних заданий (ИДЗ). Выполнение заданий необходимо для закрепления теоретических знаний и приобретения практических навыков решения типовых задач.

Индивидуальные задания соответствуют темам, указанным в разделе 2 данных методических указаний.

Номер варианта индивидуального задания определяется по последним цифрам номера зачетной книжки. Если образуемое ими число больше **20**, то следует взять сумму этих цифр. Например, если номер зачетной книжки Д-8А11/04, то номер варианта задания равен 4. Если номер зачетной книжки З-8А11/39, то номер варианта задания равен 12.

4.1.1. Требования к оформлению индивидуального задания

При оформлении индивидуального домашнего задания необходимо соблюдать следующие требования.

1. Индивидуальное задание должно иметь титульный лист, оформленный в соответствии со стандартами ТПУ [6]. На титульном листе указываются номер индивидуального задания, номер варианта, название дисциплины; фамилия, имя, отчество студента; номер группы, шифр. **Образец оформления и шаблон титульного листа** размещен на сайте ИДО в разделе СТУДЕНТУ → ДОКУМЕНТЫ (<http://portal.tpu.ru/ido-tpu>).

2. Каждое индивидуальное задание оформляется отдельно. Студенты, изучающие дисциплину **по классической заочной форме**, оформляют индивидуальные задания в отдельных тетрадях. Студенты, изучающие дисциплину **с применением дистанционных технологий**, оформляют индивидуальные задания в отдельных файлах.

3. Текст индивидуального задания набирается в текстовом процессоре Microsoft Word. Шрифт Times New Roman, размер 12–14 pt, для набора формул рекомендуется использовать редактор формул Microsoft Equation или MathType.

4. Решения задач следует располагать в той же последовательности, что и задания.



5. Каждая задача должна начинаться с условия задачи, ниже краткая запись задачи, если необходимо – рисунок, с условными обозначениями, которые в дальнейшем будут использованы при решении задач.

6. Решение должно быть подробным, с включением промежуточных расчётов и указанием использованных формул.

7. Страницы задания должны иметь сквозную нумерацию.

8. В задание включается список использованной литературы.

Если работа не соответствует требованиям, студент получает оценку «не зачтено». В этом случае работа должна быть исправлена и повторно предоставлена преподавателю. При доработке в текст необходимо включить дополнительные вопросы, полученные после проверки работы преподавателем, и ответы на эти вопросы.

Студент, не получивший положительной аттестации по индивидуальному заданию, не допускается к сдаче экзамена по данной дисциплине.

4.2. Варианты индивидуального задания № 1 «Неопределенный интеграл»

Вариант 1

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^6}};$

1.2. $\int \sin(2x+3)dx;$

1.3. $\int \frac{dx}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}};$

1.4. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}};$

1.5. $\int \frac{2^{\arctg 2x} dx}{1+4x^2};$

1.6. $\int \operatorname{ctg}^2 2x dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\cos^2(2x-1)};$

1.8. $\int \frac{3x-4}{x^2-4} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (6x-2) \cos 3x dx;$

2.2. $\int \ln(2x+1) dx;$

2.3. $\int \arctg 7x dx;$

2.4. $\int x^2 \cdot 5^{-x/2} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(3x+1)dx}{x^2+2x+5};$

3.2. $\int \frac{(x-8)dx}{x(x-2)^2};$

3.3. $\int \frac{(3x-10)dx}{(x+2)(x^2+4)};$

3.4. $\int \frac{2x^2-11x+3}{x^2-5x+4} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^2 3x \cdot \cos^3 3x dx;$

4.2. $\int \sin 3x \cdot \cos 10x dx;$

4.3. $\int \operatorname{tg}^5 \frac{x}{2} dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{2-3\sin x};$

4.5. $\int \sin^2 5x \cdot \cos^2 5x dx.$

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}};$

5.2. $\int \frac{(x+1)dx}{x \cdot \sqrt{x-2}};$

5.3. $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx;$

5.4. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[5]{x}} dx.$

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{6+4x-x^2}};$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 4x \cdot \cos^2 4x};$

6.3. $\int \frac{x^3-3x^2-2x-7+\sqrt[4]{x}}{5x^2} dx;$

6.4. $\int 2^{\sqrt{x}} dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x-2}}{e^x-3} dx.$

Вариант 2

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{7x-5}};$

1.2. $\int \sin(3x-5) dx;$

1.3. $\int \frac{dx}{x(1-\ln x)};$

1.4. $\int \frac{3x^3}{x^8+4} dx;$

1.5. $\int e^{\operatorname{tg} 2x} \frac{dx}{\cos^2 2x};$

1.6. $\int \operatorname{ctg}^2 3x dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\sin^2(1-2x)};$

1.8. $\int \frac{5x+3}{4-x^2} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (1-x) \cos 2x dx;$

2.2. $\int \ln(2x-1) dx;$



2.3. $\int \operatorname{arctg} 7x dx$;

2.4. $\int x^2 4^{\frac{x}{2}} dx$.

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(5x+2)dx}{x^2-2x+2}$;

3.2. $\int \frac{(5x-11)dx}{(x-1)^2(x-2)}$;

3.3. $\int \frac{(11x-4)dx}{(x^2+4)(x-4)}$;

3.4. $\int \frac{2x^2-x-13}{x^2-x-2} dx$.

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^3 3x \cdot \cos^2 3x dx$;

4.2. $\int \cos x \cdot \cos 3x dx$;

4.3. $\int \operatorname{tg}^5 \frac{x}{3} dx$;

4.4. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

4.5. $\int \sin^2 2x \cdot \cos^2 2x dx$.

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}-\sqrt[6]{x^5}} dx$;

5.2. $\int \frac{(x-1)dx}{x\sqrt{x+2}}$;

5.3. $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$;

5.4. $\int x^{-2/3} \left(1+x^{1/2}\right)^{1/2} dx$.

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$;

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x \cdot \cos^2 5x}$;

6.3. $\int \frac{2x^3-x^2+7-3x+\sqrt[3]{x}}{3x^3} dx$;

6.4. $\int 2^{-\sqrt{x}} dx$;

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x+2}}{e^x-3} dx$.

Вариант 3

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$;

1.2. $\int \cos(2-5x) dx$;

1.3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x (2 \operatorname{tg} x + 1)}$;

1.4. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1+\ln^2 x}}$;

1.5. $\int e^{x^5} \cdot x^4 dx$;

1.6. $\int \operatorname{tg}^2 3x dx$;

1.7. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+5)}$;

1.8. $\int \frac{2x+1}{x^2-9} dx$.



2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (2x + 5) \sin 3x \, dx$;

2.2. $\int \ln(1 - 2x) \, dx$;

2.3. $\int \arcsin 2x \, dx$;

2.4. $\int x^2 3^{\frac{x}{2}} \, dx$.

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(3x - 2) \, dx}{x^2 - 6x + 10}$;

3.2. $\int \frac{(3x + 2) \, dx}{x(x + 1)^2}$;

3.3. $\int \frac{(3x - 7) \, dx}{(x^2 + 4)(x + 1)}$;

3.4. $\int \frac{(3x^2 - 13x - 4) \, dx}{x^2 - 4x - 5}$.

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 2x \, dx$;

4.2. $\int \sin x \cdot \sin 5x \, dx$;

4.3. $\int \operatorname{ctg}^5 \frac{x}{3} \, dx$;

4.4. $\int \frac{dx}{2 - 3 \cos x}$.

4.5. $\int \sin^2 4x \cdot \cos^2 4x \, dx$;

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}$;

5.2. $\int \frac{(x - 2) \, dx}{x\sqrt{x + 3}}$;

5.3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} \, dx$;

5.4. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2 - 4} \, dx}{x^2}$.

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(2x - 8) \, dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$;

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 11x \cdot \cos^2 11x}$;

6.3. $\int \frac{7x^4 - x^6 - 3x - 6 + \sqrt[4]{x^3}}{2x^5} \, dx$;

6.4. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$;

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x - 2}}{e^x + 3} \, dx$.

Вариант 4

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int (3 - 2x)^{64} \, dx$;

1.2. $\int \cos(1 - 3x) \, dx$;

1.3. $\int \frac{e^{2x} \, dx}{1 + 3e^{2x}}$;

1.4. $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{x^8 - 1}}$;

1.5. $\int e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{dx}{x^2};$

1.6. $\int \operatorname{tg}^2 2x dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\cos^2(5x+3)};$

1.8. $\int \frac{7x+2}{9-x^2} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (4x+1) \sin 2x dx;$

2.2. $\int \ln(2-3x) dx;$

2.3. $\int \arccos 2x dx;$

2.4. $\int x^2 2^{\frac{x}{2}} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(5x+1)dx}{x^2+4x+5};$

3.2. $\int \frac{(7x+11)dx}{(x+1)^2(x-2)};$

3.3. $\int \frac{(3x+15)dx}{(x+1)(x^2+5)};$

3.4. $\int \frac{3x^2-2x-31}{x^2-x-6} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^2 5x \cdot \cos^3 5x dx;$

4.2. $\int \sin 4x \cdot \sin 6x dx;$

4.3. $\int \operatorname{ctg}^5 \frac{x}{2} dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{4 \sin x + 5}.$

4.5. $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx.$

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})};$

5.2. $\int \frac{(x-3)dx}{x \cdot \sqrt{x+2}};$

5.3. $\int x^2 \sqrt{16-x^2} dx;$

5.4. $\int \frac{\sqrt{x^2-4} dx}{\sqrt[3]{x}}.$

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}};$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 7x \cdot \cos^2 7x};$

6.3. $\int \frac{x^8 - 5x^7 + 6 - 3x^6 + \sqrt[4]{x^{10}}}{2x^7} dx;$

6.4. $\int \operatorname{arcctg} \sqrt{x} dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x-1}}{e^x+1} dx.$

Вариант 5

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1} dx;$

1.2. $\int \sin(2 - 4x) dx;$

1.3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (3 + 2 \operatorname{tg} x)};$

1.4. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1 - x^{10}}};$

1.5. $\int 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}};$

1.6. $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\cos^2(2 - 5x)};$

1.8. $\int \frac{3x - 1}{16 - x^2} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (3x + 1) \cos 2x dx;$

2.2. $\int \ln(2x - 3) dx;$

2.3. $\int \arccos 3x dx;$

2.4. $\int x^2 4^{-2x} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(4x + 1) dx}{x^2 - 2x + 17};$

3.2. $\int \frac{(6x - 10) dx}{(x + 1)(x - 3)^2};$

3.3. $\int \frac{(3x + 1) dx}{(x^2 + 2)(x - 1)};$

3.4. $\int \frac{2x^2 + 12x + 19}{x^2 + 7x + 10} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^3 7x \cdot \cos^2 7x dx;$

4.2. $\int \cos 2x \cdot \cos 3x dx;$

4.3. $\int \operatorname{ctg}^5 4x dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}.$

4.5. $\int \sin^2 6x \cdot \cos^2 6x dx.$

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}};$

5.2. $\int \frac{(x + 2) dx}{x \cdot \sqrt{x - 3}};$

5.3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$

5.4. $\int x^{-1/4} \sqrt{1 - x^{2/3}} dx.$

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(x - 3) dx}{\sqrt{5 + 2x - x^2}};$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x \cdot \cos^2 3x};$

6.3. $\int \frac{x^3 - 5x^5 - 3x - 4 + \sqrt[3]{x^5}}{2x^4} dx;$

6.4. $\int 3^{\sqrt{x}} dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 2} dx.$

Вариант 6

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{\sqrt[4]{1 + \ln x}}{x} dx;$

1.2. $\int \cos(2x - 7) dx;$

1.3. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x \cdot (2 + \operatorname{ctg} 3x)};$

1.4. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^8}};$

1.5. $\int 2^{\cos 3x} \sin 3x dx;$

1.6. $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\sin^2(4x - 3)};$

1.8. $\int \frac{2x - 5}{x^2 + 16} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (4 - 2x) \sin 3x dx;$

2.2. $\int \ln(2 + 3x) dx$

2.3. $\int \arcsin 3x dx;$

2.4. $\int x^2 3^{-2x} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(3x + 2) dx}{x^2 + 8x + 17};$

3.2. $\int \frac{(x + 8) dx}{(x + 2)^2 (x - 1)};$

3.3. $\int \frac{(4x - 10) dx}{(x^2 + 2)(x + 2)};$

3.4. $\int \frac{3x^2 + 5x - 10}{x^2 + 2x - 8} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^3 9x \cdot \cos^2 9x dx;$

4.2. $\int \sin 5x \cdot \sin 9x dx;$

4.3. $\int \operatorname{ctg}^5 5x dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{2 + 3 \cos x}.$

4.5. $\int \sin^2 10x \cdot \cos^2 10x dx.$

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + x} dx;$

5.2. $\int \frac{(x + 3) dx}{x \cdot \sqrt{x - 2}};$

5.3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx;$

5.4. $\int x^5 \cdot \sqrt[3]{1 + x^4} dx.$

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{1-6x-x^2}};$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 2x \cdot \cos^2 2x};$

6.3. $\int \frac{x^6 - 7x^5 + 4 - 4x^9 + 2\sqrt[4]{x^3}}{3x^6} dx;$

6.4. $\int 3^{-\sqrt{x}} dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \sqrt{e^x + 1}}{e^x + 2} dx.$

Вариант 7

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{9 + e^{2x}}};$

1.2. $\int \cos(1 + 4x) dx;$

1.3. $\int \frac{dx}{\arcsin 2x \cdot \sqrt{1 - 4x^2}};$

1.4. $\int \frac{x dx}{\sqrt{3 - x^4}};$

1.5. $\int 5^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}};$

1.6. $\int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{5} dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\cos^2(3 + 2x)};$

1.8. $\int \frac{4x + 3}{16 + x^2} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (2 - x) \sin 5x dx;$

2.2. $\int \ln(4 - 5x) dx;$

2.3. $\int \operatorname{arctg} 2x dx;$

2.4. $\int x^2 e^{-2x} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(3x + 1) dx}{x^2 + 2x + 3};$

3.2. $\int \frac{(5x + 1) dx}{(x - 1)^2 (x + 2)};$

3.3. $\int \frac{(5x - 7) dx}{(x^2 + 2)(x + 3)};$

3.4. $\int \frac{2x^2 - 5x + 7}{x^2 - 4x + 3} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x dx;$

4.2. $\int \cos x \cdot \sin 7x dx;$

4.3. $\int \operatorname{tg}^5 5x dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}.$

4.5. $\int \sin^2 17x \cdot \cos^2 17x dx.$

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}}{(\sqrt{x}-x)\sqrt{x}} dx;$

5.2. $\int \frac{(x+1)dx}{x \cdot \sqrt{x+2}};$

5.3. $\int x^2 \sqrt{9-x^2} dx;$

5.4. $\int x^{-3} \cdot (1+x^3)^{-2/3} dx.$

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx;$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 6x \cdot \cos^2 6x};$

6.3. $\int \frac{x^2 - 2x^4 - 7x^3 - 3 + \sqrt[4]{x^3}}{5x^3} dx;$

6.4. $\int \sin \sqrt{x} dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x + 2}}{e^x - 1} dx.$

Вариант 8

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{\operatorname{tg} 2x dx}{\cos^2 2x};$

1.2. $\int \sin(2+3x) dx;$

1.3. $\int \frac{e^{5x} dx}{e^{5x} - 8};$

1.4. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}};$

1.5. $\int 2^{\ln x} \cdot \frac{dx}{x};$

1.6. $\int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\sin^2(4-7x)};$

1.8. $\int \frac{5x-1}{9+x^2} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (3x-4) \cos 5x dx;$

2.2. $\int \ln(5+3x) dx;$

2.3. $\int \operatorname{arc} \operatorname{ctg} 2x dx;$

2.4. $\int x^2 2^{-2x} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(5x-2)dx}{x^2-4x+5};$

3.2. $\int \frac{(3x-8)dx}{(x-2)^2(x-3)};$

3.3. $\int \frac{(4x+8)dx}{(x^2+3)(x-1)};$

3.4. $\int \frac{3x^2+2x-31}{x^2+x-6} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^3 10x \cdot \cos^2 10x dx;$

4.2. $\int \sin 3x \cdot \cos 2x dx;$



4.3. $\int \operatorname{tg}^5 4x dx$;

4.4. $\int \frac{dx}{3+5\sin x}$.

4.5. $\int \sin^2 13x \cdot \cos^2 13x dx$.

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+x} dx$;

5.2. $\int \frac{(x+2)dx}{x \cdot \sqrt{x+3}}$;

5.3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$;

5.4. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$.

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx$;

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 8x \cdot \cos^2 8x}$;

6.3. $\int \frac{x^3-3x^4-5x^6+3+2\sqrt[4]{x^3}}{9x^5} dx$;

6.4. $\int \cos \sqrt{x} dx$;

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x+3}}{e^x-2} dx$.

Вариант 9

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{x^3+4}}$;

1.2. $\int \cos(3-4x) dx$;

1.3. $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg} x \cdot (1+x^2)}$;

1.4. $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;

1.5. $\int 3^{\operatorname{ctg} x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}$;

1.6. $\int \operatorname{tg}^2 5x dx$;

1.7. $\int \frac{dx}{\sin^2(7+3x)}$;

1.8. $\int \frac{3x+4}{x^2-25} dx$.

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (2x-3) \cos 3x dx$;

2.2. $\int \ln(3-5x) dx$;

2.3. $\int \operatorname{arc} \operatorname{ctg} 3x dx$;

2.4. $\int x^2 4^{-3x} dx$.

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(4x+3)dx}{x^2-10x+29}$;

3.2. $\int \frac{(x-13)dx}{(x-1)^2(x+3)}$;



3.3. $\int \frac{(9x+4)dx}{(x^2+3)(x+2)};$

3.4. $\int \frac{3x^2+4x-34}{x^2+3x-10} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^3 11x \cdot \cos^2 11x dx;$

4.2. $\int \cos x \cdot \cos 5x dx;$

4.3. $\int \operatorname{ctg}^5 \frac{x}{6} dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{3\sin x + 2}.$

4.5. $\int \sin^2 7x \cdot \cos^2 7x dx.$

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt[3]{x})};$

5.2. $\int \frac{(x-1)dx}{x \cdot \sqrt{x-3}};$

5.3. $\int x^2 \sqrt{25-x^2} dx;$

5.4. $\int x^4 \cdot (1+2x^2)^{-2/3} dx.$

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{6-2x-x^2}};$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 12x \cdot \cos^2 12x};$

6.3. $\int \frac{x^3-4x-7x^2-2+\sqrt[3]{x^5}}{3x^2} dx;$

6.4. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x-3}}{e^x+2} dx.$

Вариант 10

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x + 1}};$

1.2. $\int \sin(4x+5) dx;$

1.3. $\int \frac{2^{9x} dx}{9-2^{9x}};$

1.4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx;$

1.5. $\int \frac{4^{\operatorname{arctg} 3x} dx}{1+9x^2};$

1.6. $\int \operatorname{ctg}^2 4x dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\cos^2(5-2x)};$

1.8. $\int \frac{4x-1}{x^2+25} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (3+5x) \sin 2x dx;$

2.2. $\int \ln(2x+5) dx;$

2.3. $\int \operatorname{arctg} 3x dx;$

2.4. $\int x^2 5^{-3x} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(3x+4)dx}{x^2-10x+29};$

3.2. $\int \frac{(x+4)dx}{(x+2)^2(x+3)};$

3.3. $\int \frac{(5x+18)dx}{(x^2+3)(x-4)};$

3.4. $\int \frac{2x^2+7x-25}{x^2+x-12}dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^3 4x \cdot \cos^2 4x dx;$

4.2. $\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx;$

4.3. $\int \operatorname{tg}^5 \frac{x}{4} dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{5-3\sin x}.$

4.5. $\int \sin^2 15x \cdot \cos^2 15x dx.$

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}};$

5.2. $\int \frac{(x-2)dx}{x \cdot \sqrt{x-3}};$

5.3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx;$

5.4. $\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{x^3}}dx.$

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{4-4x-x^2}};$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 9x \cdot \cos^2 9x};$

6.3. $\int \frac{x^5-3x^4+2-5x^3+\sqrt[3]{x^2}}{8x^4}dx;$

6.4. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{x+1}}dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x-3}}{e^x+1}dx.$

Вариант 11

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 2x}};$

1.2. $\int \cos(5x-1)dx;$

1.3. $\int \frac{dx}{x \cdot (5-\ln x)};$

1.4. $\int \frac{e^{3x}dx}{1+e^{6x}};$

1.5. $\int \frac{5^{\ln 2x}dx}{x};$

1.6. $\int \operatorname{ctg}^2 6x dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\sin^2(2-3x)};$

1.8. $\int \frac{7+3x}{25-x^2}dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (2 - 3x) \cos 5x dx$;

2.2. $\int \ln(3 - 2x) dx$;

2.3. $\int \arccos 5x dx$;

2.4. $\int x^2 3^{-3x} dx$.

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(5x - 1) dx}{x^2 + 6x + 10}$;

3.2. $\int \frac{(3x - 7) dx}{(x - 3)^2 (x - 2)}$;

3.3. $\int \frac{(7x - 26) dx}{(x^2 + 2)(x + 4)}$;

3.4. $\int \frac{2x^2 + 13x - 5}{x^2 + 3x - 4} dx$.

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^2 9x \cdot \cos^3 9x dx$;

4.2. $\int \sin 3x \cdot \cos 7x dx$;

4.3. $\int \operatorname{tg}^5 \frac{x}{7} dx$;

4.4. $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$.

4.5. $\int \sin^2 17x \cdot \cos^2 17x dx$.

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx$;

5.2. $\int \frac{(x - 1) dx}{x \cdot \sqrt{x - 2}}$;

5.3. $\int x^2 \sqrt{1 - 4x^2} dx$;

5.4. $\int x^{3/2} \cdot \sqrt{1 + x^{3/5}} dx$.

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(x + 4) dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$;

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 10x \cdot \cos^2 10x}$;

6.3. $\int \frac{x^5 - 5x^6 - 3x^7 - 5 + \sqrt[3]{x^5}}{2x^6} dx$;

6.4. $\int \sin \sqrt{x - 1} dx$;

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x + 1}}{e^x - 3} dx$.

Вариант 12

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{\sqrt{\ln(2x + 1)}}{2x + 1} dx$;

1.2. $\int \cos(4 - 3x) dx$;

1.3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (1 + 3 \operatorname{tg} x)}$;

1.4. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9 + e^{2x}}}$;

1.5. $\int 3^{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x-1}};$

1.6. $\int \operatorname{tg}^2 4x dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\sin^2(1+4x)};$

1.8. $\int \frac{3x+5}{1-4x^2} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (2-5x) \cos 4x dx;$

2.2. $\int \ln(2+5x) dx;$

2.3. $\int \arcsin 5x dx;$

2.4. $\int x^2 2^{-3x} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(3x+5)dx}{x^2+4x+8};$

3.2. $\int \frac{(3x+7)dx}{(x+3)^2(x+2)};$

3.3. $\int \frac{(5x+13)dx}{(x^2+5)(x-1)};$

3.4. $\int \frac{3x^2-7x-38}{x^2-2x-8} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^3 6x \cdot \cos^2 6x dx;$

4.2. $\int \sin 4x \cdot \cos 2x dx;$

4.3. $\int \operatorname{ctg}^5 \frac{x}{7} dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{5-4\sin x}.$

4.5. $\int \sin^2 14x \cdot \cos^2 14x dx.$

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{x^5}} dx;$

5.2. $\int \frac{(x+2)dx}{x \cdot \sqrt{x-5}};$

5.3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}} dx;$

5.4. $\int x^3 \cdot \sqrt[4]{1+x^3} dx.$

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(3x-6)dx}{\sqrt{10-6x-x^2}};$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 14x \cdot \cos^2 14x};$

6.3. $\int \frac{x^8-4x^6+5-3x^7+\sqrt[4]{x^7}}{6x^7} dx;$

6.4. $\int \operatorname{arcctg} \sqrt{x+1} dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x-1}}{e^x-3} dx.$

Вариант 13

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{x^2}{\sqrt[5]{(3+2x^3)^4}} dx;$

1.2. $\int \sin(5-2x) dx;$

1.3. $\int \frac{dx}{\arcsin 3x \cdot \sqrt{1-9x^2}};$

1.4. $\int \frac{dx}{x(1+\lg^2 x)};$

1.5. $\int \frac{7^{\sqrt{x+1}} dx}{\sqrt{x+1}};$

1.6. $\int \operatorname{tg}^2 6x dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\cos^2(5x-1)};$

1.8. $\int \frac{5x+4}{1-9x^2} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (2x+1) \sin 5x dx;$

2.2. $\int \ln(4x+1) dx;$

2.3. $\int \arcsin 4x dx;$

2.4. $\int x^2 4^{\frac{x}{3}} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(4x-5) dx}{x^2-8x+20};$

3.2. $\int \frac{(3x-4) dx}{(x-1)(x-2)^2};$

3.3. $\int \frac{(5x+8) dx}{(x^2+5)(x-2)};$

3.4. $\int \frac{2x^2-7x-3}{x^2-6x+5} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^2 7x \cdot \cos^3 7x dx;$

4.2. $\int \sin x \cdot \sin 3x dx;$

4.3. $\int \operatorname{ctg}^5 \frac{x}{4} dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{4+5 \cos x}.$

4.5. $\int \sin^2 9x \cdot \cos^2 9x dx.$

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[6]{x})};$

5.2. $\int \frac{(x-2) dx}{x \cdot \sqrt{x+1}};$

5.3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx;$

5.4. $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2+x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{4}} dx.$

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(2x+1) dx}{\sqrt{1-8x-x^2}};$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 17x \cdot \cos^2 17x};$

6.3. $\int \frac{3x - 5x^3 - 6x^2 - 1 + \sqrt[5]{x^3}}{11x^2} dx;$

6.4. $\int \cos \sqrt{x-1} dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$

Вариант 14

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx;$

1.2. $\int \sin(7x-4) dx;$

1.3. $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg} 5x \cdot (1+25x^2)};$

1.4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}};$

1.5. $\int 5^{1+\lg x} \cdot \frac{dx}{x};$

1.6. $\int \operatorname{ctg}^2 7x dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\cos^2(7x+2)};$

1.8. $\int \frac{4x+2}{x^2-81} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (3x+7) \sin 4x dx;$

2.2. $\int \ln(4x-1) dx;$

2.3. $\int \arccos 4x dx;$

2.4. $\int x^2 5^{\frac{x}{3}} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(4x-1) dx}{x^2-10x+26};$

3.2. $\int \frac{(6x+10) dx}{(x-1)(x+3)^2};$

3.3. $\int \frac{(3x+21) dx}{(x^2+5)(x+2)};$

3.4. $\int \frac{3x^2+x-38}{x^2-x-12} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^2 4x \cdot \cos^3 4x dx;$

4.2. $\int \cos 2x \cdot \cos 5x dx;$

4.3. $\int \operatorname{tg}^5 \frac{x}{5} dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{3\sin x + 5}.$

4.5. $\int \sin^2 20x \cdot \cos^2 20x dx.$

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x}+1)\sqrt[3]{x}};$

5.2. $\int \frac{(x-3) dx}{x \cdot \sqrt{x+1}};$

5.3. $\int x^2 \sqrt{1-9x^2} dx;$

5.4. $\int x^4 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx.$



6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(x-6)dx}{\sqrt{1+8x-x^2}};$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 18x \cdot \cos^2 18x};$

6.3. $\int \frac{x^6 - 3x^5 + 3 - 6x^4 + \sqrt[3]{x^5}}{2x^5} dx;$

6.4. $\int \sin \sqrt{x+1} dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x + 1}}{e^x - 1} dx.$

Вариант 15

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{\sqrt{\arctg 3x} dx}{1+9x^2};$

1.2. $\int \cos(6-5x)dx;$

1.3. $\int \frac{dx}{(x+1)(2-\ln(x+1))};$

1.4. $\int \frac{2^{3x} dx}{\sqrt{9+4^{3x}}};$

1.5. $\int \frac{4^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}};$

1.6. $\int \operatorname{ctg}^2 5x dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\sin^2(3-4x)};$

1.8. $\int \frac{7-2x}{81-x^2} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (3-2x) \cos 6x dx;$

2.2. $\int \ln(4-3x) dx;$

2.3. $\int \arctg 5x dx;$

2.4. $\int x^2 3^{\frac{x}{3}} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(5x+3)dx}{x^2-8x+17};$

3.2. $\int \frac{(2x-14)dx}{(x+1)(x-3)^2};$

3.3. $\int \frac{(5x+14)dx}{(x^2+4)(x-2)};$

3.4. $\int \frac{3x^2+15x+8}{x^2+4x+3} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^3 15x \cdot \cos^2 15x dx;$

4.2. $\int \sin 10x \cdot \sin 15x dx;$

4.3. $\int \operatorname{tg}^5 \frac{x}{8} dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{4+5 \sin x}.$

4.5. $\int \sin^2 16x \cdot \cos^2 16x dx.$



5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt[3]{x} - 5)};$

5.2. $\int \frac{(x+1)dx}{x \cdot \sqrt{x-3}};$

5.3. $\int x^2 \sqrt{1-25x^2} dx;$

5.4. $\int x^{-2/3} \sqrt{1+x^{1/3}} dx.$

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{2+6x-x^2}};$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 13x \cdot \cos^2 13x};$

6.3. $\int \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 3 + \sqrt[5]{x^2}}{8x^3} dx;$

6.4. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x+1} dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x - 2}}{e^x + 5} dx.$

Вариант 16

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{dx}{(\arccos x)^2 \sqrt{1-x^2}};$

1.2. $\int \sin(5+2x) dx;$

1.3. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 2x \cdot (1+3 \operatorname{th} 2x)};$

1.4. $\int \frac{dx}{x \sqrt{\lg^2 x - 4}};$

1.5. $\int 8^{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}};$

1.6. $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{5} dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\cos^2(3-5x)};$

1.8. $\int \frac{12x+5}{81+x^2} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (4x-5) \sin 6x dx;$

2.2. $\int \ln(5-4x) dx;$

2.3. $\int \operatorname{arc} \operatorname{ctg} 5x dx;$

2.4. $\int x^2 2^{\frac{x}{3}} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(3x-4)dx}{x^2+6x+13};$

3.2. $\int \frac{(7x+11)dx}{(x+3)^2(x-2)};$

3.3. $\int \frac{(3x-15)dx}{(x^2+3)(x+3)};$

3.4. $\int \frac{2x^2+x-37}{x^2-x+20} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^3 8x \cdot \cos^2 8x dx;$

4.2. $\int \sin 5x \cdot \cos 8x dx;$

4.3. $\int \operatorname{ctg}^5 3x dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{4-5\cos x}.$

4.5. $\int \sin^2 11x \cdot \cos^2 11x dx.$

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(3+\sqrt{x})};$

5.2. $\int \frac{(x+1)dx}{x \cdot \sqrt{x+3}};$

5.3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-25x^2}} dx$

5.4. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^3)^{4/3}}.$

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2-8x-x^2}};$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 21x \cdot \cos^2 21x};$

6.3. $\int \frac{x^7 - 5x^6 + 2 - 9x^8 + \sqrt[5]{x^{11}}}{4x^7} dx;$

6.4. $\int 5^{\sqrt{x+1}} dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x - 5}}{e^x + 2} dx.$

Вариант 17

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int (\cos x + 2)^{21} \cdot \sin x dx;$

1.2. $\int \cos(2-7x)dx;$

1.3. $\int \frac{5^{3x} dx}{1-5^{3x}};$

1.4. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^6};$

1.5. $\int \frac{e^{\arccos 2x} dx}{\sqrt{1-4x^2}};$

1.6. $\int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{3} dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\sin^2(7x-5)};$

1.8. $\int \frac{2x+7}{25x^2-1} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (3+2x) \sin 4x dx;$

2.2. $\int \ln(1-4x)dx;$

2.3. $\int \arcsin 7x dx;$

2.4. $\int x^2 4^{-5x} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(4x-3)dx}{x^2-4x+8};$

3.2. $\int \frac{(7x-4)dx}{(x-2)^2(x+3)};$

3.3. $\int \frac{(8x+4)dx}{(x^2+5)(x-3)};$

3.4. $\int \frac{3x^2 - x - 46}{x^2 - 2x - 15} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^2 10x \cdot \cos^3 10x dx;$

4.2. $\int \cos 3x \cdot \cos 7x dx;$

4.3. $\int \operatorname{tg}^5 3x dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{3-5\sin x}.$

4.5. $\int \sin^2 18x \cdot \cos^2 18x dx.$

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}}{(\sqrt{x}+x)\sqrt{x}} dx;$

5.2. $\int \frac{(x-1)dx}{x \cdot \sqrt{x+3}};$

5.3. $\int x^2 \sqrt{1-16x^2} dx;$

5.4. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{5-6x-x^2}};$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 19x \cdot \cos^2 19x};$

6.3. $\int \frac{x^7 - 5x^5 - 4x^3 - 2 + \sqrt[3]{x^8}}{2x^6} dx;$

6.4. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x + 2}}{e^x - 5} dx.$

Вариант 18

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt[4]{11+e^{3x}}};$

1.2. $\int \sin(5+6x) dx;$

1.3. $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg} 2x \cdot (1+4x^2)};$

1.4. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^8}};$

1.5. $\int 9^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{dx}{x^2};$

1.6. $\int \operatorname{tg}^2 7x dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\cos^2(2+3x)};$

1.8. $\int \frac{3x-8}{1+25x^2} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (5x-2) \cos 4x dx;$

2.2. $\int \ln(3x-2) dx;$

2.3. $\int \arccos 7x \, dx$;

2.4. $\int x^2 5^{-5x} \, dx$.

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(3x-5)dx}{x^2+10x+26}$;

3.2. $\int \frac{(3x+4)dx}{(x+1)(x+2)^2}$;

3.3. $\int \frac{(5x-11)dx}{(x^2+4)(x-3)}$;

3.4. $\int \frac{2x^2-12x+19}{x^2-7x+10} dx$.

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^3 5x \cdot \cos^2 5x \, dx$;

4.2. $\int \sin 2x \cdot \sin 4x \, dx$;

4.3. $\int \operatorname{ctg}^5 \frac{x}{6} \, dx$;

4.4. $\int \frac{dx}{3-5\cos x}$.

4.5. $\int \sin^2 19x \cdot \cos^2 19x \, dx$.

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[4]{x^3}} \, dx$;

5.2. $\int \frac{(x+2)dx}{x \cdot \sqrt{x-1}}$;

5.3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-16x^2}} \, dx$;

5.4. $\int x^{-1/3} \cdot \left(1+3x^{1/2}\right)^{1/5} \, dx$.

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3+8x-x^2}}$;

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 15x \cdot \cos^2 15x}$;

6.3. $\int \frac{x^2-3x^3-9x^4+1+\sqrt[5]{x^4}}{6x^4} \, dx$;

6.4. $\int \cos \sqrt{x+1} \, dx$;

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x+5}}{e^x-2} \, dx$.

Вариант 19

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{5-\ln x}}$;

1.2. $\int \sin(8-3x)dx$;

1.3. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x \cdot (7+\operatorname{ctg} 5x)}$;

1.4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^6}}$;

1.5. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 5x} dx}{1+25x^2}$;

1.6. $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{4} \, dx$;



1.7. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-7x)};$

1.8. $\int \frac{x+1}{4x^2-9} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (1-5x) \sin 6x dx;$

2.2. $\int \ln(2x-5) dx;$

2.3. $\int \operatorname{arctg} 4x dx;$

2.4. $\int x^2 3^{-5x} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(5x-3) dx}{x^2+8x+20};$

3.2. $\int \frac{(3x+2) dx}{(x+1)^2(x+2)};$

3.3. $\int \frac{(16x-1) dx}{(x^2+2)(x-5)};$

3.4. $\int \frac{3x^2+20x+34}{x^2+7x+12} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^2 8x \cdot \cos^3 8x dx;$

4.2. $\int \sin 2x \cdot \cos 4x dx;$

4.3. $\int \operatorname{ctg}^5 2x dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{5-4\cos x}.$

4.5. $\int \sin^2 12x \cdot \cos^2 12x dx.$

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}};$

5.2. $\int \frac{(x-3) dx}{x \cdot \sqrt{x-2}};$

5.3. $\int x^2 \sqrt{36-x^2} dx;$

5.4. $\int x^{1/2} \cdot \left(1-x^{1/3}\right)^{1/4} dx.$

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(x-5) dx}{\sqrt{3+6x-x^2}};$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 20x \cdot \cos^2 20x};$

6.3. $\int \frac{x-4x^2-9x^3+\sqrt[5]{x^7}-1}{5x^3} dx;$

6.4. $\int e^{\sqrt{2x+1}} dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x-5}}{e^x-3} dx.$

Вариант 20

1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{(\operatorname{ctg} x + 4)^{12}}{\sin^2 x} dx;$

1.2. $\int \cos(4 + 3x) dx;$

1.3. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 3x \cdot (13 + 5 \operatorname{th} 3x)};$

1.4. $\int \frac{3^{2x} dx}{1 + 9^{2x}};$

1.5. $\int \frac{7^{\lg x} dx}{x};$

1.6. $\int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{4} dx;$

1.7. $\int \frac{dx}{\sin^2(5 + 4x)};$

1.8. $\int \frac{1-x}{4-9x^2} dx.$

2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (3x - 1) \cos 6x dx;$

2.2. $\int \ln(3 + 4x) dx;$

2.3. $\int \operatorname{arctg} 4x dx;$

2.4. $\int x^2 2^{-5x} dx.$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int \frac{(4x + 5) dx}{x^2 - 6x + 13};$

3.2. $\int \frac{(3x - 19) dx}{(x + 2)(x - 3)^2};$

3.3. $\int \frac{(3x + 8) dx}{(x^2 + 3)(x - 2)};$

3.4. $\int \frac{2x^2 + 7x + 10}{x^2 + 3x + 2} dx.$

4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \sin^2 6x \cdot \cos^3 6x dx;$

4.2. $\int \sin x \cdot \cos 7x dx;$

4.3. $\int \operatorname{tg}^5 7x dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{4 - 5 \sin x}.$

4.5. $\int \sin^2 8x \cdot \cos^2 8x dx.$

5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[6]{x^7} - \sqrt[6]{x^5}} dx;$

5.2. $\int \frac{(x + 3) dx}{x \cdot \sqrt{x - 1}};$

5.3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} dx;$

5.4. $\int x^{1/3} \cdot \left(1 + 2x^{1/2}\right)^{2/3} dx.$

6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(x + 5) dx}{\sqrt{4 - 8x - x^2}};$

6.2. $\int \frac{dx}{\sin^2 16x \cdot \cos^2 16x};$

6.3. $\int \frac{x^2 - 3x - 8 + \sqrt[3]{x^5} + x^6}{7x^2} dx;$

6.4. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} dx;$

6.5. $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x + 5}}{e^x + 2} dx.$

**4.3. Решение типового варианта
и образец оформления индивидуального задания № 1****Вариант 0**

Задание 1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{4^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}};$

1.2. $\int \cos(3x-4) dx;$

1.3. $\int \frac{x^3 dx}{4+x^8};$

1.4. $\int \frac{\cos x \sin x dx}{1+\sin^2 x};$

1.5. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+4)};$

1.6. $\int \operatorname{tg}^2 31x dx;$

1.7. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{4-x^5}};$

1.8. $\int \frac{4-3x}{x^2+9} dx.$

Решение

1.1. $\int \frac{4^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{4^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{d(\arcsin x)}{1/\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \int 4^{\arcsin x} d(\arcsin x) = \frac{4^{\arcsin x}}{\ln 4} + C.$$

ОТВЕТ: $\int \frac{4^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4^{\arcsin x}}{\ln 4} + C.$

1.2. $\int \cos(3x-4) dx = \int \cos(3x-4) \cdot \frac{d(3x-4)}{3} =$

$$= \frac{1}{3} \int \cos(3x-4) d(3x-4) = \frac{1}{3} \sin(3x-4) + C.$$

ОТВЕТ: $\int \cos(3x-4) dx = \frac{1}{3} \sin(3x-4) + C.$

$$\begin{aligned} 1.3. \int \frac{x^3 dx}{4+x^8} &= \int \frac{x^3}{(2)^2 + (x^4)^2} \cdot \frac{d(x^4)}{4x^3} = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{2^2 + (x^4)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x^4}{2} + C = \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x^4}{2} + C. \end{aligned}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \frac{x^3 dx}{4+x^8} = \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x^4}{2} + C.$$

$$\begin{aligned} 1.4. \int \frac{\sin x \cos x dx}{1+\sin^2 x} &= \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} \cdot \frac{d(1+\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)'} = \\ &= \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} \cdot \frac{d(1+\sin^2 x)}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+\sin^2 x)}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln|1+\sin^2 x| + C. \end{aligned}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \frac{\sin x \cos x dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln|1+\sin^2 x| + C.$$

$$\begin{aligned} 1.5. \int \frac{dx}{\sin^2(3x+4)} &= \int \frac{1}{\sin^2(3x+4)} \cdot \frac{d(3x+4)}{3} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+4)}{\sin^2(3x+4)} + C = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}(3x+4) + C. \end{aligned}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \frac{dx}{\sin^2(3x+4)} = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}(3x+4) + C.$$

$$\begin{aligned} 1.6. \int \operatorname{tg}^2 31x dx &= \int \frac{\sin^2 31x}{\cos^2 31x} dx = \int \frac{1-\cos^2 31x}{\cos^2 31x} dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 31x} - \int \frac{\cos^2 31x}{\cos^2 31x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 31x} \cdot \frac{d(31x)}{31} - \int dx = \frac{1}{31} \int \frac{d(31x)}{\cos^2 31x} - x + C = \frac{1}{31} \operatorname{tg} 31x - x + C. \end{aligned}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \operatorname{tg}^2 31x dx = \frac{1}{31} \operatorname{tg} 31x - x + C.$$

$$\begin{aligned} 1.7. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{4-x^5}} &= \int (4-x^5)^{-1/3} \cdot x^4 \cdot \frac{d(4-x^5)}{-5x^4} = \\ &= -\frac{1}{5} \int (4-x^5)^{-1/3} d(4-x^5) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{(4-x^5)^{2/3}}{2/3} + C = -\frac{3}{10} (4-x^5)^{2/3} + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{4-x^5}} = -\frac{3}{10}(4-x^5)^{2/3} + C.$

$$\begin{aligned} 1.8. \int \frac{4-3x}{x^2+9} dx &= \int \frac{4dx}{x^2+9} - \int \frac{3xdx}{x^2+9} = \\ &= 4 \int \frac{dx}{x^2+3^2} - \int \frac{3x}{x^2+9} \cdot \frac{d(x^2+9)}{2x} = \\ &= \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} + C = \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - \frac{3}{2} \ln|x^2+9| + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{4-3x}{x^2+9} dx = \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - \frac{3}{2} \ln|x^2+9| + C.$

Задание 2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (2-3x) \sin 2x dx;$

2.2. $\int \sqrt{x} \ln x dx;$

2.3. $\int x \operatorname{arctg} 2x dx;$

2.4. $\int (4-x) e^{x/3} dx.$

Решение

$$\begin{aligned} 2.1. \int (2-3x) \sin 2x dx &= \left| \begin{array}{l} u = 2-3x \Rightarrow du = -3dx \\ dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \\ &= (2-3x) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \cdot (-3) dx = \\ &= (2-3x) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) - \frac{3}{2} \int \cos 2x dx = \frac{3x-2}{2} \cdot \cos 2x - \frac{3}{4} \sin 2x + C. \\ \text{Ответ: } \int (2-3x) \sin 2x dx &= \frac{3x-2}{2} \cdot \cos 2x - \frac{3}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.2. \int \sqrt{x} \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \sqrt{x} dx \Rightarrow v = \int \sqrt{x} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} \end{array} \right| = \\ &= \ln x \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{3} \int x^{3/2} \cdot \frac{dx}{x} = \end{aligned}$$

$$= \ln x \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{3} \int x^{1/2} dx = \ln x \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \ln x \cdot x^{3/2} - \frac{4}{9} x^{3/2} + C.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{3} \ln x \cdot x^{3/2} - \frac{4}{9} x^{3/2} + C.$$

$$\mathbf{2.3.} \int x \operatorname{arctg} 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} 2x \Rightarrow du = \frac{2dx}{1+4x^2} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2dx}{1+4x^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2 dx}{1+4x^2} = \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \int \frac{4x^2 + 1 - 1}{1+4x^2} dx =$$

$$= \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1}{1+4x^2} \right) dx =$$

$$= \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+4x^2} dx =$$

$$= \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{1+(2x)^2} = \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} 2x + C$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int x \operatorname{arctg} 2x dx = \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} 2x + C.$$

$$\mathbf{2.4.} \int (4-x)e^{x/3} dx = \left| \begin{array}{l} u = 4-x \Rightarrow du = -dx \\ dv = e^{x/3} dx \Rightarrow v = \int e^{x/3} dx = 3e^{x/3} \end{array} \right| =$$

$$= 3(4-x)e^{x/3} - \int 3e^{x/3} (-dx) =$$

$$= 3(4-x)e^{x/3} + 3 \int e^{x/3} dx = 3(4-x)e^{x/3} + 9e^{x/3} + C.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int (4-x)e^{x/3} dx = 3(4-x)e^{x/3} + 9e^{x/3} + C.$$

Задание 3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

$$\mathbf{3.1.} \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-3x+4};$$

$$\mathbf{3.2.} \int \frac{(x+3)dx}{x(x+4)^2};$$

3.3. $\int \frac{(2x^2 + 3)dx}{(x+4)(x^2 + 5)};$

3.4. $\int \frac{4x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} dx.$

Решение

3.1. $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2 - 3x + 4};$

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{2x-1}{x^2 - 3x + 4}$ содержит в знаменателе квадратный трехчлен $(x^2 - 3x + 4)$. Поэтому интегрирование проводится по следующей схеме:

1) в квадратном трехчлене выделим полный квадрат

$$x^2 - 3x + 4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4};$$

2) введём новую переменная $u = x - 1,5$, откуда $x = u + 1,5$ и $dx = du$;

3) в исходном интеграле переходим к новой переменной:

$$\int \frac{(2x-1)dx}{x^2 - 3x + 4} = \int \frac{2(u+1,5)-1}{u^2 + 1,75} du = \int \frac{2u+3-1}{u^2 + 1,75} du = \int \frac{2u+2}{u^2 + 1,75} du;$$

4) разбиваем последний интеграл на два интеграла, один из которых табличный, а второй приводится к табличному подведением под знак дифференциала:

$$\begin{aligned} \int \frac{2u+2}{u^2 + 1,75} du &= \int \frac{2udu}{u^2 + 1,75} + \int \frac{2du}{u^2 + 1,75} = \int \frac{2u}{u^2 + 1,75} \cdot \frac{d(u^2 + 1,75)}{2u} + \\ &+ 2 \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{1,75})^2} = \int \frac{d(u^2 + 1,75)}{u^2 + 1,75} + \frac{2}{\sqrt{1,75}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1,75}} + C = \\ &= 2 \ln |u^2 + 1,75| + \frac{2}{\sqrt{1,75}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1,75}} + C; \end{aligned}$$

5) возвращаемся к старой переменной:

$$\begin{aligned} 2 \ln |u^2 + 1,75| + \frac{2}{\sqrt{1,75}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1,75}} + C &= \\ = 2 \ln |(x-1,5)^2 + 1,75| + \frac{2}{\sqrt{1,75}} \operatorname{arctg} \frac{x-1,5}{\sqrt{1,75}} + C; \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{(2x-1)dx}{x^2 - 3x + 4} = 2 \ln |(x-1,5)^2 + 1,75| + \frac{2}{\sqrt{1,75}} \operatorname{arctg} \frac{x-1,5}{\sqrt{1,75}} + C.$$

$$3.2. \int \frac{(x+3)dx}{x(x+4)^2};$$

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{x+3}{x(x+4)^2}$ является правильной рациональной дробью. Для интегрирования такой дроби ее необходимо разложить на сумму простых дробей:

$$\frac{x+3}{x(x+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{(x+4)^2}. \quad (*)$$

Найдем теперь неопределенные коэффициенты A, B и C . Для этого приводим дроби, стоящие в правой части равенства $(*)$ к общему знаменателю:

$$\frac{x+3}{x(x+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{(x+4)^2} = \frac{A(x+4)^2 + Bx(x+4) + Cx}{x(x+4)^2}.$$

Из равенства двух дробей с одинаковыми знаменателями следует и равенство их числителей

$$x+3 = A(x+4)^2 + Bx(x+4) + Cx.$$

Это равенство справедливо для любых значений x . Для нахождения трех неопределенных коэффициентов можно в полученное равенство подставить любые три значения x и получить систему из трех уравнений с тремя неизвестными A, B и C . Возьмем $x=0, x=-4$ и $x=-3$.

Получим

$$x=0: \quad 3=16A \Rightarrow A=\frac{3}{16},$$

$$x=-4: \quad -1=-4C \Rightarrow C=\frac{1}{4};$$

$$x=-3: \quad 0=A-3B-3C \Rightarrow \frac{3}{16}-3B-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow B=-\frac{3}{16}.$$

Найденные коэффициенты подставим в разложение дроби и найдем интегралы:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+3)dx}{x(x+4)^2} &= \frac{3}{16} \int \frac{dx}{x} - \frac{3}{16} \int \frac{dx}{x+4} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x+4)^2} dx = \\ &= \frac{3}{16} \ln|x| - \frac{3}{16} \ln|x+4| - \frac{1}{4(x+4)} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{(x+3)dx}{x(x+4)^2} = \frac{3}{16} \ln|x| - \frac{3}{16} \ln|x+4| - \frac{1}{4(x+4)} + C.$$

3.3. $\int \frac{(2x^2 + 3)dx}{(x + 4)(x^2 + 5)};$

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{(x + 4)(x^2 + 5)}$ является правильной рациональной дробью, поэтому находим интеграл по той же схеме, что и в 3.2.

$$\frac{2x^2 + 3}{(x + 4)(x^2 + 5)} = \frac{A}{x + 4} + \frac{Bx + C}{x^2 + 5} = \frac{A(x^2 + 5) + (Bx + C)(x + 4)}{(x + 4)(x^2 + 5)} \Rightarrow$$

$$2x^2 + 3 = A(x^2 + 5) + (Bx + C)(x + 4) \Rightarrow$$

$$x = -4: \quad 35 = 20A \Rightarrow A = \frac{7}{4};$$

$$x = 0: \quad 3 = 5A + 4C \Rightarrow 3 = 5 \cdot \frac{7}{4} + 4C \Rightarrow C = -\frac{13}{16};$$

$$x = -3: \quad 21 = 14A - 3B + C \Rightarrow 14 \cdot \frac{7}{4} - 3B - \frac{13}{16} = 21 \Rightarrow B = \frac{43}{48}.$$

В результате получаем:

$$\int \frac{(2x^2 + 3)dx}{(x + 4)(x^2 + 5)} = \int \frac{7/4}{x + 4} dx + \int \frac{43x/48 - 13/16}{x^2 + 5} dx = \frac{7}{4} \int \frac{dx}{x} + \frac{43}{48} \int \frac{x dx}{x^2 + 5} -$$

$$- \frac{13}{16} \int \frac{dx}{x^2 + 5} = \frac{7}{4} \ln|x| + \frac{43}{48} \int \frac{x}{x^2 + 5} \cdot \frac{d(x^2 + 5)}{2x} - \frac{13}{16} \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{5})^2} + C =$$

$$= \frac{7}{4} \ln|x| + \frac{43}{98} \ln|x^2 + 5| - \frac{13}{16\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Ответ: $\int \frac{(2x^2 + 3)dx}{(x + 4)(x^2 + 5)} = \frac{7}{4} \ln|x| + \frac{43}{98} \ln|x^2 + 5| - \frac{13}{16\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$

3.4. $\int \frac{4x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} dx.$

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{4x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}$ является неправильной рациональной дробью, поэтому сначала выделим целую часть (путем деления числителя на знаменатель) и представим дробь в виде суммы целой части и правильной дроби:

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 2x - 1 \Big| x^2 + 2x - 1 \\ \underline{4x^2 + 8x - 4} \\ -6x + 3 \end{array}$$

В итоге получаем $\frac{4x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} = 4 + \frac{-6x + 3}{x^2 + 2x - 1}$. Тогда исходный интеграл будет равен сумме интегралов:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} dx &= \int \left(4 + \frac{-6x + 3}{x^2 + 2x - 1} \right) dx = \int 4dx - 3 \int \frac{2x - 1}{x^2 + 2x - 1} dx = \\ &= 4x - 3 \int \frac{2x - 1}{x^2 + 2x - 1} dx + C. \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{2x - 1}{x^2 + 2x - 1} dx$ разложим знаменатель подынтегральной дроби на множители:

$$x^2 + 2x - 1 = (x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2}).$$

Тогда дробь можно представить в виде суммы двух простых дробей:

$$\frac{2x - 1}{x^2 + 2x - 1} = \frac{2x - 1}{(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})} = \frac{A}{x + 1 - \sqrt{2}} + \frac{B}{x + 1 + \sqrt{2}}.$$

Найдем коэффициенты A и B .

$$\begin{aligned} \frac{2x - 1}{(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})} &= \frac{A}{x + 1 - \sqrt{2}} + \frac{B}{x + 1 + \sqrt{2}} = \\ &= \frac{A(x + 1 + \sqrt{2}) + B(x + 1 - \sqrt{2})}{(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2x - 1 = A(x + 1 + \sqrt{2}) + B(x + 1 - \sqrt{2})$$

$$x = -1 - \sqrt{2}: \quad -2 - 2\sqrt{2} - 1 = -2\sqrt{2}B \Rightarrow B = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}};$$

$$x = -1 + \sqrt{2}: \quad -2 + 2\sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}A \Rightarrow A = \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}};$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{2x - 1}{x^2 + 2x - 1} dx &= \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{x + 1 - \sqrt{2}} + \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{x + 1 + \sqrt{2}} = \\ &= \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \ln|x + 1 - \sqrt{2}| + \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \ln|x + 1 + \sqrt{2}| + C. \end{aligned}$$

Суммируя полученные результаты, окончательно получаем:

$$\int \frac{4x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} dx = 4x + \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \ln|x + 1 - \sqrt{2}| + \\ + \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \ln|x + 1 + \sqrt{2}| + C$$

Ответ: $\int \frac{4x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} dx = 4x + \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \ln|x + 1 - \sqrt{2}| + \\ + \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \ln|x + 1 + \sqrt{2}| + C.$

Задание 4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx;$

4.2. $\int \sin 5x \cdot \cos 8x dx;$

4.3. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx;$

4.4. $\int \frac{dx}{3 - 2\cos x};$

4.5. $\int \sin^4 2x \cdot \cos^2 2x dx.$

Решение

4.1. $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx;$

Преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$f(x) = \cos^4 x \cdot \sin^3 x = \cos^4 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x = \cos^4 x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x.$$

При этом было использовано основное тригонометрическое тождество.

$$\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx = \int \cos^4 x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x dx = \\ = \int \cos^4 x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \cdot \frac{d(\cos x)}{-\sin x} = - \int \cos^4 x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot d(\cos x) = \\ = - \int \cos^4 x \cdot d(\cos x) + \int \cos^6 x \cdot d(\cos x) = - \frac{(\cos x)^5}{5} + \frac{(\cos x)^7}{7} + C.$$

Ответ: $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx = - \frac{(\cos x)^5}{5} + \frac{(\cos x)^7}{7} + C.$

4.2. $\int \sin 5x \cdot \cos 8x dx = \left| \sin 5x \cdot \cos 8x = \frac{1}{2} [\sin 13x - \sin 3x] \right| = \\ = \frac{1}{2} \int \sin 13x dx - \frac{1}{2} \int \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int \sin 13x \cdot \frac{d(13x)}{13} - \frac{1}{2} \int \sin 3x \cdot \frac{d(3x)}{3} =$

$$= -\frac{1}{26}\cos 13x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

$$\text{Ответ: } \int \sin 5x \cdot \cos 8x dx = -\frac{1}{26}\cos 13x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

$$4.3. \int \operatorname{ctg}^5 x dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = t, \\ dt = -\frac{dt}{t^2 + 1} \end{array} \right| = -\int \frac{t^5}{t^2 + 1} dt.$$

После указанной подстановки интегрирование тригонометрической функции свелось к интегрированию рациональной функции. Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Путем деления числителя дроби на знаменатель представим эту дробь в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби:

$$\frac{t^5}{t^2 + 1} = t^3 - t + \frac{t}{t^2 + 1}.$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^5 x dx &= -\int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt = \\ &= -\int t^3 dt + \int t dt - \int \frac{t dt}{t^2 + 1} = -\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \int \frac{t}{t^2 + 1} \cdot \frac{d(t^2 + 1)}{2t} = \\ &= -\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} = -\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |t^2 + 1| + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старой переменной, окончательно получаем:

$$\int \operatorname{ctg}^5 x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln |1 + \operatorname{ctg}^2 x| + C.$$

$$\text{Ответ: } \int \operatorname{ctg}^5 x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln |1 + \operatorname{ctg}^2 x| + C.$$

$$\begin{aligned} 4.4. \int \frac{dx}{3 - 2\cos x} &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, dt = \frac{2dt}{t^2 + 1}, \\ \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{t^2 + 1}}{3 - \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}} = 2 \int \frac{dt}{4t^2 + 2} = \\ &= \frac{2}{4} \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{0,5})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{0,5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{0,5}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{0,5}} \right) + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{dx}{3-2\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{0,5}} \right) + C.$

4.5. $\int \sin^4 2x \cdot \cos^2 2x dx.$

Для вычисления этого интеграла используем формулы понижения степени:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Получим

$$\begin{aligned} \int \sin^4 2x \cdot \cos^2 2x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 4x)(1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x - \cos^2 4x + \cos^3 4x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx - \frac{1}{8} \int \cos^2 4x dx + \frac{1}{8} \int \cos^3 4x dx = \\ &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \int \cos 4x \frac{d(4x)}{4} - \frac{1}{8} \int \frac{1 + \cos 8x}{2} dx + \frac{1}{8} \int \cos^2 4x \cdot \cos 4x dx = \\ &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{16} (x + \sin 8x) + \frac{1}{8} \int \frac{(1 - \sin^2 4x) \cdot \cos 4x d(\sin 4x)}{4 \cos 4x} = \\ &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{16} (x + \sin 8x) + \frac{1}{32} \left(\sin 4x - \frac{\sin^3 4x}{3} \right) + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \sin^4 2x \cdot \cos^2 2x dx =$

$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{16} (x + \sin 8x) + \frac{1}{32} \left(\sin 4x - \frac{\sin^3 4x}{3} \right) + C.$$

Задание 5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}} dx;$

5.2. $\int \frac{(2-x)dx}{x \cdot \sqrt{x+1}};$

5.3. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}};$

5.4. $\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{2-x^3}}.$

Решение

5.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}} dx.$

В подобных интегралах избавиться от иррациональности можно, введя вместо переменной x новую переменную t . Эти переменные связаны равенством $x = t^p$, причем степень p должна быть такой, чтобы извлекались корни всех степеней, входящих в подынтегральную функцию.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}} dx &= \left| \begin{array}{l} x = t^{12} \Rightarrow t = \sqrt[12]{x} \\ dx = 12t^{11} dt \end{array} \right| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11}}{t^8 + t^3} dt = 12 \int \frac{t^{17} dt}{t^3(t^5 + 1)} = \\ &= 12 \int \frac{t^{14} dt}{t^5 + 1} = 12 \int \left(t^9 - t^4 + \frac{t^4}{t^5 + 1} \right) dt = 12 \int t^9 dt - 12 \int t^4 dt + \\ &+ 12 \int \frac{t^4}{t^5 + 1} \cdot \frac{d(t^5 + 1)}{5t^4} = 12 \cdot \frac{t^{10}}{10} - 12 \cdot \frac{t^5}{5} + \\ &+ \frac{12}{5} \int \frac{d(t^5 + 1)}{t^5 + 1} + C = 1,2t^{10} - 2,4t^5 + 2,4 \ln|t^5 + 1| + C = \\ &= 1,2x\sqrt[12]{x^{10}} - 2,4\sqrt[12]{x^5} + 2,4 \ln|\sqrt[12]{x^5} + 1| + C. \end{aligned}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}} dx = 1,2x\sqrt[12]{x^{10}} - 2,4\sqrt[12]{x^5} + 2,4 \ln|\sqrt[12]{x^5} + 1| + C.$$

$$\begin{aligned} 5.2. \int \frac{(2-x)dx}{x \cdot \sqrt{x+1}} &= \left| \begin{array}{l} x+1 = t^2 \Rightarrow \\ x = t^2 - 1 \Rightarrow \\ dx = 2tdt, \\ t = \sqrt{x+1} \end{array} \right| = \int \frac{(2-t^2+1) \cdot 2tdt}{(t^2-1) \cdot t} = -2 \int \frac{t^2-3}{t^2-1} dt = \\ &= -2 \int \frac{(t^2-1)-2}{t^2-1} dt = -2 \int \frac{t^2-1}{t^2-1} dt + 4 \int \frac{dt}{t^2-1} dt = \\ &= -2 \int dt + 4 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \\ &= -2t + 2 \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = -2\sqrt{x+1} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \frac{(2-x)dx}{x \cdot \sqrt{x+1}} = -2\sqrt{x+1} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C.$$

$$5.3. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Интегралы, содержащие радикалы вида $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ можно найти, используя следующие тригонометрические подстановки

$x = a \sin t$, $x = a \operatorname{tg} t$ и $x = \frac{a}{\cos t}$, соответственно.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \left| \begin{array}{l} x = 2 \sin t \Rightarrow \\ dx = 2 \cos t dt, \\ t = \arcsin(x/2) \end{array} \right| = \int \frac{4 \sin^2 t \cdot 2 \cos t dt}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} = \frac{8}{2} \int \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \\ &= 4 \int \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{\cos t} = 4 \int \sin^2 t dt = 4 \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 2 \int (1-\cos 2t) dt = \\ &= 2 \int dt - 2 \int \cos 2t \cdot \frac{d(2t)}{2} = 2t - \int \cos 2t d(2t) + C = 2t - \sin 2t + C = \\ &= 2 \arcsin \frac{x}{2} - \sin 2 \left(\frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \sin 2 \left(\frac{x}{2} \right) + C.$$

$$5.4. \int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{2-x^3}} = \int x^{-3} (2-x^3)^{-1/3} dx;$$

Интегрирование дифференциальных биномов, т.е. интегралов вида

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx$$

возможно только в трех случаях с помощью подстановок Чебышева:

1) p – целое число (подстановка $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей n и m);

2) $\frac{m+1}{n}$ – целое число (подстановка $ax^n + b = t^s$, где s – знаменатель дроби p);

3) $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число (подстановка $\frac{ax^n + b}{x^n} = t^s$, где s – знаменатель дроби p).

Если числа m, n, p и их указанные комбинации не удовлетворяют ни одному из случаев, то интеграл от данного дифференциального би-

нома является «неберущимся», т.е. не выражается в элементарных функциях.

В нашем случае $m = -3, n = 3, p = -\frac{1}{3}$ и $\frac{m+1}{n} + p = -1$ целое число.

Поэтому для вычисления интеграла используем подстановку 3.

$$\int x^{-3} (2-x)^{-1/3} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{2-x^3}{x^3} = t^3 \Rightarrow \\ x^3 = 2(t^3+1)^{-1} \Rightarrow \\ x = \sqrt[3]{2}(t^3+1)^{-1/3} \Rightarrow \\ dx = -\sqrt[3]{2} \cdot t^2 (t^3+1)^{-4/3} dt \Rightarrow \\ (2-x^3)^{-1/3} = t^{-1} (\sqrt[3]{2})^{-1} (t^3+1)^{1/3} \end{array} \right| =$$
$$= -\int \sqrt[3]{2} \cdot t^2 \cdot (t^3+1)^{-4/3} \cdot 2^{-1} \cdot (t^3+1) \cdot t^{-1} \cdot 2^{-1/3} \cdot (t^3+1)^{1/3} \cdot dt =$$
$$= -\int \frac{t}{2} dt = -\frac{t^2}{4} + C = -\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2} + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{2-x^3}} = -\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2} + C.$

Задание 6. Найдите интегралы, используя различные приемы интегрирования:

6.1. $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}};$

6.2. $\int \frac{e^x+3}{e^{2x}-1} dx;$

6.3. $\int \frac{2x^4+x^3-3x^2+\sqrt[3]{x}}{2x^3} dx;$

6.4. $\int \cos \sqrt{x} dx;$

6.5. $\int \frac{dx}{e^x+4}.$

Решение

6.1. В интеграле $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$ подынтегральная функция содержит

квадратный трехчлен. Поэтому для его нахождения необходимо сначала выделить в квадратном трехчлене полный квадрат, а затем ввести новую переменную (см. 3.1).

$$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}} = \left| \begin{array}{l} x^2-6x+10 = (x-3)^2+1 \\ x-3=t \Rightarrow x=t+3 \Rightarrow dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{2(t+3)-1}{\sqrt{t^2+1}} dt =$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{2t+5}{\sqrt{t^2+1}} dt = \int \frac{2tdt}{\sqrt{t^2+1}} + 5 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \frac{d(t^2+1)}{2t} + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \\ &= \int \frac{d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}} + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = 2\sqrt{t^2+1} + \ln|t + \sqrt{t^2+1}| + C = \\ &= 2\sqrt{(x-3)^2+1} + \ln|x-3 + \sqrt{(x-3)^2+1}| + C. \\ \text{ОТВЕТ: } &\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}} = 2\sqrt{(x-3)^2+1} + \ln|x-3 + \sqrt{(x-3)^2+1}| + C. \end{aligned}$$

6.2. Интеграл $\int \frac{e^x+3}{e^{2x}-1} dx$ сводится к интегралу от рациональной функции в результате замены переменной

$$\int \frac{e^x+3}{e^{2x}-1} dx = \left| \begin{array}{l} e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right| = \int \frac{t+3}{t^2-1} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t+3}{t(t-1)(t+1)} dt =$$
$$\left| \begin{array}{l} \frac{t+3}{t(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+1} = \\ = \frac{A(t-1)(t+1) + Bt(t+1) + Ct(t-1)}{t(t-1)(t+1)}; \\ t+3 = A(t-1)(t+1) + Bt(t+1) + Ct(t-1) \\ t=0: \quad A=-3 \\ t=1: \quad B=2 \\ t=-1: \quad C=1 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} &= -3 \int \frac{dt}{t} + 2 \int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{dt}{t+1} = -3 \ln|t| + 2 \ln|t-1| + \ln|t+1| + C = \\ &= -3 \ln|e^x| + 2 \ln|e^x-1| + \ln|e^x+1| + C. \end{aligned}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \frac{e^x+3}{e^{2x}-1} dx = -3 \ln|e^x| + 2 \ln|e^x-1| + \ln|e^x+1| + C.$$

$$\begin{aligned} \text{6.3. } &\int \frac{2x^4+x^3-3x^2+\sqrt[3]{x}}{2x^3} dx = \int \frac{2x^4}{2x^3} dx + \int \frac{x^3}{2x^3} dx - \int \frac{3x^2}{x^3} dx + \int \frac{x^{1/3}}{x^3} dx = \\ &= \int x dx + \frac{1}{2} \int dx - 3 \int \frac{dx}{x} + \int x^{-8/3} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 3 \ln|x| + \frac{x^{-5/3}}{-5/3} + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{2x^4 + x^3 - 3x^2 + \sqrt[3]{x}}{2x^3} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 3\ln|x| - \frac{3x^{-5/3}}{5} + C.$

6.4. Интеграл $\int \cos \sqrt{x} dx$ в результате заменой переменной сводится к интегралу, для нахождения которого необходимо применить формулу интегрирования по частям.

$$\int \cos \sqrt{x} dx = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \Rightarrow \\ dx = 2t dt \\ t = \sqrt{x} \end{array} \right| = 2 \int t \cos t dt = \left| \begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \cos t dt \Rightarrow v = \sin t \end{array} \right| =$$

$$= 2t \sin t - 2 \int \sin t dt = 2t \sin t + 2 \cos t + C =$$

$$= 2\sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + C.$$

Ответ: $\int \cos \sqrt{x} dx = 2\sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + C.$

6.5. Интеграл $\int \frac{dx}{e^x + 4}$ также как и 6.2 сводится к интегралу от рациональной функции после замены переменной.

$$\int \frac{dx}{e^x + 4} = \left| \begin{array}{l} e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t(t+4)} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t} = \int \frac{dt}{(t+2)^2 - 4} =$$

$$= \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2 - 4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+2-2}{t+2+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t}{t+4} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 4} \right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{e^x + 4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 4} \right| + C.$

**4.4. Варианты индивидуального задания № 2
«Интегральное исчисление
функции одной и нескольких переменных»****Вариант 1**

1. Вычислить определенные интегралы:

1.1. $\int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx;$

1.2. $\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx;$

1.3. $\int_0^{16} \sqrt{256 - x^2} dx;$

1.4. $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x};$

1.5. $\int_{-5}^6 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \leq -3, \\ 2, & \text{если } -3 < x \leq 1, \\ e^{-x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

2.1. $y = (x-2)^3, y = 4x - 8;$

2.2. $\rho = 4 \cos 3\varphi, \rho \geq 2;$

2.3. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} x \geq 2.$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15};$

3.2. $\rho = 3e^{3\varphi/4}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$

3.3. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0$

4.1. вокруг Ox ;

4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_{-3}^1 \frac{dx}{x^2(1+x)(x+2)};$

5.2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}.$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 7x^2 + y$, ограниченной кривыми $x = 1, y = 0, y^2 = 4x (y \geq 0)$.

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями: $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0,$

$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x.$

Вариант 2

1. Вычислить определенные интегралы:

$$1.1. \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx;$$

$$1.2. \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2};$$

$$1.3. \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx;$$

$$1.4. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x};$$

$$1.5. \int_{-5}^6 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{если } x \leq -3, \\ 2, & \text{если } -3 < x \leq 1, \\ e^x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

$$2.1. y = x\sqrt{9 - x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 3); \quad 2.2. \rho = \cos 2\varphi, \rho \leq 1/2;$$

$$2.3. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \quad y = 2 \quad (y \geq 2).$$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

$$3.1. y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2;$$

$$3.2. \rho = 2e^{4\varphi/3}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$$

$$3.3. \begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $2x - x^2 - y = 0$, $2x^2 - 4x + y = 0$.

4.1. вокруг Ox ;

4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

$$5.1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(x+2)};$$

$$5.2. \int_{-3}^0 \frac{dx}{\ln |1-x|}.$$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = \frac{7}{2}x^2 + 5y$, ограниченной кривыми $x = 1$, $y = 0$, $y^2 = 5x$ ($y \geq 0$).

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями: $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.

Вариант 3

1. Вычислить определенные интегралы:

1.1. $\int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx;$

1.2. $\int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx;$

1.3. $\int_0^5 \frac{dx}{(25 + x^2) \sqrt{25 + x^2}};$

1.4. $\int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \cos x)};$

1.5. $\int_{-5}^3 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq -3, \\ 1 - 2x, & \text{если } -3 < x \leq 1, \\ -\sqrt{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

2.1. $y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x;$

2.2. $\rho = \sqrt{3} \cos \varphi, \quad \rho = \sin \varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2);$

2.3. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, \quad y \geq 4)$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 7/9;$

3.2. $\rho = \sqrt{2} e^\varphi, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2;$

3.3. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = 3 \sin x, \quad y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 4.1. вокруг Ox ;4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1};$

5.2. $\int_{-3}^0 \frac{\ln(1 - x)}{\sin x} dx.$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 7x^2 + 2y$, ограниченной кривыми $x = 2, \quad y = 0, \quad y^2 = 2x \quad (y \geq 0)$.7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями: $y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 8y + x^2 = 0, \quad y = x, \quad x = 0$.

Вариант 4

1. Вычислить определенные интегралы:

1.1. $\int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx;$

1.2. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4};$

1.3. $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}};$

1.4. $\int_{\pi/4}^{\arctg 3} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx;$

1.5. $\int_{-4}^3 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} x/3 & \text{если } x \leq -1, \\ 4, & \text{если } -1 < x \leq 0, \\ x^2/2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

2.1. $y = \sin x \cos^2 x, y = 0, (0 \leq x \leq \pi/2);$

2.2. $\rho = 4 \sin 3\varphi, \rho \geq 2;$

2.3. $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} x = 2 \quad (x \geq 2).$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$

3.2. $\rho = 5e^{5\varphi/12}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

3.3. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi.$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = 5 \cos x, y = \cos x, x = 0, x \geq 0$:

4.1. вокруг Ox ;

4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{(1+x)(3+x)};$

5.2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}.$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью

$\rho(x; y) = \frac{7}{2}x^2 + 6y^3$, ограниченной кривыми $x = 2, y = 0, y^2 = \frac{x}{2} (y \leq 0)$.

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями: $y^2 + x^2 - 4x = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$.

Вариант 5

1. Вычислить определенные интегралы:

1.1. $\int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx;$

1.2. $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx;$

1.3. $\int_0^{\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{(8 + \operatorname{tg} x)}{18 \sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx;$

1.4. $\int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5 - x^2)^3}};$

1.5. $\int_{-4}^5 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x \leq -1, \\ 2 - 4x, & \text{если } -1 < x \leq 2, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

2.1. $y = \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1;$

2.2. $\rho = 2 \cos \varphi, \quad \rho = 2\sqrt{3} \sin \varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2);$

2.3. $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} \quad y = 3 \quad (y \geq 3).$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y = -\ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/6;$

3.2. $\rho = 6e^{12\varphi/5}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2;$

3.3. $\begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sin^2 x, \quad x = \pi/2, \quad y = 0$:

4.1. вокруг Ox ;

4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^5 + 2};$

5.2. $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3} (2-x)^{1/2}}.$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 2x + 6y^3$, ограниченной кривыми $x = 1, y = 0, y = 4x^2$.

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями: $y^2 + x^2 - 4x = 0, \quad y^2 + x^2 - 8x = 0, \quad y = x, \quad y = \sqrt{3}x.$

Вариант 6

1. Вычислить определенные интегралы:

1.1. $\int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx;$

1.2. $\int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx;$

1.3. $\int_0^{\arccos \sqrt{2/3}} \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x - 3} dx;$

1.4. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx;$

1.5. $\int_{-1}^{10} f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{если } x \leq 0, \\ 0, & \text{если } 0 < x \leq 9, \\ 4\sqrt{x}, & \text{если } x > 9. \end{cases}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

2.1. $y = x^2 \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \quad (0 \leq x \leq 2);$

2.2. $\rho = \sin 3\varphi;$

2.3. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 3 \quad (0 < x < 4\pi, \quad y \geq 3).$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y = e^x + 6, \quad \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15};$

3.2. $\rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3;$

3.3. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций:

4.1. вокруг Ox : $x = \sqrt[3]{y-2}, \quad x=1, \quad y=1;$

4.2. вокруг Oy : $y = x^2 + 2x, \quad y=0.$

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(x-4)(x+4)x};$

5.2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^8 + 2}}.$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x; y) = ye^{xy/2}$, ограниченной кривыми $y = \ln 2, y = \ln 3, x = 2, x = 4$.

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями: $y^2 + x^2 - 4x = 0, \quad y^2 + x^2 - 8x = 0, \quad y = x,$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

Вариант 7

1. Вычислить определенные интегралы:

1.1. $\int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx;$

1.2. $\int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx;$

1.3. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$

1.4. $\int_{2\operatorname{arctg}(1/3)}^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)};$

1.5. $\int_{-3}^7 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{если } 0 < x \leq 4, \\ 1/\sqrt{x}, & \text{если } x > 4. \end{cases}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

2.1. $y = \cos x \sin^2 x, y = 0, (0 \leq x \leq \pi/2);$

2.2. $\rho = 6 \sin 3\varphi, \rho = 3 (\rho \geq 3);$

2.3. $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} x = 6\sqrt{3} (x \geq 6\sqrt{3}).$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, 1/4 \leq x \leq 1;$

3.2. $\rho = 4e^{4\varphi/3}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3;$

3.3. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \pi \leq t \leq 2\pi.$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций:

4.1. вокруг Ox : $y = xe^x, y = 0, x = 1;$

4.2. вокруг Oy : $y^2 + x^2 = 1, y = 0, x = 0.$

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^{10} + 2}};$

5.2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x-2} \sqrt{x+2}}.$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью

$\rho(x, y) = y \cos xy$, ограниченной кривыми $y = \frac{\pi}{2}, y = \pi, x = 1, x = 2.$

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями: $y^2 + x^2 - 4x = 0, y^2 + x^2 - 8x = 0, y = x, y = 0.$



Вариант 8

1. Вычислить определенные интегралы:

$$1.1. \int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx;$$

$$1.2. \int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx;$$

$$1.3. \int_{2\arctg(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2};$$

$$1.4. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}};$$

$$1.5. \int_{-2}^8 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} 3x - 4, & \text{если } x \leq 1, \\ 5, & \text{если } 4 < x \leq 1, \\ \sqrt{x^3}, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

$$2.1. y = \sqrt{e^x - 1}, \quad y = 0, \quad x = \ln 2;$$

$$2.2. \rho = \cos 3\varphi;$$

$$2.3. \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3}).$$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

$$3.1. y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \leq x \leq 3;$$

$$3.2. \rho = \sqrt{2}e^{\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3;$$

$$3.3. \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \end{cases} \quad \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$, $x = 0$:

$$4.1. \text{вокруг } Ox;$$

$$4.2. \text{вокруг } Oy.$$

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

$$5.1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2}};$$

$$5.2. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{x-1} \sqrt{x+1}}.$$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = y \sin xy$, ограниченной кривыми $y = \frac{\pi}{2}$, $y = \pi$, $x = 1$, $x = 2$.

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями: $y^2 + x^2 - 4x = 0$, $y^2 + x^2 - 8x = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

Вариант 9

1. Вычислить определенные интегралы:

1.1. $\int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx;$

1.2. $\int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1};$

1.3. $\int_{-\arctg(1/3)}^0 \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin 2x - 5 \cos 2x + 1} dx;$

1.4. $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2 - x^2)^{3/2}};$

1.5. $\int_{-5}^4 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x \leq -3, \\ 0, & \text{если } -3 < x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

2.1. $y = \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}, y = 0, x = 1, x = e^3;$

2.2. $\rho = \cos \varphi, \rho = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4), (-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2);$

2.3. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} y = 3 \quad (0 < x < 6\pi, y \geq 3).$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, 0 \leq x \leq 8/9;$

3.2. $\rho = 5e^{5\varphi/12}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3;$

3.3. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi/3.$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2, y = -x + 2$:

4.1. вокруг Ox ;

4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{32 - x^5}};$

5.2. $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt[4]{1 - x} \sqrt{x + 1}}.$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью

$$\rho(x; y) = x \sin xy, \text{ ограниченной кривыми } x = \frac{\pi}{2}, x = \pi, y = 1, y = 2.$$

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями: $y^2 + x^2 - 4x = 0, y^2 + x^2 - 8x = 0, y = x, x = 0$.



Вариант 10

1. Вычислить определенные интегралы:

1.1. $\int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx;$

1.2. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx;$

1.3. $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx;$

1.4. $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}};$

1.5. $\int_{-4}^2 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x \leq -2, \\ x^3, & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ 4, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

2.1. $y = \arccos x, y = 0, x = 0;$

2.2. $\rho = \sin \varphi, \rho = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4), (0 \leq \varphi \leq 3\pi/4);$

2.3. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} x = 4 \quad (x \geq 4).$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y = \ln(1 - x^2), 0 \leq x \leq 1/4;$ 3.2. $\rho = 12e^{12\varphi/5}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3;$

3.3. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi/3.$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1$:

4.1. вокруг Ox ;

4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2}};$

5.2. $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt[5]{x-1} \sqrt{(x+1)^3}}.$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x; y) = xe^{xy/2}$, ограниченной кривыми $x = \ln 2, x = \ln 3, y = 2, y = 4$.

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями: $y^2 + x^2 - 4x = 0, y^2 + x^2 - 2x = 0, y = x,$

$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x.$

Вариант 11

1. Вычислить определенные интегралы:

1.1. $\int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx;$

1.2. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx;$

1.3. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x - \cos x};$

1.4. $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx;$

1.5. $\int_{-10}^0 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} 5, & \text{если } x \leq -5, \\ x^2, & \text{если } -5 < x \leq -1, \\ 3 - x/4, & \text{если } x > -1. \end{cases}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

2.1. $y = (x + 1)^2, y^2 = x + 1;$

2.2. $\rho = 6 \cos 3\varphi, \rho = 3 \ (\rho \geq 3);$

2.3. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 3 \ (y \geq 3).$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y = 2 + \operatorname{ch} x, 0 \leq x \leq 1;$

3.2. $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi/3;$

3.3. $\rho = 1 - \sin \varphi, -\pi/2 \leq \varphi \leq -\pi/6.$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2, y^2 - x = 0$:

4.1. вокруг Ox ;4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5 + 32}};$

5.2. $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt[5]{(x-1)^4} \sqrt{x+1}}.$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью

$$\rho(x, y) = y^2 \cos 2xy, \text{ ограниченной кривыми } x = 0, y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, y = \frac{x}{2}.$$

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями: $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 16y + x^2 = 0, y = x,$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x.$$



Вариант 12

1. Вычислить определенные интегралы:

1.1. $\int_0^{2\pi} (1-8x^2) \cos 4x dx$

1.2. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx$

1.3. $\int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$

1.4. $\int_0^{\pi/2} \frac{(1+\cos x) dx}{1+\sin x + \cos x}$

1.5. $\int_{-4}^2 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} -x/4, & \text{если } x \leq -2, \\ 0, & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

2.1. $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3$; 2.2. $\rho = 1/2 + \sin \varphi$;

2.3. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} y = 9 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 9).$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \pi/6$;

3.2. $\rho = 2(1 - \cos \varphi), -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2$;

3.3. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \pi/2 \leq t \leq \pi.$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $x^2 + (y-2)^2 = 1$:

4.1. вокруг Ox ;

4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+8}}$;

5.2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^4} \sqrt{x+1}}$.

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью

$\rho(x; y) = 3y^2 \sin \frac{xy}{2}$, ограниченной кривыми $x = 0, y = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}, y = \frac{2}{3}x$.

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями: $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 16y + x^2 = 0,$
 $y = x, y = -\sqrt{3}x$.

Вариант 13

1. Вычислить определенные интегралы:

1.1. $\int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx;$

1.2. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\arctg x)^4}{1 + x^2} dx;$

1.3. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin dx}{1 + \sin x + \cos x};$

1.4. $\int_0^4 x^2 \sqrt{16 - x^2} dx;$

1.5. $\int_{-5}^5 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq -3, \\ 2x - 3, & \text{если } -3 < x \leq 3, \\ -x^2, & \text{если } x > 3. \end{cases}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

2.1. $y = x\sqrt{36 - x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 6);$

2.2. $\rho = \cos \varphi, \rho = \sin \varphi, (0 \leq \varphi \leq \pi/2);$

2.3. $\begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} x = 4 (x \geq 4).$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y = e^x + 13, \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24};$

3.2. $\rho = 3(1 + \sin \varphi), -\pi/6 \leq \varphi \leq 0;$

3.3. $\begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), \\ y = 2,5(1 - \cos t), \end{cases} \pi/2 \leq t \leq \pi.$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y = 1 - x^2, x = 0, x = \sqrt{y - 2}, x = 1$:4.1. вокруг Ox ;4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^4 - 1}};$

5.2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1} \cdot \sqrt{x+1}}.$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью

$\rho(x, y) = y^2 e^{-xy/2},$ ограниченной кривыми $x = 0, y = 1, y = \frac{x}{2}.$

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями: $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 + x^2 - 16x = 0.$

Вариант 14

1. Вычислить определенные интегралы:

1.1. $\int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx;$

1.2. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx;$

1.3. $\int_0^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)^2} dx;$

1.4. $\int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}};$

1.5. $\int_{-3}^3 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} 1 - x/3 & \text{если } x \leq -2, \\ 4, & \text{если } -2 < x \leq 1, \\ x^2/3, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

2.1. $x = \arccos y, x = 0, y = 0;$

2.2. $\rho = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4), \rho = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4), (\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4);$

2.3. $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} y = 4 \quad (y \geq 4).$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, 0 \leq x \leq 1/4;$

3.2. $\rho = 4(1 - \sin \varphi), 0 \leq \varphi \leq \pi/6;$

3.3. $\begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi/2.$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2, y = 1, x = 2$:

4.1. вокруг Ox ;

4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)^2};$

5.2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x - x^5}}.$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = y^2 \cos xy$, ограниченной кривыми $x = 0, y = \sqrt{\pi}, y = x$.

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной окружностью $y^2 - 4y + x^2 = 0$ вне круга $y^2 + x^2 = 4$.

Вариант 15

1. Вычислить определенные интегралы:

$$1.1. \int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx;$$

$$1.2. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$1.3. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x + \cos x};$$

$$1.4. \int_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2} dx;$$

$$1.5. \int_0^7 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} 3-x, & \text{если } x \leq 2, \\ 4x, & \text{если } 2 < x \leq 6, \\ 0, & \text{если } x > 6. \end{cases}$$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

$$2.1. y = \operatorname{arctg} x, \quad y = 0, \quad x = \sqrt{3}; \quad 2.2. \rho = \cos \varphi, \quad \rho = 2 \cos \varphi;$$

$$2.3. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 6 \quad (0 < x < 12\pi, \quad y \geq 6).$$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

$$3.1. y = 2 - e^x, \quad \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8};$$

$$3.2. \rho = 5(1 - \cos \varphi), \quad -\pi/3 \leq \varphi \leq 0;$$

$$3.3. \begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$:

4.1. вокруг Ox ;

4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

$$5.1. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(x^2+1)^5}};$$

$$5.2. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{(x-1)^6}}.$$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x; y) = 8ye^{4xy}$, ограниченной кривыми $y = \ln 3$, $y = \ln 4$, $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$.

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной окружностью $y^2 + x^2 - 4x = 0$ вне круга $y^2 + x^2 = 4$.

Вариант 16

1. Вычислить определенные интегралы:

$$1.1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx;$$

$$1.2. \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx;$$

$$1.3. \int_0^{2 \operatorname{arctg}(1/3)} \frac{\cos x dx}{(1 - \sin x)(1 + \cos x)};$$

$$1.4. \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx;$$

$$1.5. \int_2^{16} f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 3, \\ 0, & \text{если } 3 < x \leq 9, \\ 4/\sqrt{x}, & \text{если } x > 9. \end{cases}$$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

$$2.1. y = x^2 \sqrt{8 - x^2}, \quad y = 0, \quad (0 \leq x \leq 2\sqrt{2});$$

$$2.2. \rho = \sin \varphi, \quad \rho = 2 \sin \varphi;$$

$$2.3. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3}).$$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

$$3.1. y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 15/16;$$

$$3.2. \rho = 6(1 + \sin \varphi), \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq 0;$$

$$3.3. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sin(\pi x/2)$, $y = x^2$:

4.1. вокруг Ox ;

4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

$$5.1. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{1+x} dx}{x \cdot \sqrt[3]{(x+3)}};$$

$$5.2. \int_0^1 \frac{dx}{x \ln(x+1)}.$$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x; y) = y^2 e^{-xy/2}$, ограниченной кривыми $x = 0$, $y = 1$, $y = \frac{x}{4}$.

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной окружностью $y^2 + x^2 = 4$ вне круга $y^2 - 4y + x^2 = 0$

Вариант 17

1. Вычислить определенные интегралы:

1.1. $\int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx;$

1.2. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}};$

1.3. $\int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos x dx}{1 + \cos x - \sin x};$

1.4. $\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}};$

1.5. $\int_{-1}^6 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \leq 0, \\ x+1, & \text{если } 0 < x \leq 4, \\ \frac{2}{x}, & \text{если } x > 4. \end{cases}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

2.1. $x = \sqrt{e^y - 1}, \quad x = 0, \quad y = \ln 2;$

2.2. $\rho = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi;$

2.3. $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 2\sqrt{3} \quad (x \geq 2\sqrt{3}).$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y = 1 - \ln \sin x, \quad \pi/3 \leq x \leq \pi/2;$

3.2. $\rho = 7(1 - \sin \varphi), \quad -\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/6$

3.3. $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/6.$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = \arccos(x/3)$, $y = \arccos x$, $y = 0$:4.1. вокруг Ox ;4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_1^{\infty} \operatorname{arctg} x \, dx;$

5.2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - \cos^3 \sqrt{x}}.$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 8y + e^{2\sqrt{2}x^3}$, ограниченной кривыми $x = 2$, $y^2 = 2x$, $y = 0$ ($y \geq 0$).7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной окружностью $y^2 + x^2 - 4x = 0$ вне круга $y^2 + x^2 = 4$.

Вариант 18

1. Вычислить определенные интегралы:

$$1.1. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx;$$

$$1.2. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx;$$

$$1.3. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2};$$

$$1.4. \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x^4} dx;$$

$$1.5. \int_2^9 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ x/2, & \text{если } 4 < x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

$$2.1. y = x\sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \quad (0 \leq x \leq 2); \quad 2.2. \rho = 1/2 + \cos \varphi;$$

$$2.3. \begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 15 \quad (0 < x < 20\pi, \quad y \geq 15).$$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

$$3.1. y = 1 - \ln(x^2 - 1), \quad 3 \leq x \leq 4;$$

$$3.2. \rho = 8(1 - \cos \varphi), \quad -2\pi/3 \leq \varphi \leq 0;$$

$$3.3. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = \arcsin(x/5)$, $y = \arcsin x$, $y = \pi/2$:

4.1. вокруг Ox ;

4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

$$5.1. \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx;$$

$$5.2. \int_0^1 \frac{dx}{\ln(1 + \sqrt[3]{x})}.$$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = y^2 + e^x$, ограниченной кривыми $x = 2, y = 2x, y = 0$.

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной окружностью $y^2 - 4y + x^2 = 0$ вне круга $y^2 + x^2 - 4x = 0$.

Вариант 19

1. Вычислить определенные интегралы:

$$1.1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 5x^2) \sin x dx;$$

$$1.2. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$1.3. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2};$$

$$1.4. \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16 - x^2)\sqrt{16 - x^2}};$$

$$1.5. \int_{-6}^2 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} 2 - x/2, & \text{если } x \leq -4, \\ 3, & \text{если } -4 < x \leq 0, \\ x^3, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

$$2.1. y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}, \quad y = 0, \quad x = 1;$$

$$2.2. \rho = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi;$$

$$2.3. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 1 \quad (x \geq 1).$$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

$$3.1. y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5, \quad 1/9 \leq x \leq 1;$$

$$3.2. \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 3/4;$$

$$3.3. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$:

4.1. вокруг Ox ;

4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

$$5.1. \int_2^{\infty} \frac{x}{\ln x} dx;$$

$$5.2. \int_{-1}^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}.$$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 8y + x^2$, ограниченной кривыми $x = 1, y^2 = 16x, y = 0$ ($y \geq 0$).

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной окружностью $y^2 + x^2 - 4x = 0$ вне круга $y^2 - 4y + x^2 = 0$.

Вариант 20

1. Вычислить определенные интегралы:

$$1.1. \int_{\frac{\pi}{4}}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx;$$

$$1.2. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx;$$

$$1.3. \int_0^{2 \operatorname{arctg}(1/2)} \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos x (1 + \cos x)};$$

$$1.4. \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx;$$

$$1.5. \int_{-5}^0 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x \leq -4, \\ x - 1, & \text{если } -4 < x \leq -2, \\ x^2, & \text{если } x > -2. \end{cases}$$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

$$2.1. y = \frac{1}{1 + \cos x}, \quad y = 0, \quad x = \pi/2, \quad x = -\pi/2;$$

$$2.2. \rho = (5/2) \sin \varphi, \quad \rho = (3/2) \sin \varphi;$$

$$2.3. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \quad y = 4 \quad (y \geq 4).$$

3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

$$3.1. y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1, \quad 0 \leq x \leq 9/16;$$

$$3.2. \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 4/3;$$

$$3.3. \begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3.$$

4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $y = 0$:

4.1. вокруг Ox ;

4.2. вокруг Oy .

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

$$5.1. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x};$$

$$5.2. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^5 - 1}.$$

6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 8x + e^{2\sqrt{2y^3}}$, ограниченной кривыми $y = 2$, $x^2 = 2y$, $x = 0$ ($x \geq 0$).

7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями: $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 16y + x^2 = 0$, $y = -x$, $y = \sqrt{3}x$.

**4.5. Решение типового варианта
и образец оформления индивидуального задания № 2****Вариант 0****Задание 1.** Вычислить определенные интегралы:

1.1. $\int_{-2}^0 (x^2 - x) \cos 5x dx;$

1.2. $\int_0^1 \frac{(x^3 + 1) dx}{(x^4 + 4x + 1)^2};$

1.3. $\int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^2} dx;$

1.4. $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{\operatorname{tg} x - 5}{2 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx;$

1.5. $\int_{-3}^4 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} -3, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 3x - 4, & x > 1. \end{cases}$

Решение

1.1. $\int_{-2}^0 (x^2 - x) \cos 5x dx$

Подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена второго порядка на тригонометрическую функцию, следовательно, проинтегрируем ее по частям два раза.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 (x^2 - x) \cos 5x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 - x \Rightarrow du = (2x - 1) dx \\ dv = \cos 5x dx \Rightarrow v = \int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \sin 5x \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^2 - x}{5} \sin 5x \Big|_{-2}^0 - \frac{1}{5} \int_{-2}^0 (2x - 1) \sin 5x dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2 dx \\ dv = \sin 5x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{5} \cos 5x \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^2 - x}{5} \sin 5x \Big|_{-2}^0 - \frac{1}{5} \left(-\frac{2x - 1}{5} \cos 5x \Big|_{-2}^0 + \frac{2}{5} \int_{-2}^0 \cos 5x dx \right) = \\ &= 0 - \frac{(-2)^2 + 2}{5} \sin(-10) + \frac{2x - 1}{25} \cos 5x \Big|_{-2}^0 - \frac{2}{125} \sin 5x \Big|_{-2}^0 = \\ &= \frac{6}{5} \sin 10 + \frac{-1}{25} - \frac{-4 - 1}{25} \cos(-10) - \frac{2}{125} (\sin 0 - \sin(-10)) = \\ &= \frac{6}{5} \sin 10 - \frac{1}{25} + \frac{5}{25} \cos 10 - \frac{2}{125} \sin 10 = \frac{148}{125} \sin 10 + \frac{1}{5} \cos 10 - \frac{1}{25}. \end{aligned}$$

1.2.
$$\int_0^1 \frac{(x^3 + 1)dx}{(x^4 + 4x + 1)^2}$$

Заметим, что числитель является производной части знаменателя, поэтому используем метод подведения под знак дифференциала.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(x^3 + 1)dx}{(x^4 + 4x + 1)^2} &= \int_0^1 \frac{(x^3 + 1)d(x^4 + 4x + 1)}{(x^4 + 4x + 1)^2 (x^4 + 4x + 1)'} = \\ &= \int_0^1 \frac{(x^3 + 1)d(x^4 + 4x + 1)}{(x^4 + 4x + 1)^2 (4x^3 + 4)} = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d(x^4 + 4x + 1)}{(x^4 + 4x + 1)^2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^4 + 4x + 1} \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 + 4 + 1} - 1 \right) = \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

1.3.
$$\int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^2} dx$$

Подынтегральная функция содержит выражение вида $f(x, \sqrt{1 \pm x^2})$, которое интегрируется с помощью соответствующих замен:

$$\int f(x, \sqrt{1 - x^2}) dx \Rightarrow x = \sin t,$$

$$\int f(x, \sqrt{1 + x^2}) dx \Rightarrow x = \operatorname{tg} t, \quad .$$

$$\int f(x, \sqrt{x^2 - 1}) dx \Rightarrow x = \frac{1}{\cos t}.$$

Поэтому, используем замену переменных, исключаящую иррациональность: $x = \operatorname{tg} t$. Тогда

$$\left| x = \operatorname{tg} t \Rightarrow \sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t}; \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \right|$$

Находим новые пределы:

$$0 = \operatorname{tg} t \Rightarrow t_{\text{нижн.}} = 0; \quad 1 = \operatorname{tg} t \Rightarrow t_{\text{верхн.}} = \pi/4.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^2} dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg}^3 t}{\cos t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 t}{\cos^6 t} \cdot \frac{d \cos t}{(-\sin t)} = - \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 t}{\cos^6 t} d \cos t = \\ &= - \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^6 t} d \cos t = - \left(\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^6 t} - \frac{\cos^2 t}{\cos^6 t} \right) d \cos t = \\ &= \frac{1}{5 \cos^5 t} \Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{3 \cos^3 t} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{5(\sqrt{2}/2)^5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3(\sqrt{2}/2)^3} + \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{15}. \end{aligned}$$

$$1.4. \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{\operatorname{tg} x - 5}{2 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx.$$

Подынтегральная функция содержит тригонометрические функции, следовательно, используем одну из тригонометрических подстановок:

$$\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Находим новые пределы:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = t \Rightarrow t_{\text{нижн.}} = 1; \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3) = t \Rightarrow t_{\text{верхн.}} = 3.$$

Кроме того, запишем $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{\operatorname{tg} x - 5}{2 - 2 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x} dx &= \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{t - 5}{1 - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{t - 5}{\frac{1+t^2 - t + 2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{t - 5}{t^2 - t + 3} dt = \end{aligned}$$

Выделим в знаменателе полный квадрат и сделаем еще одну замену переменных:

$$\left| \begin{aligned} t^2 - t + 3 &= t^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 3 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \\ t - \frac{1}{2} &= z \Rightarrow t = z + \frac{1}{2} \Rightarrow dt = dz. \end{aligned} \right|$$

Новые пределы интегрирования будут равны:

$$z_{\text{нижн.}} = 1/2, \quad z_{\text{верхн.}} = 5/2.$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{1/2}^{5/2} \frac{z - 9/2}{z^2 + 11/4} dz = \frac{1}{2} \int_{1/2}^{5/2} \frac{z}{z^2 + 11/4} dz - \frac{9}{4} \int_{1/2}^{5/2} \frac{1}{z^2 + (\sqrt{11}/2)^2} dz = \\ &= \frac{1}{4} \ln(z^2 + 11/4) \Big|_{1/2}^{5/2} - \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2z}{\sqrt{11}} \Big|_{1/2}^{5/2} = \\ &= \frac{1}{4} (\ln(25/4 + 11/4) - \ln(1/4 + 11/4)) - \frac{9}{2\sqrt{11}} (\operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{11}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{11}}) = \\ &= \frac{1}{4} (\ln 9 - \ln 3) - \frac{9}{2\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{\frac{5}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{11}}}{1 + \frac{5}{\sqrt{11}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}}} = \frac{1}{4} \ln 3 - \frac{9}{2\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{11}}{4}. \end{aligned}$$

$$1.5. \int_{-3}^4 f(x)dx, \quad f(x) = \begin{cases} -3, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 3x - 4, & x > 1. \end{cases}$$

Воспользуемся свойством аддитивности определенного интеграла:

$$\int_{-3}^4 f(x)dx = \int_{-3}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-3}^4 f(x)dx &= \int_{-3}^0 (-3)dx + \int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^4 (3x - 4)dx = \\ &= -3 \int_{-3}^0 dx + \int_0^1 x^{1/2}dx + \int_1^4 (3x - 4)dx = -3x \Big|_{-3}^0 + \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 + \left(\frac{3}{2}x^2 - 4x \right) \Big|_1^4 = \\ &= -3(0 + 3) + \frac{2}{3}(1 - 0) + \left(\frac{3}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 \right) - \left(\frac{3}{2} \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \right) = \\ &= -9 + \frac{2}{3} + 8 - \frac{3}{2} + 4 = \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

Задание 2. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

$$2.1. y = \frac{1}{1 + \cos x}, \quad y = 0, \quad x = \pi/2, \quad x = -\pi/2;$$

$$2.2. \rho = \sin \varphi, \quad \rho = \sqrt{3} \cos \varphi;$$

$$2.3. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad y = 1 \quad (y \geq 1).$$

Решение

$$2.1. y = \frac{1}{1 + \cos x}, \quad y = 0, \quad x = \pi/2, \quad x = -\pi/2.$$

Построим фигуру, ограниченную линиями $y = \frac{1}{1 + \cos x}$, $y = 0$, $x = \pi/2$ и $x = -\pi/2$. Это можно сделать по точкам методами исследования поведения функций или с использованием любого графического приложения.

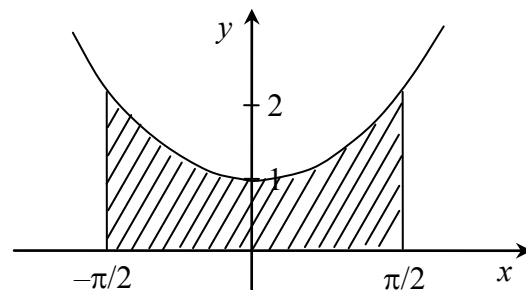


Рис. 1.

Найдем площадь фигуры по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx,$$

где $f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$, $a = -\pi/2$ и $b = \pi/2$. Тогда

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos^2(x/2)} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{-\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 2 \text{ (кв.ед.)}. \end{aligned}$$

2.2. $\rho = \sin \varphi$, $\rho = \sqrt{3} \cos \varphi$.

Построим окружности $\rho = \sin \varphi$ и $\rho = \sqrt{3} \cos \varphi$ в полярной системе координат, найдем их общую часть, площадь которой необходимо вычислить. Найдем площадь фигуры по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

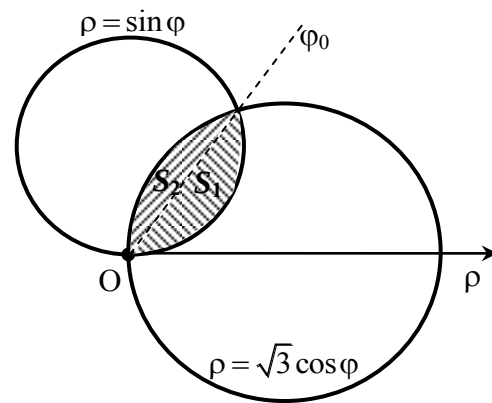


Рис. 2.

Заметим, что искомая площадь состоит из двух криволинейных секторов S_1 и S_2 , причем первый сектор образован кривой $\rho = \sin \varphi$, пробегающей угол φ от 0 до φ_0 ; второй – кривой $\rho = \sqrt{3} \cos \varphi$, где φ пробегает значения от φ_0 до $\pi/2$. Найдем φ_0 – угол, при котором пересекаются две окружности. Из равенства

$$\sin \varphi = \sqrt{3} \cos \varphi \Rightarrow \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{3}.$$

Таким образом, искомая площадь

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} (\sqrt{3} \cos \varphi)^2 d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi + \frac{3}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi/3} + \frac{3}{4} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\pi/3 - \frac{\sin 2\pi/3}{2} - 0 \right) + \frac{3}{4} \left(\pi/2 + \frac{\sin 2\pi/2}{2} - \pi/3 - \frac{\sin 2\pi/3}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} \right) \text{ (кв.ед.)}.$$

2.3. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad y = 1 \quad (y \geq 1).$

Заданная кривая – эллипс в параметрической форме. Построить данную кривую можно либо по точкам, либо с использованием любого графического приложения. Прямая $y = 1$ отсекает верхнюю часть эллипса S_1 , площадь которой мы будем искать. Для этого, найдем точки пересечения прямой и эллипса:

$$2 \sin t = 1 \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{6}, t_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

Здесь t_1 соответствует точке x_1 , t_2 соответствует точке x_2 . Найдем площадь фигуры по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt.$$

Однако в этом случае мы получим площадь между кривой – эллипсом и осью OX , т.е. $S_1 + S_2$. Поэтому искомая площадь S_1 будет представлять собой разность $S - S_2$:

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} y_1(t) x'(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} y_2(t) x'(t) dt,$$

где $y_1(t)$ – часть уравнения эллипса, $y_2(t) = 1$ – уравнение прямой.

Кроме того, заметим, что фигура $S_1 + S_2$ симметрична относительно оси OY . Поэтому вычислим площадь как удвоенный интеграл по половинному промежутку от $x_0 = 0$ до $x_1 = \cos(\pi/6)$. Из первого уравнения параметрической системы эллипса $x = \cos t$ найдем t_0 , соответствующий x_0 :

$$0 = \cos t \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$S_1 = S - S_2 = 2 \left(\int_{\pi/2}^{\pi/6} 2 \sin t (\cos t)' dt - \int_{\pi/2}^{\pi/6} 1 \cdot (\cos t)' dt \right) =$$

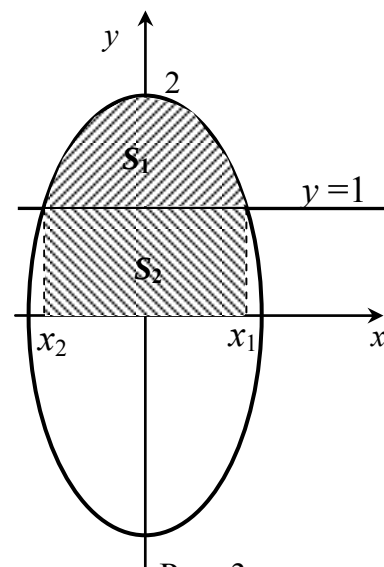


Рис. 3.

$$\begin{aligned} &= 2 \left(- \int_{\pi/2}^{\pi/6} 2 \sin^2 t dt + \int_{\pi/2}^{\pi/6} \sin t dt \right) = 2 \left(\int_{\pi/6}^{\pi/2} 2 \sin^2 t dt - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin t dt \right) = \\ &= 2 \left(\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt + \cos t \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} \right) = 2 \left(\left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \cos t \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} \right) = \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{6} \right) + \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \text{ (кв.ед.)}. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что S_2 можно вычислить как площадь прямоугольника, но при этом не забывать, что вычисления будут проводиться в декартовой системе координат.

Задание 3. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y = \frac{e^x + e^{-x} + 3}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2;$ 3.2. $\rho = 2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6;$

3.3. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \pi/6 \leq t \leq \pi/4.$

Решение

3.1. $y = \frac{e^x + e^{-x} + 3}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2.$

Найдем длину дуги кривой по формуле

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Производная функции $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{4}$, тогда

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{4} \right)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{2^2 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{(e^x + e^{-x})^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (e^x + e^{-x}) dx = \\ &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (e^2 - e^{-2}) - \frac{1}{2} (e^0 - e^0) = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \operatorname{sh} 2. \end{aligned}$$

3.2. $\rho = 2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$

Найдем длину дуги кривой по формуле

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$$

Производная функции $\rho' = 2 \cos \varphi$, тогда

$$L = \int_0^{\pi/6} \sqrt{(2 \sin \varphi)^2 + (2 \cos \varphi)^2} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/6} \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/6} d\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

3.3.
$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \pi/6 \leq t \leq \pi/4.$$

Найдем длину дуги кривой по формуле

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(y'_t)^2 + (x'_t)^2} dt.$$

Производные функций

$$x' = e^t (\cos t + \sin t) + e^t (-\sin t + \cos t) = 2e^t \cos t,$$

$$y' = e^t (\cos t - \sin t) + e^t (-\sin t - \cos t) = -2e^t \sin t.$$

Тогда

$$\begin{aligned} L &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{(2e^t \cos t)^2 + (-2e^t \sin t)^2} dt = \\ &= 2 \int_{\pi/6}^{\pi/4} e^t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 2e^t \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = 2(e^{\pi/4} - e^{\pi/6}). \end{aligned}$$

Задание 4. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$:

4.1. вокруг Ox ;

4.2. вокруг Oy .

Решение

4.1. $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$ вокруг Ox .

Построим фигуру вращения – пересечение функций $y = 4x - x^2$ и $y = 4 - x$ вращаем вокруг Ox . Найдем абсциссы точек пересечения двух линий:

$$4x - x^2 = 4 - x \Rightarrow (4 - x)x - (4 - x) = 0 \Rightarrow \\ (4 - x)(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 4; x_2 = 1.$$

Объем фигуры вращения, ограниченной линией $y = y(x)$ находим по формуле

$$V_{Ox} = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2(x) dx.$$

В нашем случае, фигура полая, т.е. из объема фигуры, образованной кривой $y = 4x - x^2$ надо удалить объем V_1 фигуры, образованной линией $y = 4 - x$. Тогда

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 (4x - x^2)^2 dx - \pi \int_1^4 (4 - x)^2 dx = \\ &= \pi \int_1^4 [(4x - x^2)^2 - (4 - x)^2] dx = \pi \int_1^4 [16x^2 - 8x^3 + x^4 - 16 + 8x - x^2] dx = \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 16x \right]_1^4 = \\ &= \pi \left[\frac{4^5}{5} - 2 \cdot 4^4 + 5 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 \right] - \pi \left[\frac{1^5}{5} - 2 \cdot 1^4 + 5 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 \right] = \\ &= \pi \left[\frac{4^3}{5} + \frac{44}{5} \right] = \frac{108}{5} \pi \text{ (куб. ед.)}. \end{aligned}$$

4.2. $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$ вокруг оси Oy .

Первый способ. Построим фигуру вращения – пересечение функ-

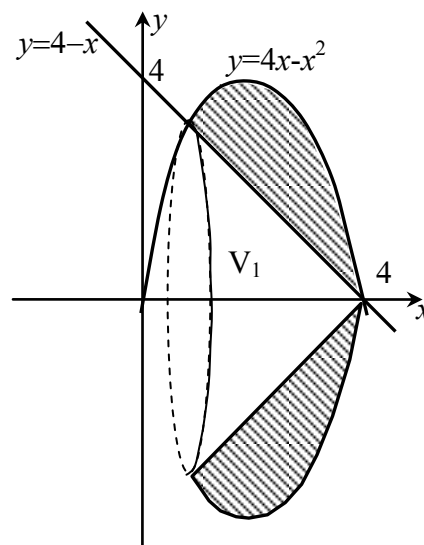


Рис. 4 Вращение вокруг Ox

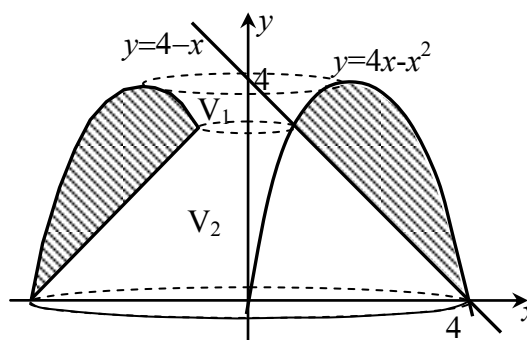


Рис. 5. Вращение вокруг Oy

ций $y = 4x - x^2$ и $y = 4 - x$ вращаем вокруг Oy . В этом случае объем фигуры вращения, ограниченной линией $x = x(y)$ находим по формуле

$$V_{Oy} = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2(y) dy.$$

Найдем ординаты точек пересечения двух линий. Так как абсциссы мы нашли $x_1 = 4$; $x_2 = 1$, то ординаты находим подстановкой x_1 и x_2 в любое уравнение линий, например, в уравнение прямой: $y_1 = 4 - 4 = 0$, $y_2 = 4 - 1 = 3$. Выразим обратные функции $x = x(y)$:

$$y = 4x - x^2 \Rightarrow y = -\underbrace{(x^2 - 4x + 4 - 4)}_{(x-2)^2} = -(x-2)^2 + 4 \Rightarrow$$

$$(x-2)^2 = 4 - y \Rightarrow x - 2 = \pm \sqrt{4 - y} \Rightarrow$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - y} \text{ — правая и левая ветвь параболы,}$$

$$y = 4 - x \Rightarrow x = 4 - y \text{ — уравнение прямой.}$$

Фигура полая, т. е. из объема фигуры, образованной правой ветвью $x = 2 + \sqrt{4 - y}$ надо удалить объем V_2 фигуры, образованной прямой $x = 4 - y$. Тогда

$$\overline{V_{Oy}} = \pi \int_0^3 \left[(2 + \sqrt{4 - y})^2 - (4 - y)^2 \right] dy.$$

Однако, фигура, образующая тело вращения, достигает своего наибольшего значения в вершине параболы ($y_0 = 4$). На промежутке от $y = 3$ до $y = 4$ фигура вращения формируется за счет правой и левой ветвей параболы. Фигура полая, следовательно, из объема фигуры, образованной правой ветвью $x = 2 + \sqrt{4 - y}$ надо удалить объем V_1 фигуры, образованной левой ветвью $x = 2 - \sqrt{4 - y}$. Тогда

$$\overline{\overline{V_{Oy}}} = \pi \int_3^4 \left[(2 + \sqrt{4 - y})^2 - (2 - \sqrt{4 - y})^2 \right] dy.$$

Таким образом, фигура вращения вокруг Oy состоит из двух частей $\overline{V_{Oy}}$ и $\overline{\overline{V_{Oy}}}$, и искомый объем есть сумма $\overline{V_{Oy}} + \overline{\overline{V_{Oy}}}$.

$$\begin{aligned} \overline{V_{Oy}} + \overline{\overline{V_{Oy}}} &= \\ &= \pi \int_0^3 \left[(2 + \sqrt{4 - y})^2 - (4 - y)^2 \right] dy + \pi \int_3^4 \left[(2 + \sqrt{4 - y})^2 - (2 - \sqrt{4 - y})^2 \right] dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \pi \int_0^3 [4\sqrt{4-y} - 8 + 7y - y^2] dy + \pi \int_3^4 8\sqrt{4-y} dy = \\ &= \pi \left[-\frac{8}{3}(4-y)^{3/2} - 8y + \frac{7}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^3 - \frac{8\pi \cdot 2}{3}(4-y)^{3/2} \Big|_3^4 = \\ &= \pi \left(\frac{56}{3} - \frac{3}{2} \right) + \frac{16\pi}{3} = 22.5\pi \text{ (куб. ед.)}. \end{aligned}$$

Второй способ. Чтобы не разбивать фигуру вращения на элементарные (образованные только двумя – внешней и внутренней граничными функциями), для вычисления объема V_{Oy} можно использовать другую формулу:

$$V_{Oy} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \cdot y(x) dx.$$

При этом необходимо учитывать, что фигура полая, т.е. не забываем вычесть объем полости. Тогда

$$\begin{aligned} V_{Oy} &= 2\pi \int_1^4 x \cdot (4x - x^2) dx - 2\pi \int_1^4 x \cdot (4 - x) dx = \\ &= 2\pi \int_1^4 x \cdot [(4x - x^2) - (4 - x)] dx = 2\pi \int_1^4 [5x^2 - x^3 - 4x] dx = \\ &= 2\pi \left[\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_1^4 = 2\pi [11 + 1/4] = 22.5\pi \text{ (куб. ед.)}. \end{aligned}$$

Задание 5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2(x+1)}$;

5.2. $\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{(1 + \sin \sqrt[3]{x^4})^5 - 1}$.

Решение

5.1. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2(x+1)}$

Это несобственный интеграл I рода. Для исследования сходимости применим предельный признак сравнения. Функция $g(x) = \frac{1}{x \ln^2(x)}$ эквивалентна подынтегральной функции $f(x) = \frac{1}{x \ln^2(x+1)}$ при $x \rightarrow \infty$, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln^2(x)}{x \ln^2(x+1)} = 1.$$

Поэтому, исследуем сходимость интеграла для функции $g(x) = \frac{1}{x \ln^2(x)}$, а согласно признаку сходимости, интеграл от функции $f(x) = \frac{1}{x \ln^2(x+1)}$ будет вести себя так же. По определению:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_2^a \frac{dx}{x \ln^2 x} = -\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \Big|_2^a = -0 + \frac{1}{\ln 2} = \text{const} \Rightarrow$$

интеграл от функции $g(x)$ сходится $\Rightarrow$ по предельному признаку сходимости исходный интеграл тоже сходится.

Замечание 1. Поскольку мы применили признак сравнения для исходного интеграла и вычислили значение интеграла для эквивалентной функции, нельзя утверждать, что значение исходного интеграла равно $\frac{1}{\ln 2}$. Можно лишь утверждать, что исходный интеграл сходится.

Замечание 2. Вместо предельного признака сравнения можно было использовать 1-ый признак сравнения, т. е. подобрать большую функцию $g(x) \geq f(x)$, интеграл от которой будет сходиться.

$$5.2. \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{(1 + \sin \sqrt[3]{x^4})^5 - 1}$$

Это несобственный интеграл II рода. Точка разрыва II рода $x_0 = 0$. Для исследования сходимости применим предельный признак сравнения. Используя эквивалентные бесконечно малые, найдем эквивалент для подынтегральной функции при $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{(1 + \sin \sqrt[3]{x^4})^5 - 1} \sim \frac{x}{5\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{5x^{1/3}}.$$

Исследуем сходимость интеграла для функции $g(x) = \frac{1}{x^{1/3}}$. Согласно признаку сходимости, интеграл от функции $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{(1 + \sin \sqrt[3]{x^4})^5 - 1}$ будет вести себя так же. По определению:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^{1/3}} + \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\mu} \frac{dx}{x^{1/3}} + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x^{1/3}}.$$

Исследуем каждый интеграл отдельно. Если хотя бы один из интегралов расходится, то весь интеграл расходится.

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\mu} \frac{dx}{x^{1/3}} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{-1}^{0-\mu} = \frac{3}{2} (0 - (-1)^{2/3}) = -\frac{3}{2} = \text{const} \Rightarrow$$

интеграл сходится.

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{0+\eta}^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{0+\eta}^1 = \frac{3}{2} (1^{2/3} - 0) = \frac{3}{2} = \text{const} \Rightarrow$$

интеграл сходится. Таким образом, оба интеграла сходятся, следовательно, исходный интеграл сходится согласно предельному признаку сравнения.

Задание 6. Найти массу плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho(x; y) = 6y^2 e^{xy/3}$, ограниченной кривыми $x = 0, y = \ln 3, y = x$.

Решение

Для вычисления массы плоской пластины воспользуемся формулой

$$M = \iint_D \rho(x; y) dx dy = \iint_D 6y^2 e^{xy/3} dx dy.$$

Перейдем от кратного интеграла к повторному. Для этого построим область интегрирования D . Для того чтобы подынтегральная функция упростилась в процессе интегрирования, выберем внутренний интеграл по переменной x , внешний – по y . Проходя через область D , определим функцию входа $x = 0$ и функцию выхода $x = y$ из области D . Тогда

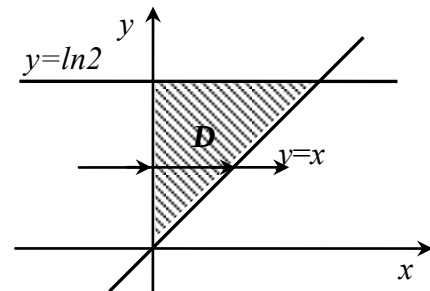


Рис. 6.

$$\begin{aligned} M &= \iint_D 6y^2 e^{xy/3} dx dy = 6 \int_0^{\ln 2} dy \int_0^y y^2 e^{xy/3} dx = \\ &= 6 \int_0^{\ln 2} y^2 \cdot \frac{e^{xy/3}}{y/3} \Big|_0^y dy = 6 \int_0^{\ln 2} 3 y e^{xy/3} \Big|_0^y dy = 18 \int_0^{\ln 2} y (e^{y^2/3} - 1) dy = \\ &= 18 \int_0^{\ln 2} y e^{y^2/3} dy - 18 \int_0^{\ln 2} y dy = \\ &= 18 \int_0^{\ln 2} \frac{y e^{y^2/3} d(y^2/3)}{2y/3} - 9 y^2 \Big|_0^{\ln 2} = 27 e^{y^2/3} \Big|_0^{\ln 2} - 9 \ln^2 2 = \\ &= 27 \left(e^{\frac{\ln^2 2}{3}} - 1 \right) - 9 \ln^2 2 = 27 \left(e^{\frac{\ln^2 2}{3}} \right)^{\frac{\ln 2}{3}} - 27 - 9 \ln^2 2 = \end{aligned}$$

$$= 27 \cdot \sqrt[3]{2^{\ln 2}} - 27 - 9 \ln^2 2 \text{ (ед. массы)}.$$

Задание 7. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной данными линиями:

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 8y + x^2 = 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad x = 0.$$

Решение

Для вычисления площади воспользуемся формулой

$$S = \iint_D dx dy.$$

Приведем к каноническому виду заданные уравнения и построим область интегрирования D .

$$y^2 - 4y + x^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{y^2 - 4y + 4}_{(y-2)^2} - 4 + x^2 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 + x^2 = 4;$$

Получили окружность с центром в точке $O'(0; 2)$ и радиусом $r=2$ (рис. 7).

$$y^2 - 8y + x^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{y^2 - 8y + 16}_{(y-4)^2} - 16 + x^2 = 0 \Rightarrow (y-4)^2 + x^2 = 16.$$

Получили окружность с центром в точке $O''(0; 4)$ и радиусом $r = 4$ (рис. 7).

Интегрирование по области круга или части круга удобнее проводить в полярных координатах, поэтому перейдем к полярным координатам:

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi,$$

$$dx dy = \rho d\rho d\varphi.$$

Тогда уравнения окружности:

$$y^2 - 4y + x^2 = 0 \Rightarrow \rho^2 \sin^2 \varphi - 4\rho \sin \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi = 0 \Rightarrow \rho = 4 \sin \varphi;$$

Аналогично для второй окружности: $\rho = 8 \sin \varphi$. Тогда

$$S = \iint_D dx dy = \iint_D \rho d\rho d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho.$$

Найдем пределы интегрирования. Из условий $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ и $x = 0$:

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \rho \sin \varphi = \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6};$$

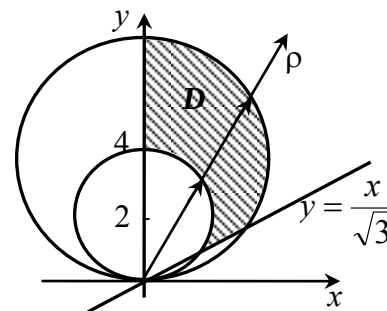


Рис. 7



$$x = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Проходя через область D радиус-вектором ρ , определим функцию входа $\rho_1 = 4\sin \varphi$ и функцию выхода из области D $\rho_2 = 8\sin \varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} S &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho = \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_{4\sin \varphi}^{8\sin \varphi} \rho d\rho = \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\rho^2}{2} \Big|_{4\sin \varphi}^{8\sin \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (64\sin^2 \varphi - 16\sin^2 \varphi) d\varphi = \\ &= 24 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = 12 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 12 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \\ &= 12 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin \pi + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) = 12 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 4\pi + 3\sqrt{3} \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

**4.6. Варианты индивидуального задания № 3
«Обыкновенные дифференциальные уравнения»****Вариант 1**

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$;

1.2. $y' \sin^2 x = y \ln y$;

1.3. $(x + 2y)dx = xdy$;

1.4. $x^2dy - (2xy - y^2)dx = 0$;

1.5. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;

1.6. $(xy' - 1) \ln x = 2y$;

1.7. $xy' - 3y = -x^4y^2$;

1.8. $(4x^3e^y + y^4e^x)dx + (x^4e^y + 4y^3e^x)dy = 0$.

2. Решите задачи Коши:

2.1. $(x^2 - y^2)y' = 2xy$, $y(0) = 1$;

2.2. $y' + 4x^3y^3 + 2xy = 0$, $y(0) = 1$.

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $x^3y'' + x^2y' = 1$;

3.2. $y'(1 + (y')^2) = y''$;

3.3. $y''' - y'' + y' - y = x + 5$;

3.4. $y'' - y' + 2y = e^x(x^2 - 1)$;

3.5. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$;

3.6. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$;

4.2. $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

4.3. $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{e^x + 2}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$$y'' - 8y' + 16y = 12x^2 - 28x + e^{4x}.$$

Вариант 2

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $y' \cos x = \frac{y}{\ln y};$

1.2. $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x) \cos^{-2} y dy = 0;$

1.3. $xy' = y - x e^{\frac{y}{x}};$

1.4. $y^2 + x^2 y' = xy y';$

1.5. $x^2 y' = 2xy + 3;$

1.6. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1);$

1.7. $xy' + y = 2y^2 \ln x;$

1.8. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1 \right) dx - \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$

2. Решите задачи Коши:

2.1. $y' \cos x = (y + 1) \sin x, \quad y(0) = -1;$

2.2. $xy' + y = xy^2, \quad y(1) = 2.$

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $xy''' - y'' - x + 1 = 0;$

3.2. $(y + 1) \cdot (y + 2)y'' = (y')^2;$

3.3. $y^{IV} + 18y'' + 81y = 2x + 1;$

3.4. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x};$

3.5. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x;$

3.6. $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-3x}}{1 + e^{-x}}.$

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' - 8y' + 17y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

4.2. $y'' + 4y = \sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

4.3. $y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\pi.$

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$$y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x.$$

Вариант 3

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $\sec^2 x \cdot \operatorname{ctg} y \, dx + \sec^2 y \cdot \operatorname{tg} x \, dy = 0$; 1.2. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$;

1.3. $xy' = y(\ln y - \ln x)$; 1.4. $(x^2 - 2y^2)dx + 2xy \, dy = 0$;

1.5. $xy' + y - x - 1 = 0$; 1.6. $y' = \frac{y}{3x - y^2}$;

1.7. $x^2 y' - 2xy + y^2 = 0$;

1.8. $2x \cos^2 y \, dx + (2y - x^2 \sin 2y) \, dy = 0$.

2. Решите задачи Коши:

2.1. $xy' + y = \sin \frac{\pi x}{2}$, $y(1) = 0,5$;

2.2. $2(xy' + y) = xy^2$, $y(1) = 2$.

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $2x(y')^2 + y'' = 0$;

3.2. $(y')^2 + yy'' = 0$;

3.3. $y^{IV} + y''' + 4y'' + 4y' = x^2 + 3$;

3.4. $y'' - 4y' + 20y = 5e^{3x}$;

3.5. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$;

3.6. $y'' + 2y' + y = \frac{2e^{-x}}{x^3}$.

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

4.2. $y'' + 4y = \cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

4.3. $y'' + y = 2 \operatorname{ctg} x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$y'' - 8y' + 16y = 12x^2 - 28x + e^{4x}$.

Вариант 4

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $\sqrt{6y - y^2} dx - (4 + x^2) dy = 0;$

1.2. $xy' + y - 3 = 0;$

1.3. $xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0;$

1.4. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y;$

1.5. $y' - 2y \operatorname{tg} x = \sin x;$

1.6. $(2e^y - x)y' = 1;$

1.7. $x^2(x-1)y' - y^2 - xy(x-2) = 0;$

1.8. $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1+x^2} dy = 0.$

2. Решите задачи Коши:

2.1. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2), \quad y(1) = 1;$

2.2. $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2, \quad y(0) = 1.$

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $y'' = xe^{2x};$

3.2. $1 + (y')^2 = yy'';$

3.3. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 2x + 5;$

3.4. $9y'' + 42y' + 49y = 5e^{\frac{7}{3}x};$

3.5. $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x);$

3.6. $y'' + 4y = \frac{4\sin^2 2x}{\cos 2x}.$

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

4.2. $y'' + 4y = \cos 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

4.3. $y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$$y'' + 2y' + y = 5e^{-x} + x \sin 2x.$$

Вариант 5

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{x+2} = 0;$

1.2. $y' \cos x = (y+1) \cdot \sin x;$

1.3. $xy'(\ln y - \ln x + 4) = y(\ln \frac{y}{x} + 5);$

1.4. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2};$

1.5. $y'x + 2y = x^3;$

1.6. $(e^y - x)y' = y;$

1.7. $y'x - 3y = -x^4y^2;$

1.8. $(x + \ln y)dx + (1 + \frac{x}{y} + \sin y)dy = 0.$

2. Решите задачи Коши:

2.1. $x^2y' + y^2 + xy + x^2 = 0, \quad y(1) = 0;$

2.2. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x, \quad y(1) = 1.$

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $x^2y'' + xy' = 1;$

3.2. $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2;$

3.3. $y''' - y'' - y' + y = x - 1;$

3.4. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x};$

3.5. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x;$

3.6. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' - 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$

4.2. $y'' + 4y = (x+1)\sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

4.3. $y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$y'' - 2y' + y = xe^{3x} + x^2 - 1.$

Вариант 6

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dx + (\sqrt{xy} + \sqrt{y})dy = 0;$

1.2. $y' = 2\sqrt{y} \cdot \ln x;$

1.3. $y' + \frac{x+y}{x+2y} = 0;$

1.4. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0;$

1.5. $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x;$

1.6. $2(x + y^4)y' = y;$

1.7. $y' - xy + y^3 e^{-x^2} = 0;$

1.8. $2xy^{-3}dx + (y^2 - 3x^2)y^{-4}dy = 0.$

2. Решите задачи Коши:

2.1. $x y' + y - x - 1 = 0, \quad y(1) = 0,5;$

2.2. $2(y' + xy) = (1 + e^x)e^{x^2/2}y^2, \quad y(0) = 2.$

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $x \ln x \cdot y'' = y';$

3.2. $2y y'' - (y')^2 = 0;$

3.3. $y''' - 2y'' - 3y' = 2x^2 + 1;$

3.4. $12y'' - 7y' + y = (2x^2 - x + 3)e^x;$

3.5. $y'' + 2y' + 5y = -17 \sin 2x;$

3.6. $y'' + 4y = \frac{8}{\sin^3 2x}.$

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' + 14y' + 53y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -5;$

4.2. $y'' + 4y = x \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

4.3. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 3 \ln 3, \quad y'(0) = 5 \ln 3.$

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$y'' + 3y' = 2 \operatorname{sh} 3x + 1.$

Вариант 7

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $(1 - x^2)y' = xy;$

1.2. $\sqrt{y^2 + 2} \cdot x dx + y(1 + x^2) dy = 0;$

1.3. $xy dy + (x^2 - 2y^2) dx = 0;$

1.4. $\left(x + y \sin \frac{y}{x}\right) x' = x \sin \frac{y}{x};$

1.5. $y'x + 2y = x^4;$

1.6. $(3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - x)y' = y;$

1.7. $xy^2 y' = x^2 + y^3;$

1.8. $\frac{y}{x} dx + (\ln x - y^3) dy = 0.$

2. Решите задачи Коши:

2.1. $x y' + x e^{\frac{y}{x}} - y = x, \quad y(1) = 0;$

2.2. $3(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 3.$

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $x y'' + \frac{1}{x} y' = \frac{1}{x};$

3.2. $y y'' - (y')^2 = y^2 y';$

3.3. $y^{IV} - 10y'' + 9y = x + 3;$

3.4. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x;$

3.5. $y'' - 4y' + 4y = e^{-2x} \sin 6x;$

3.6. $y'' + 4y' + 4y = \frac{2e^{-2x}}{(x+1)^3}.$

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

4.2. $y'' + y = \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

4.3. $y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4.$

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$$49y'' + 2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) + \sin x.$$

Вариант 8

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $\frac{e^{-y^3}}{x^2 - 9} dy + \frac{x}{y^2} dx = 0;$

1.2. $(1 + e^{2x}) y^2 y' = e^x;$

1.3. $x^2 dy + y^2 dx = xy dy;$

1.4. $(y + \sqrt{xy}) dx = x dy;$

1.5. $e^x (y + y') = 1;$

1.6. $8(4y^3 + xy - y)y' = 1;$

1.7. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 4 \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{arctg} x;$

1.8. $2x(\sqrt{x^2 - y} + 1) dx - \sqrt{x^2 - y} dy = 0.$

2. Решите задачи Коши:

2.1. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2, \quad y(0) = 0;$

2.2. $2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x (1 + \sin x), \quad y(0) = 1.$

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $2y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'};$

3.2. $y(y+1)y'' = (y')^2;$

3.3. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 4x;$

3.4. $y'' + 6y' + 34y = (3 - 4x)e^x;$

3.5. $y'' + y = 2 \cos 5x + 3 \sin 5x;$

3.6. $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}.$

4. Решите задачи Коши:

4.1. $10y'' - 7y' + y = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 2;$

4.2. $y'' - 4y = \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{5};$

4.3. $y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = \ln 4 - 2.$

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$$y'' + y = 2 \sin x - 6 \cos x + 2e^x.$$

Вариант 9

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $x^3(y^4 + 4)dx + y^3(x^4 + 4)dy = 0$; 1.2. $\frac{x dx}{y+1} - \frac{y dy}{x+1} = 0$;

1.3. $x dy + \left(x \cdot \sqrt{\frac{y}{x} - 1} - y \right) dx = 0$; 1.4. $x y' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$;

1.5. $\cos x \cdot y' - y \sin x = x e^{-x^2}$;

1.6. $y^3(y-1)dx + 3xy^2(y-1)dy = (y+2)dy$;

1.7. $(1-x^2)y' + xy = x(1-x^2)\sqrt{y}$;

1.8. $(10xy - 8y - 3)dx + (5x^2 - 8x + 6)dy = 0$.

2. Решите задачи Коши:

2.1. $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$, $y(0)=1$;

2.2. $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1-x^3)$, $y(0)=-1$.

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $y'' = \frac{y'}{x} \left(\ln \frac{y'}{x} + 1 \right)$;

3.2. $y y'' = (y')^2 - (y')^3$;

3.3. $y^{IV} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = x + 8$;

3.4. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$;

3.5. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x$;

3.6. $y'' - 2y' + y = \frac{2e^x}{x^3}$.

4. Решите задачи Коши:

4.1. $2y'' + 5y' + 2y = 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

4.2. $y'' + 4y' = \sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$;

4.3. $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$.

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$y'' + y = 2 \sin x - 6 \cos x + 2e^x$.

Вариант 10

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $3 \operatorname{tg} y dx - 2x \ln x dy = 0$;

1.2. $y' - y = 2(1 + x^2 y')$;

1.3. $(x^2 + y^2) dx + xy dy = 0$;

1.4. $y' = \frac{x - y}{x + y}$;

1.5. $(x^2 + 1)y' - 2xy = x(x^2 + 1)^{3/2}$;

1.6. $2y^2 dx + (x + e^{\frac{1}{y}}) dy = 0$;

1.7. $y'x + y = 2y^2 \ln x$;

1.8. $(10xy - 8y - 3)dx + (5x^2 - 8x + 6)dy = 0$.

2. Решите задачи Коши:

2.1. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$;

2.2. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, \quad y(0) = 1$.

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$;

3.2. $y'' = y'(1 + y')$;

3.3. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 2x$;

3.4. $y'' - y' + y = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$;

3.5. $y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x$;

3.6. $y'' + 4y = \frac{4 \cos 4x}{\cos 2x}$.

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 10$;

4.2. $y'' - 4y = \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;

4.3. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 2 \ln 2, \quad y'(0) = 3 \ln 2$.

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$y'' + y = 2 \cos 7x + 3 \sin x$.



Вариант 11

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x$;

1.2. $(2x + 1)dy + y^2 dx = 0$;

1.3. $(y - x)y dx + x^2 dy = 0$;

1.4. $x^3 dy + (4y^3 + 3x^2 y)dx = 0$;

1.5. $y' - 4y = e^{4x}$;

1.6. $(x \cos^2 y - y^2)y' = y \cos^2 y$;

1.7. $xy' + 2y = (x + 3)xy^3$;

1.8. $(4y^2 + 2xy + 3x^2)dy + (y^2 + 6xy + 2x^2)dx = 0$.

2. Решите задачи Коши:

2.1. $x dy + (x + y)dx = 0, \quad y(1) = 1$;

2.2. $3xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$;

3.2. $y''(y + 1) = (y')^2 + y'$;

3.3. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = x^2 + 3$;

3.4. $y''' - 3y' - 2y = -4xe^x$;

3.5. $y'' + y = 2 \cos 7x - 3 \sin 7x$;

3.6. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{6x}}{1 + e^{2x}}$.

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' + 2y' - 15y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;

4.2. $y'' - y' = \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$;

4.3. $y'' + y = 4 \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$9y'' + 24y' + 16y = xe^x + \cos x$.

Вариант 12

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 0$;

1.2. $\sqrt{y^2 + 1} dx - xy dy = 0$;

1.3. $xy y' = x^2 + y^2$;

1.4. $xy' = 2y(\ln y - \ln x)$;

1.5. $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$;

1.6. $(4y^2 + 4y - x)y' = \frac{1}{2}$;

1.7. $x^2 y^2 + 1 = x^3 y y'$;

1.8. $(x^2 + y^2 + x)e^{2x} dx + ye^{2x} dy = 0$.

2. Решите задачи Коши:

2.1. $2xy' - y = 3x^2$, $y(1) = 1$;

2.2. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4$, $y(1) = 1$.

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$;

3.2. $y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0$;

3.3. $y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 3y = 3x^2 - 1$;

3.4. $y'' + y' + y = 3xe^{2x}$;

3.5. $y'' + 4y' + 4y = e^x(\sin x + \cos x)$;

3.6. $y'' + y = \frac{\cos 2x}{\sin x}$.

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' - 2y' - 8y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$;

4.2. $y'' + 9y = \sin 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

4.3. $y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$y'' - 2y' = 2\operatorname{ch} 2x - \cos 2x$.

Вариант 13

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $\frac{x}{x^2+1}dx - \frac{y^2}{y^3+1}dy = 0;$

1.2. $\frac{(10-x^2)xy}{5-y^2} = y';$

1.3. $y'x = y(\ln y - \ln x + 1);$

1.4. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0;$

1.5. $xy' - y = x^2 \cos x;$

1.6. $(y^2 + 2y - x)y' = 1;$

1.7. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y;$

1.8. $[3x^2 + \cos(x+y)]dx + [\cos(x+y) - 3y^2]dy = 0.$

2. Решите задачи Коши:

2.1. $xy' = y \ln \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1;$

2.2. $2y' + 3y \cos x = e^{2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1.$

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $y'' \sin^4 x = \sin 2x;$

3.2. $(y')^2 = \frac{(y-1)y''}{2};$

3.3. $y''' + y'' = x^2 + 2;$

3.4. $y''' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x};$

3.5. $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x);$

3.6. $y'' + 2y' + y = \frac{2e^{-x}}{(x-3)^3}.$

4. Решите задачи Коши:

4.1. $9y'' - 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

4.2. $y'' - 9y = \sin 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{10};$

4.3. $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$$y'' - 2y' + y = 2e^x - 8\cos 2x.$$

Вариант 14

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $y' - xy^2 = 2xy$;

1.2. $\sqrt{1 + \ln x} dx - xy dy = 0$;

1.3. $y' \cdot x^2 = \frac{y^2 + 6xy + 4x^2}{2}$;

1.4. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$;

1.5. $y' - y = e^x \sin x$;

1.6. $dx = (\sin y + 3\cos y + 3x)dy$;

1.7. $y' + 2xy = 2x^3 y^3$;

1.8. $\left(\ln^3 y - \frac{3y \ln^2 x}{x} \right) dx + \left(\frac{3x}{y} \ln^2 y - \ln^3 x \right) dy = 0$.

2. Решите задачи Коши:

2.1. $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad y(0) = 0$;

2.2. $3(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 3$.

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$;

3.2. $yy'' - (y')^2 = 0$;

3.3. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 2x - 3$;

3.4. $y'' - 2y' - y = 4xe^x$;

3.5. $y'' - 4y' + 8y = e^x (2\sin x - \cos x)$;

3.6. $y'' + 9y = \frac{18}{\sin^3 3x}$.

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' - 6y' + 10y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$;

4.2. $y'' + 16y = \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$;

4.3. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2 + e^{-2x}}, \quad y(0) = 1 + 3 \ln 3, \quad y'(0) = 10 \ln 3$.

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$$y''' + y'' = 10 \sin x + 6 \cos x + 4e^x.$$

Вариант 15

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$; 1.2. $\frac{dx}{\cos^2 x \cos y} = -\operatorname{ctg} x \cdot \sin y dy$;

1.3. $y' \cos \frac{y}{x} = \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} - 1$;

1.4. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$;

1.5. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = \sin^2 x$;

1.6. $2(\cos^2 y \cos 2y - x)y' = \sin 2y$;

1.7. $y' + 2y = y^2 e^x$;

1.8. $\left(\ln y - \frac{y}{x}\right)dx + \left(\frac{x}{y} - \ln x\right)dy = 0$.

2. Решите задачи Коши:

2.1. $y^2 + x^2 y' = xy y'$, $y(1) = 1$;

2.2. $xy' + y = 2y^2 \ln x$, $y(1) = 0,5$.

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$;

3.2. $y y'' = y'' + 2(y')^2$;

3.3. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$;

3.4. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (2x + 16)e^x$;

3.5. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$;

3.6. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$;

4.2. $y'' + 16y = \cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

4.3. $y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$, $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = 0,5$.

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$.

Вариант 16

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $y' = \frac{y^2 - 2y}{2x};$

1.2. $(1 - x^2)dx + 3x\sqrt[3]{y}dy = 0;$

1.3. $2x^3dy - y(2x^2 - y^2)dx = 0;$

1.4. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0;$

1.5. $y' - 2xy = (x + 1)e^{x^2};$

1.6. $y = (x - 2y \ln y)y';$

1.7. $(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2;$

1.8. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$

2. Решите задачи Коши:

2.1. $x^2y' = 2xy + 3, \quad y(1) = 0;$

2.2. $xy' + y = xy^2, \quad y(1) = 1.$

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $xy'' = y' + x^2;$

3.2. $yy'' = \frac{1 + (y')^2}{2};$

3.3. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x;$

3.4. $y^{IV} + 8y'' + 16y = xe^x;$

3.5. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x);$

3.6. $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}.$

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' + 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 2;$

4.2. $y'' + 16y = \sin 4x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

4.3. $y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}; \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = 3(1 - \ln 2).$

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$$y''' - 1000y = 20e^{10x} - 100\cos 10x.$$

Вариант 17

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $(1+x^2)y' = x \sin^2 y$;

1.2. $ydx - (4+x^2) \ln y dy = 0$;

1.3. $y'x = x e^{\frac{y}{x}} + y$;

1.4. $y - xy' = x \sec \frac{y}{x}$;

1.5. $x^2 y' + 2xy - \ln x = 0$;

1.6. $(\cos^4 y - x \sin y)y' = \cos y$;

1.7. $y'x = y - x^4 y^4$;

1.8. $\left(\arctg y + \frac{y}{x^2+1} \right) dx + \left(\arctg x + \frac{x}{y^2+1} \right) dy = 0$.

2. Решите задачи Коши:

2.1. $x^2 y' + y^2 - 2xy = 0, \quad y(1) = 0$;

2.2. $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1) = \sqrt{2}$.

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $y'''(x-1) - y'' = 0$;

3.2. $yy'' = \frac{(y')^2}{2}$;

3.3. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$;

3.4. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x$;

3.5. $y'' + 2y' + 5y = -2 \sin x$;

3.6. $y'' + 4y' + 4y = \frac{2e^{-2x}}{x^3}$.

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' - 6y' + 8y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;

4.2. $y'' + 16y = \sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$;

4.3. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$y'' - y' + 4y = xe^x + \cos 2x$.



Вариант 18

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $(5x^3 - 1)y' + 3x^2y^4 = 0$;

1.2. $\sin^2 x \cos^2 y dx - \cos^2 x dy = 0$;

1.3. $xy' = y \cos\left(\ln \frac{y}{x}\right) + y$;

1.4. $xdy - ydx = ydy$;

1.5. $xdy - ydx = ydy$;

1.6. $\frac{1+y^2}{2} = (y - xy)y'$;

1.7. $y' + xy = (1+x)e^x$;

1.8. $[(y+1)e^x + e^y]dx + [(x+1)e^y + e^x]dy = 0$.

2. Решите задачи Коши:

2.1. $(y^2 - xy)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$, $y(1) = 1$;

2.2. $\cos y \cdot \sin x dx - \sin y \cdot \cos x dy = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{3}$.

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $y'' = 2xy'(x^2 + 2)^{-1}$;

3.2. $y(y'' + y) = 2(y')^2$;

3.3. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$;

3.4. $y'' + 2y' + 2y = (x+2)e^x$;

3.5. $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$;

3.6. $y'' + 16y = \frac{8\sin 2x \cdot \cos 4x}{\cos 2x}$.

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;

4.2. $y'' + 16y = \sin 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

4.3. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1+e^{-2x}}$; $y(0) = 1 + 2\ln 2$, $y'(0) = 6\ln 2$.

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$y'' + 4y' = 16\operatorname{sh} 4x - \sin 4x$.

Вариант 19

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $y' = 10^{x+y}$;

1.2. $y'e^{-x} = x - 1$;

1.3. $x^2 y' + y^2 = xy y'$

1.4. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$;

1.5. $y' - y \operatorname{tg} x = e^x \sec x$;

1.6. $y + 2 = (y(y + 2)^2 + x)y'$;

1.7. $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$;

1.8. $(x^2 + 3y^2)xdx + (y^2 + 3x^2)ydy = 0$.

2. Решите задачи Коши:

2.1. $(xy' - 1) \ln x = 2y$, $y(e) = 1$;

2.2. $y' + y = xy^2$, $y(0) = 1$.

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $y''(e^x + 1) + y' = 0$;

3.2. $(y')^2 + yy'' = yy'$;

3.3. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$;

3.4. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(18x + 4)e^x$;

3.5. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x$;

3.6. $y'' - 6y' + 9y = \frac{2e^{3x}}{(x-2)^3}$.

4. Решите задачи Коши:

4.1. $2y'' - 7y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0,5$;

4.2. $y'' + 16y = \cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

4.3. $y'' + 4y = 4 \operatorname{ctg} 2x$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$.

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$y'' - y' + 0,25y = e^{4x} \sin 2x + 1$.

Вариант 20

1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $x^2 y' - \cos 2y = 1;$

1.2. $y'(x + \sqrt{x}) = \sqrt{1-y};$

1.3. $(4x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0;$

1.4. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x};$

1.5. $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin^3 x \cdot \cos x;$

1.6. $(2y \sin^2 y + x \cos y)y' = \sin y;$

1.7. $3xy' + 2y + xy^2 = 0;$

1.8. $(x^2 + y^2 + 2x)e^x dx + 2ye^x dy = 0.$

2. Решите задачи Коши:

2.1. $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2y)dy = 0, \quad y(0) = 1;$

2.2. $y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}y^4 \sin x, \quad y(0) = 1.$

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $y''(x^2 + 1) = 2xy';$

3.2. $yy'' - (y')^2 = y^3;$

3.3. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3;$

3.4. $y'' - 5y' = 4xe^{5x};$

3.5. $y'' - 2y' + 10y = e^{\frac{3}{2}x} (2 \cos x - \sin x);$

3.6. $y'' + 16y = \frac{1}{\cos 4x}.$

4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' - 10y' + 26y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 1;$

4.2. $y'' + 16y = \cos 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

4.3. $y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}; \quad y(0) = 4 \ln 4, \quad y'(0) = 3(3 \ln 4 - 1).$

5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$$y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x).$$

**4.7. Решение типового варианта
и образец оформления индивидуального задания № 3****Вариант 0**

Задание 1. Найдите общий интеграл или общее решение дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1.1. $y' \sin x = y \ln y$;

1.2. $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$;

1.3. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$;

1.4. $xdy - ydx = ydy$;

1.5. $xy' - y - 2x \ln x = 0$;

1.6. $(y^2 + 2y - x)y' = 1$;

1.7. $y' - 4y = 2x \cdot \sqrt{y}$;

1.8. $\left(\frac{y}{\cos^2 xy} + \operatorname{tg} x \right) dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \operatorname{tg} y \right) dy = 0$.

Решение

1.1. $y' \sin x = y \ln y$. Заменяем производную y' на $\frac{dy}{dx}$ и разделим каждое слагаемое уравнения на $\sin x$. Тогда уравнение переписывается как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{\sin x}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, т.к. правую часть уравнения можно представить в виде произведения двух множителей, зависящих только от x и только от y . Разделим переменные (соберем все переменные x в левой части, все переменные y – в правой части уравнения). Для этого умножим обе части уравнения на dx :

$$dy = \frac{y \ln y \cdot dx}{\sin x}.$$

Разделим обе части уравнения на $y \ln y$:

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем левую и правую часть:

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x} \Rightarrow \int \frac{d(\ln y)}{y \ln y \cdot \frac{1}{y}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \ln C \Rightarrow$$

$$\ln |\ln y| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \ln C \Rightarrow \ln y = C \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Получили общий интеграл дифференциального уравнения. Выразив искомую функцию y , запишем общее решение:

$$y = e^{C \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

В процессе разделения переменных мы выполнили деление на $\sin x$, что может привести к потере решений. Поэтому необходимо рассмотреть корни уравнения $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$. Подставим $x = \pi k$ в исходное уравнение $y' \sin x = y \ln y$:

$$y' \sin \pi k = y \ln y \Rightarrow 0 = y \ln y.$$

Последнее равенство имеет место лишь при $y=0$, что не является тождеством. Таким образом, $x = \pi k$ не является решением.

Ответ: $y = e^{C \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$

1.2. $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$. Заменим производную y' на $\frac{dy}{dx}$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, т. к. правую часть уравнения можно представить в виде произведения двух множителей, зависящих только от x и только от y . Разделим переменные: умножим обе части уравнения на dx и разделим обе части уравнения на $\operatorname{tg} y$:

$$\frac{dy}{\operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} x dx.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем левую и правую часть:

$$\int \frac{dy}{\operatorname{tg} y} = \int \operatorname{tg} x dx \Rightarrow \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \Rightarrow$$

$$\ln |\sin y| = -\ln |\cos x| + \ln C \Rightarrow \ln |\sin y| = \ln \left| \frac{C}{\cos x} \right| \Rightarrow$$

$$\sin y = \frac{C}{\cos x} \Rightarrow \cos x \cdot \sin y = C.$$

Получили общий интеграл дифференциального уравнения.

В процессе разделения переменных мы выполнили деление на $\operatorname{tg} y$, что может привести к потере решений. Поэтому необходимо рассмотреть корни уравнения $\operatorname{tg} y = 0 \Rightarrow y = \pi k$. Подставим $y = \pi k$ в исходное уравнение $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$:

$$(\pi k)' = \operatorname{tg}(\pi k) \cdot \operatorname{tg} x \Rightarrow 0 \equiv 0.$$

Следовательно, $y = \pi k$ являются решениями. Проверим, входят ли они в общий интеграл. Имеем:

$$\cos x \cdot \sin(\pi k) = C \Rightarrow 0 = C.$$

Таким образом, при $C = 0$ решения $y = \pi k$ входят в общий интеграл.

Ответ: $\cos x \cdot \sin y = C$.

1.3. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$. Разделим левую и правую части уравнения на x . Тогда

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Заметим, что правая часть уравнения зависит только от частного $\frac{y}{x}$,

т.е. $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ – однородная функция нулевого измерения.

Действительно,

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha y}{\alpha x} + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha y}{\alpha x}\right)^2} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = f(x, y).$$

Это однородное уравнение. Делаем замену $\frac{y}{x} = z$. Тогда $y = xz$ и

$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$. Подставляя в уравнение, получаем

$$z + x \frac{dz}{dx} = z + \sqrt{1 + z^2} \Rightarrow x \frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} &= \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \ln |z + \sqrt{1 + z^2}| &= \ln |x| + \ln C \Rightarrow z + \sqrt{1 + z^2} = Cx. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старой переменной, получим общий интеграл:

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx \Rightarrow y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2.$$

Потери решений в процессе интегрирования не произошло, так как $z^2 + 1 \neq 0$, $\forall z$, а $x = 0$ не является решением.

Ответ: $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$.

1.4. $xdy - ydx = ydy$. Запишем уравнение в виде

$$(x - y)dy = ydx \quad \text{или} \quad \frac{x}{y} - 1 = \frac{dx}{dy},$$

так что данное уравнение оказывается однородным относительно x и y .

Правая часть $f(x, y) = \frac{x}{y} - 1$ – однородная функция нулевого изменения. Однако в данном случае за свободную переменную удобнее выбрать y , а за искомую функцию $x = x(y)$. Положим:

$$\frac{x}{y} = z \quad \text{или} \quad x = z \cdot y. \quad \text{Тогда} \quad x' = z + y \cdot z'.$$

Подставляя в уравнение выражения для x и x' , получаем:

$$z - 1 = z + y \cdot z'.$$

Приводя подобные и разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dy}{y} = -dz.$$

Отсюда интегрированием находим

$$\ln y = \ln C - z \quad \text{или} \quad y = Ce^{-z}.$$

Заменяя z на $\frac{x}{y}$, получаем общий интеграл

$$y = Ce^{-\frac{x}{y}}.$$

При делении на y мы могли потерять решение $y=0$. Подстановкой $y=0$ в дифференциальное уравнение убеждаемся, что $y=0$ является решением. В общее решение оно не входит. Таким образом, все решения дифференциального уравнения определяются равенствами:

$$y = Ce^{-\frac{x}{y}}, \quad y=0.$$

Ответ: $y = Ce^{-\frac{x}{y}}, \quad y=0$.

1.5. $xy' - y - 2x \ln x = 0$. Разрешим уравнение относительно производной (разделим каждое слагаемое на x) и запишем уравнение в виде

$$y' - \frac{y}{x} - 2 \ln x = 0 \quad \text{или} \quad y' - \frac{y}{x} = 2 \ln x.$$

Это линейное неоднородное уравнение. Решение можно провести двумя методами: методом Лагранжа и методом Бернулли.

Метод Лагранжа. Интегрируем соответствующее однородное уравнение:

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + \ln |C|.$$

Таким образом общее решение линейного однородного уравнения
 $y = x \cdot C, \forall C.$

Полагаем, что решение неоднородного уравнения совпадает по структуре с решением соответствующего однородного уравнения, т. е. имеет вид:

$$y = x \cdot C(x).$$

Тогда $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot C + \frac{dC}{dx} \cdot x$. Подставим y и $\frac{dy}{dx}$ в исходное уравнение.

Получим:

$$C + \frac{dC}{dx} \cdot x - \frac{C \cdot x}{x} = 2 \ln x \Rightarrow \frac{dC}{dx} \cdot x = 2 \ln x.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$dC = 2 \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow C(x) = 2 \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x + \tilde{C}.$$

Подставим найденное $C(x)$ в решение однородного уравнения, получаем общее решение неоднородного уравнения:

$$y = x(\ln^2 x + \tilde{C}).$$

Метод Бернулли. Решение уравнения $y' - \frac{y}{x} - 2 \ln x = 0$ может быть сведено к последовательному интегрированию двух уравнений с разделяющимися переменными. Будем искать решение в виде произведения двух непрерывных и дифференцируемых функций от x :

$$y = u(x) \cdot v(x).$$

Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u.$$

Подставим u и y' в исходное уравнение и получим:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} - 2 \ln x = 0 \text{ или } u'v + u \left(v' - \frac{v}{x} \right) - 2 \ln x = 0.$$

Имеем одно дифференциальное уравнение, содержащее две неизвестные функции u и v . Так как число неизвестных больше числа урав-

нений, то одно неизвестное можно выбрать произвольно. Выберем $v(x)$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль. Тогда

$$\begin{cases} v' - \frac{v}{x} = 0, \\ u'v - 2\ln x = 0. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы:

$$v' = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |v| = \ln |x| + \ln C \Rightarrow v = Cx$$

Учитывая свободу выбора $v(x)$, можно принять $C = 1$, тогда
 $v = x$.

Полученную функцию $v(x)$ подставим во второе уравнение системы:

$$u'x - 2\ln x = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx}x = 2\ln x \Rightarrow du = 2\frac{\ln x}{x}dx \Rightarrow u(x) = \ln^2 x + C.$$

Так как по предположению $y = u(x) \cdot v(x)$, то окончательно получаем общее решение заданного линейного уравнения

$$y = u(x) \cdot v(x) = (\ln^2 x + C) \cdot x.$$

Ответ: $y = (\ln^2 x + C) \cdot x$.

1.6. $(y^2 + 2y - x)y' = 1$. Разделим обе части уравнения на y' , и, учитывая, что $\frac{1}{y'} = x'$, запишем уравнение в виде:

$$y^2 + 2y - x = \frac{dx}{dy} \text{ или } x' + x = y^2 + 2y.$$

Заметим, что если за свободную переменную выбрать y , а за искомую функцию $x = x(y)$, то получим линейное уравнение относительно функции $x = x(y)$.

Проведем решение методом Лагранжа. Интегрируем соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dx}{dy} = -x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dy \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int dy \Rightarrow \ln |x| = -y + \ln |C|.$$

По свойству логарифмической функции: $-y = \ln e^{-y}$, тогда

$$\ln |x| = \ln |e^{-y}| + \ln |C| \Rightarrow \ln |x| = \ln |Ce^{-y}| \Rightarrow \\ x = C \cdot e^{-y}.$$

Полагаем, что решение неоднородного уравнения совпадает по структуре с решением соответствующего однородного уравнения, т. е. имеет вид:

$$x = C(y) \cdot e^{-y}.$$

Тогда $\frac{dx}{dy} = \frac{dC}{dy} \cdot e^{-y} - C \cdot e^{-y}$. Подставим x и $\frac{dx}{dy}$ в исходное уравнение. Получим:

$$\frac{dC}{dy} \cdot e^{-y} - C \cdot e^{-y} + C \cdot e^{-y} = y^2 + 2y \Rightarrow \frac{dC}{dy} \cdot e^{-y} = y^2 + 2y.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$dC = (y^2 + 2y)e^y dy \Rightarrow \\ C(y) = \int (y^2 + 2y)e^y dy = (y^2 + 2y)e^y - \int (2y + 2)e^y dy = \\ = (y^2 + 2y)e^y - 2(y + 1)e^y + 2 \int e^y dy = \\ = (y^2 + 2y)e^y - 2(y + 1)e^y + 2e^y + \tilde{C} = y^2 e^y + \tilde{C}.$$

Подставим найденное $C(x)$ в решение однородного уравнения, получаем общее решение неоднородного уравнения:

$$x = e^{-y} (y^2 e^y + \tilde{C}).$$

Ответ: $x = y^2 + \tilde{C}e^{-y}$.

1.7. $y' - 4y = 2x \cdot \sqrt{y}$. Уравнение содержит производную функции y' , слагаемое с $y(x)$ в первой степени и слагаемое с $y(x)$ в степени $\frac{1}{2}$, таким образом, имеет место уравнение Бернулли. Решим его методом Бернулли. Будем искать решение в виде произведения двух непрерывных и дифференцируемых функций от x :

$$y = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y' = u'v + uv'.$$

Подставим u и y' в исходное уравнение и получим:

$$u'v + uv' - 4uv = 2x \cdot \sqrt{uv} \text{ или } u'v + u(v' - 4v) = 2x \cdot \sqrt{uv}.$$

Имеем одно дифференциальное уравнение, содержащее две неизвестные функции u и v . Так как число неизвестных больше числа урав-

нений, то одно неизвестное можно выбрать произвольно. Выберем $v(x)$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль. Тогда

$$\begin{cases} v' - 4v = 0, \\ u'v = 2x \cdot \sqrt{uv}. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы:

$$v' - 4v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 4v \Rightarrow \frac{dv}{v} = 4dx \Rightarrow \ln |v| = 4x \Rightarrow v = e^{4x}.$$

Здесь, в первом уравнении $C = 1$. Полученную функцию $v(x)$ подставим во второе уравнение системы:

$$u'e^{4x} = 2x \cdot \sqrt{u} \cdot e^{2x}.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\begin{aligned} \frac{du}{\sqrt{u}} &= 2x \cdot e^{-2x} dx \Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int 2x \cdot e^{-2x} dx \Rightarrow \\ 2\sqrt{u} &= -xe^{-2x} + \int e^{-2x} dx = -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Выражаем u :

$$u = \left(\frac{C - 2xe^{-2x} - e^{-2x}}{4} \right)^2,$$

подставляем в первоначальную подстановку найденные функции $u(x)$ и $v(x)$ и записываем общее решение:

$$y = u(x) \cdot v(x) = \frac{(C - 2xe^{-2x} - e^{-2x})^2 \cdot e^{4x}}{16}.$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{(C \cdot e^{2x} - 2x - 1)^2}{16}.$$

$$1.8. \left(\frac{y}{\cos^2 xy} + \operatorname{tg} x \right) dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \operatorname{tg} y \right) dy = 0. \text{ Имеем:}$$

$$M(x, y) = \frac{y}{\cos^2 xy} + \operatorname{tg} x, \quad N(x, y) = \frac{x}{\cos^2 xy} + \operatorname{tg} y.$$

Проверим условие полного дифференциала:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2(xy)} + \frac{2xy \sin(xy)}{\cos^3(xy)},$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2(xy)} + \frac{2xy \sin(xy)}{\cos^3(xy)}.$$

Так как условие $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ выполнено, то уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т. е. левая часть этого уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

$$\begin{aligned} M(x, y)dx + N(x, y)dy &= dU(x, y) \Leftrightarrow \\ U'_x(x, y)dx + U'_y(x, y)dy &= dU(x, y), \end{aligned}$$

откуда следует система:

$$\begin{cases} U'_x(x, y) = M(x, y), \\ U'_y(x, y) = N(x, y). \end{cases}$$

Подставим в систему наши данные. Из первого уравнения:

$$\begin{aligned} U'_x(x, y) &= \frac{y}{\cos^2 xy} + \operatorname{tg} x \Rightarrow \\ U(x, y) &= \int \left(\frac{y}{\cos^2(xy)} + \operatorname{tg} x \right) dx = \operatorname{tg}(xy) - \ln |\cos x| + \varphi(y). \end{aligned}$$

Подставим полученную функцию во второе уравнение системы:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{tg}(xy) - \ln |\cos x| + \varphi(y)) = \frac{x}{\cos^2(xy)} + \varphi'(y), \\ \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y) = \frac{x}{\cos^2(xy)} + \operatorname{tg} y. \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{x}{\cos^2(xy)} + \varphi'(y) = \frac{x}{\cos^2(xy)} + \operatorname{tg} y, \\ \Rightarrow \varphi'(y) = \operatorname{tg} y, \Rightarrow \varphi(y) = -\ln |\cos y| + C \end{aligned}$$

Таким образом, получили:

$$U(x, y) = \operatorname{tg}(xy) - \ln |\cos x| + \varphi(y) = \operatorname{tg}(xy) - \ln |\cos x| - \ln |\cos y| + C.$$

и общий интеграл уравнения будет иметь вид:

$$\operatorname{tg}(xy) - \ln |\cos x| - \ln |\cos y| = C.$$

Существуют и другие способы нахождения функции $u(x, y)$. Например, она может быть найдена по одной из следующих формул, которые появляются при изучении свойств криволинейных интегралов II рода:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy + C$$

где (x_0, y_0) – любая точка области D непрерывности функций

$M(x, y)$, $N(x, y)$, а интеграл $\int_{x_0}^x M(x, y) dx \left(\int_{y_0}^y N(x, y) dy \right)$ вычисляется в

предположении, что $y(x)$ является константой.

Ответ: $\operatorname{tg}(xy) - \ln |\cos x| - \ln |\cos y| = C$.

Задание 2. Решите задачи Коши:

2.1. $(2e^y - x)y' = 1, \quad y(2) = 0;$

2.2. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y, \quad y(1) = 0.$

Решение

2.1. $(2e^y - x)y' = 1, \quad y(2) = 0$. Разделим обе части уравнения на y' , и учитывая, что $\frac{1}{y'} = x'$, запишем уравнение в виде:

$$2e^y - x = x'.$$

Это линейное уравнение относительно функции $x=x(y)$. Найдем общее решение методом Бернулли. Будем искать решение в виде произведения двух непрерывных и дифференцируемых функций от y :

$$x = u(y) \cdot v(y).$$

Тогда

$$x' = u' \cdot v + v' \cdot u \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy} \cdot v + \frac{dv}{dy} \cdot u.$$

Подставим x и x' в исходное уравнение и получим:

$$u' \cdot v + v' \cdot u + uv = 2e^y \quad \text{или} \quad u' \cdot v + u(v' + v) = 2e^y.$$

Имеем одно дифференциальное уравнение, содержащее две неизвестные функции u и v . Так как число неизвестных больше числа уравнений, то одно неизвестное можно выбрать произвольно. Выберем $v(y)$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль.

Тогда

$$\begin{cases} v' + v = 0, \\ u'v = 2e^y. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы:

$$v' = -v \Rightarrow \frac{dv}{dy} = -v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -dy \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int dy \Rightarrow \ln |v| = -y \Rightarrow \\ v = e^{-y}.$$

Здесь $C = 1$. Полученную функцию $v(x)$ подставим во второе уравнение системы:

$$u'e^{-y} = 2e^y \Rightarrow \frac{du}{dy} = 2e^{2y} \Rightarrow du = 2e^{2y} dy \Rightarrow u = e^{2y} + C.$$

Так как по предположению $x = u(y) \cdot v(y)$, то окончательно получаем общее решение заданного линейного уравнения

$$x = uv = e^{-y}(e^{2y} + C) \text{ или } x = e^y + Ce^{-y}.$$

Теперь найдем частное решение, удовлетворяющее условию $y(2) = 0$. Подставляя в общее решение начальные значения $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, находим

$$2 = e^0 + Ce^{-0} \Rightarrow 1 = C.$$

Следовательно, искомым частным решением уравнения будет функция

$$x = e^y + e^{-y}.$$

2.2. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$, $y(1) = 0$. Разделим обе части уравнения на x и разрешим его относительно производной:

$$y' = \frac{4y}{x} + 2x\sqrt{y}.$$

Имеет место уравнение Бернулли относительно функции $y = y(x)$. Решим его методом Бернулли. Положим $y = u(x) \cdot v(x)$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим y и y' в исходное уравнение и получим:

$$u'v + uv' = \frac{4uv}{x} + 2x\sqrt{uv} \text{ или } u'v + u(v' - \frac{4v}{x}) = 2x\sqrt{uv}.$$

Имеем одно дифференциальное уравнение, содержащее две неизвестные функции u и v . Так как число неизвестных больше числа уравнений, то одно неизвестное можно выбрать произвольно. Выберем $v(x)$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль. Тогда

$$\begin{cases} v' = \frac{4v}{x}, \\ u'v = 2x\sqrt{uv}. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{4v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{4dx}{x} \Rightarrow \ln |v| = 4 \ln |x| \Rightarrow v = x^4.$$

Здесь, в первом уравнении $C = 1$. Полученную функцию $v(x)$ подставим во второе уравнение системы:

$$u'x^4 = 2x\sqrt{u}\sqrt{x^4} \Rightarrow u'x = 2\sqrt{u}.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = 2 \frac{dx}{x} \Rightarrow 2\sqrt{u} = 2 \ln |x| + 2C \Rightarrow u = (\ln |x| + C)^2.$$

Тогда общее решение: $y = u(x) \cdot v(x) = x^4 (\ln |x| + C)^2$.

Теперь найдем частное решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 0$. Подставляя в общее решение начальные значения $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, находим

$$0 = 1 \cdot (\ln 1 + C)^2 \Rightarrow C = 0.$$

Следовательно, искомым частным решением уравнения будет функция

$$y = x^4 \ln^2 |x|.$$

Задание 3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений высших порядков:

3.1. $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x};$

3.2. $2yy'' = y^2 + (y')^2;$

3.3. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1;$

3.4. $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x};$

3.5. $y'' + 2y' + 3y = e^x \cos 3x;$

3.6. $y'' + 6y' + 8y = \frac{4}{e^{4x} + e^{2x}}.$

При решении данного задания будем пользоваться следующими таблицами. Приведённая ниже таблица 1 описывает структуру формирования фундаментальной системы решений (ФСР) линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от корня характеристического уравнения.

Таблица 1

Фундаментальная система решений

Вид корня	ФСР
1. $k \in \mathbb{R}$ кратность 1	$y = e^{kx}$
2. $k = a \pm bi \in \mathbb{C}$	$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_2 = e^{ax} \sin bx$
3. $k \in \mathbb{R}$ кратность r	$y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}, y_3 = x^2 e^{kx}, \dots, y_r = x^{r-1} e^{kx}$
4. $k = a \pm bi \in \mathbb{C}$ кратность r	$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_3 = xe^{ax} \cos bx, \quad \dots, \quad y_{2r-1} = x^{r-1} e^{ax} \cos bx$ $y_2 = e^{ax} \sin bx, \quad y_4 = xe^{ax} \sin bx, \quad \dots, \quad y_{2r} = x^{r-1} e^{ax} \sin bx$

Таблица 2 описывает структуру частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами для специальной правой части $f(x)$.

Таблица 2

Специальная правая часть $f(x) = e^{\alpha x}(P_n \cos \beta x + Q_m \sin \beta x)$

Корень характеристического уравнения k	Частное решение $\tilde{y}$
1. $k \neq \alpha \pm \beta i$	$\tilde{y} = e^{\alpha x} (A_l \cos \beta x + B_l \sin \beta x),$ $l = \max(m, n)$
2. $k = \alpha \pm \beta i$	$\tilde{y} = x^r e^{\alpha x} (A_l \cos \beta x + B_l \sin \beta x),$ $l = \max(m, n)$

Будьте внимательны и не путайте функцию $f(x) = \operatorname{tg} \beta x$ и *специальную правую часть*, т. к. $\operatorname{tg} \beta x = \frac{\sin \beta x}{\cos \beta x}$, специальная правая часть – это линейная комбинация $\sin \beta x$ и $\cos \beta x$ **в первой степени** с полиномами.

Решение

3.1. $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}.$

Это уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка, допускающим понижение порядка. Так как общий вид уравнения можно представить в виде функции

$$F(x, y', y'') = 0,$$

зависящей от свободной переменной и производных искомой функции. Полагаем $y' = t(x)$, тогда $y'' = t'(x)$ и уравнение принимает вид:

$$xt' = t + x \sin \frac{t}{x} \text{ или } t' = \frac{t}{x} + \sin \frac{t}{x}.$$

Это однородное уравнение, так как правая часть – функция нулевой степени однородности. Действительно,

$$f(\alpha x, \alpha t) = \frac{\alpha t}{\alpha x} + \sin \frac{\alpha t}{\alpha x} = \frac{t}{x} + \sin \frac{t}{x} = f(x, t).$$

С помощью подстановки $\frac{t}{x} = z$ или $t = zx \Rightarrow t' = z + xz'$ сведем уравнение к уравнению с разделяющимися переменными:

$$z + xz' = z + \sin z \Rightarrow xz' = \sin z \Rightarrow$$

$$x \frac{dz}{dx} = \sin z \Rightarrow \frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dz}{\sin z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln \left| \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right| = \ln |x| + \ln C_1 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{z}{2} = C_1 x.$$

Выразим z и вернемся к старой переменной: $z = 2 \operatorname{arctg}(C_1 x) \Rightarrow t = 2x \operatorname{arctg}(C_1 x)$.

Так как $y' = t(x)$, то имеет место уравнение:

$$y' = 2x \operatorname{arctg}(C_1 x) \Rightarrow y = \int 2x \operatorname{arctg}(C_1 x) dx.$$

Интегрированием по частям получаем общее решение:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \operatorname{arctg}(C_1 x) - \int \frac{C_1 x^2}{(C_1 x)^2 + 1} dx = x^2 \operatorname{arctg}(C_1 x) - \frac{1}{C_1} \int \frac{(C_1 x)^2 + 1 - 1}{(C_1 x)^2 + 1} dx = \\ &= x^2 \operatorname{arctg}(C_1 x) - \frac{1}{C_1} \left(\int dx - \int \frac{1}{(C_1 x)^2 + 1} dx \right) = \\ &= x^2 \operatorname{arctg}(C_1 x) - \frac{x}{C_1} + \frac{1}{C_1^2} \operatorname{arctg}(C_1 x) + C_2. \end{aligned}$$

Обратите внимание, для уравнения второго порядка общее решение содержит две произвольные постоянные C_1, C_2 .

3.2. $2yy'' = y^2 + (y')^2$.

Это уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка, допускающим понижение порядка. Так как общий вид уравнения можно представить в виде автономной функции

$$F(y, y', y'') = 0,$$

(нет в явном виде зависимости от свободной переменной), полагаем $y' = p(y)$, тогда $y'' = p'(y) \cdot y' = p'p$ и уравнение принимает вид:

$$2yp'p = y^2 + p^2 \text{ или } p' = \frac{y}{2p} + \frac{p}{2y}.$$

Это уравнение однородное, так как правая часть – однородная функция нулевой степени однородности. Кроме того, это уравнение Бернулли, т. к. правая часть – два слагаемых, каждое из которых содержит искомую функцию $p(y)$ в первой степени и в минус первой степени. Решим уравнение методом Бернулли. Будем искать решение в виде произведения двух непрерывных и дифференцируемых функций от x :

$$p = u(y) \cdot v(y) \Rightarrow p' = u'v + uv'.$$

Подставим p и p' в исходное уравнение и получим:

$$u'v + uv' = \frac{y}{2uv} + \frac{uv}{2y} \Rightarrow \begin{cases} v' = \frac{v}{2y}, \\ u'v = \frac{y}{2uv}. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{2y} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dy}{2y} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} \Rightarrow$$

Учитывая свободу выбора $v(x)$, можно принять $C = 1$, тогда

$$\ln v = \frac{1}{2} \ln y \Rightarrow \ln v = \ln y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = \sqrt{y}.$$

Полученную функцию $v(y)$ подставим во второе уравнение системы:

$$\frac{\sqrt{y} du}{dy} = \frac{y}{2u\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{1}{2u} \Rightarrow 2u du = dy \Rightarrow u^2 = y + C_1 \Rightarrow u = \pm \sqrt{y + C_1}.$$

Так как по предположению $p = u \cdot v$, то получаем

$$p = u(y) \cdot v(y) = \pm \sqrt{y + C_1} \cdot \sqrt{y}.$$

Возвращаясь к исходной функции $y' = p(y)$, запишем еще одно уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{y + C_1} \cdot \sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y + C_1} \cdot \sqrt{y}} = \pm dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y + C_1} \cdot \sqrt{y}} = \pm \int dx.$$

Введем новую переменную $\left| \begin{array}{l} \sqrt{y} = t, \\ y = t^2 \Rightarrow dy = 2tdt. \end{array} \right|$

Тогда

$$\pm x = \int \frac{2tdt}{\sqrt{t^2 + C_1} \cdot t} = 2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + C_1}} = 2 \ln |t + \sqrt{t^2 + C_1}| + C_2.$$

Возвращаясь к старой переменной, запишем общий интеграл:

$$\pm x = 2 \ln |\sqrt{y} + \sqrt{y + C_1}| + C_2.$$

3.3. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$.

Это линейное неоднородное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Будем искать его общее решение как суперпозицию общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $y = y_{oo} + \tilde{y}$.

Запишем соответствующее однородное уравнение:

$$3y^{IV} + y''' = 0.$$

Его характеристическое уравнение:

$$3k^4 + k^3 = 0 \Rightarrow k^3(3k + 1) = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $k_{1,2,3} = 0 \in R$, $k = -\frac{1}{3} \in R$ из множества действительных чисел. Причем первый корень имеет кратность $r = 3$. Фундаментальную систему решений удобно находить по таблице 1:

$$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2, y_4 = e^{-\frac{1}{3}x}.$$

Общее решение однородного уравнения $y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4$:

$$y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-\frac{1}{3}x}.$$

Найдем частное решение $\tilde{y}$. Это удобно делать по таблице 2. Правая часть уравнения $f(x) = 6x - 1$ имеет специальный вид $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$. Поэтому найдем частное решение неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов: $\tilde{y} = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$, где α равно или не равно (проверяем) корню характеристического уравнения k , r – кратность корня. Сравним $f(x) = 6x - 1$ и $f(x) = e^{\alpha x} P_1(x)$ и определим α и степень полинома $P_n = 6x - 1$: $\alpha = 0$, причем он совпадает с корнем $k=0$ кратности $r=3$. $P(x) = 6x - 1$ – полином первой степени $\Rightarrow Q_1(x) = Ax + B$.

Тогда

$$\tilde{y} = x^3 e^{0x} (Ax + B) = Ax^4 + Bx^3.$$

Найдем четыре производные $\tilde{y}$:

$$\tilde{y}' = 4Ax^3 + 3Bx^2,$$

$$\tilde{y}'' = 12Ax^2 + 6Bx,$$

$$\tilde{y}''' = 24Ax + 6B,$$

$$\tilde{y}^{IV} = 24A,$$

и подставим в исходное уравнение $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$:

$$3 \cdot 24A + 24Ax + 6B = 6x - 1.$$

Приравнявая коэффициенты при равных степенях x левой и правой части, находим коэффициенты A и B .

$$\begin{array}{l|l} x^1 & 24A = 6, \\ x^0 & 72A + 6B = -1, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1/4, \\ B = -19/6. \end{array}$$

Таким образом, частное решение:

$$\tilde{y} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{6}x^3.$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y = y_{oo} + \tilde{y} = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{6}x^3.$$

3.4. $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}$.

Это линейное неоднородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Будем искать его общее решение как суперпозицию общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $y = y_{oo} + \tilde{y}$.

Запишем соответствующее однородное уравнение:

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Его характеристическое уравнение:

$$k^3 + 2k^2 + k = 0 \Rightarrow k(k+1)^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $k_1 = 0 \in R$, $k_{2,3} = -1 \in R$. Причем второй корень имеет кратность $r = 2$. Согласно таблице 1 фундаментальная система решений:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y_3 = xe^{-x}.$$

Общее решение однородного уравнения $y_{oo} = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$:

$$y_{oo} = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x}.$$

Найдем частное решение $\tilde{y}$. Правая часть уравнения $f(x) = (18x + 21)e^{2x}$ является произведением многочлена и показательной функции, т. е. имеет специальный вид $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$.

$$f(x) = (18x + 21)e^{2x} \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 0, n = 1$$

Согласно таблице 2: $\tilde{y} = x^r e^{\alpha x} Q_t(x)$, где $\alpha \pm \beta i$ равно или не равно (проверяем) корню характеристического уравнения k , r – кратность корня, t – степень многочлена $P_n = (18x + 21)$. Число $\alpha \pm \beta i = 2$ не совпадает ни с одним корнем k характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде:

$$\tilde{y} = x^0 e^{2x} (Ax + B) = (Ax + B)e^{2x}.$$

Найдем четыре производные $\tilde{y}$:

$$\tilde{y}' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} + 2Be^{2x} = (A + 2Ax + 2B)e^{2x},$$

$$\tilde{y}'' = (4A + 4Ax + 4B)e^{2x},$$

$$\tilde{y}''' = (8A + 8Ax + 8B)e^{2x}$$

$$\text{и подставим в исходное уравнение } y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}: \\ (8A + 8Ax + 8B)e^{2x} + 2(4A + 4Ax + 4B)e^{2x} + (A + 2Ax + 2B)e^{2x} = (18x + 21)e^{2x}.$$

Разделим каждое слагаемое на e^{2x} и приведем подобные:

$$17A + 18Ax + 18B = 18x + 21.$$

Приравнявая коэффициенты при равных степенях x левой и правой частей, находим коэффициенты A и B .

$$\begin{array}{l|l} x^1 & 18A = 18, \\ x^0 & 17A + 18B = 21, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1, \\ B = 2/9. \end{array}$$

Таким образом, частное решение:

$$\tilde{y} = \left(x + \frac{2}{9}\right)e^{2x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y = y_{oo} + \tilde{y} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + \left(x + \frac{2}{9}\right)e^{2x}.$$

3.5. $y'' + 2y' + 3y = e^x \cos 3x$.

Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Будем искать его общее решение как суперпозицию общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $y = y_{oo} + \tilde{y}$.

Запишем соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + 2y' + 3y = 0.$$

Его характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 3 = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}i \in C$ принадлежат множеству комплексных чисел. Оба корня имеют кратность $r = 1$. Согласно таблице 1 фундаментальная система решений:

$$y_1 = e^{-x} \cos \sqrt{2}x, \quad y_2 = e^{-x} \sin \sqrt{2}x.$$

Общее решение однородного уравнения $y_{00} = C_1 y_1 + C_2 y_2$:

$$y_{00} = C_1 e^{-x} \cos \sqrt{2}x + C_2 e^{-x} \sin \sqrt{2}x.$$

Найдем частное решение $\tilde{y}$. Правая часть уравнения $f(x) = e^x \cos 3x$ имеет специальный вид $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x)$. Для удобства сравнения нашей правой части с табличным видом $f(x)$, запишем ее с недостающими коэффициентами – полиномами $P_n = 1$, $R_m = 0$:

$$f(x) = e^x (1 \cdot \cos 3x + 0 \cdot \sin 3x) \Rightarrow \alpha \pm \beta i = 1 \pm 3i, \quad n = 0.$$

При этом $\alpha \pm \beta i = 1 \pm 3i$ не совпадает ни с одним корнем k характеристического уравнения. Согласно таблице 2 частное решение ищем в виде $\tilde{y} = x^r e^{\alpha x} (Q_t(x) \cos \beta x + S_t(x) \sin \beta x)$, где $t = \max(n, m)$.

Тогда

$$\tilde{y} = e^x (A \cdot \cos 3x + B \cdot \sin 3x).$$

Находим две производные от $\tilde{y}$:

$$\begin{aligned} \tilde{y}' &= e^x (A \cos 3x + B \sin 3x) + e^x (-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) = \\ &= ((A + 3B) \cos 3x + (B - 3A) \sin 3x) e^x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}'' &= ((A + 3B) \cos 3x + (B - 3A) \sin 3x) e^x + ((-3A - 9B) \sin 3x + (3B - 9A) \cos 3x) e^x = \\ &= ((-8A + 6B) \cos 3x + (-8 - 6A) \sin 3x) e^x \end{aligned}$$

и подставляем в исходное уравнение $y'' + 2y' + 3y = e^x \cos 3x$:

$$\begin{aligned} &((-8A + 6B) \cos 3x + (-8 - 6A) \sin 3x) e^x + 2((A + 3B) \cos 3x + (B - 3A) \sin 3x) e^x + \\ &+ 3e^x (A \cdot \cos 3x + B \cdot \sin 3x) = e^x \cos 3x \Rightarrow \\ &((-3A + 12B) \cos 3x + (-3B - 12A) \sin 3x) = \cos 3x. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при $\sin 3x$ и $\cos 3x$ левой и правой частей, находим коэффициенты A и B .

$$\begin{cases} \sin 3x | -3B - 12A = 0, \\ \cos 3x | -3A + 12B = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/51, \\ B = 4/51. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение:

$$\tilde{y} = e^x \left(-\frac{1}{51} \cos 3x + \frac{4}{51} \sin 3x \right).$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y = y_{00} + \tilde{y} = C_1 e^{-x} \cos \sqrt{2}x + C_2 e^{-x} \sin \sqrt{2}x - \frac{e^x}{51} \cos 3x + \frac{4e^x}{51} \sin 3x.$$

$$\mathbf{3.6.} \quad y'' + 6y' + 8y = \frac{4}{e^{4x} + e^{2x}}.$$

Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью общего вида. Будем искать его общее решение методом вариации произвольной постоянной.

Запишем соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + 6y' + 8y = 0.$$

Его характеристическое уравнение:

$$k^2 + 6k + 8 = 0 \text{ или } (k + 2)(k + 4) = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $k_1 = -2$, $k_2 = -4$ принадлежат множеству вещественных чисел. Оба корня имеют кратность $r = 1$. Согласно таблице 1 фундаментальная система решений:

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = e^{-4x}.$$

Общее решение однородного уравнения $y_{00} = C_1 y_1 + C_2 y_2$:

$$y_{00} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-4x}.$$

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение. Его общее решение может быть записано в виде

$$y = C_1(x) e^{-2x} + C_2(x) e^{-4x}.$$

Система для нахождения неизвестных функций $C_1(x), C_2(x)$ будет для данного уравнения иметь вид

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-2x} + C_2'(x) e^{-4x} = 0, \\ -2C_1'(x) e^{-2x} - 4C_2'(x) e^{-4x} = \frac{4}{e^{4x} + e^{2x}}. \end{cases}$$

Из этой системы находим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)e^{-2x}, \\ -C_2'(x)e^{-4x} = \frac{2}{e^{4x} + e^{2x}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = \frac{2}{e^{2x} + 1}, \\ C_2'(x) = \frac{-2e^{2x}}{e^{2x} + 1}. \end{cases}$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = \int \frac{dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{1 + e^{2x} - e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx = x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + \tilde{C}_1.$$

$$C_2(x) = -2 \int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} + 1} = -\ln(e^{2x} + 1) + \tilde{C}_2.$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ – произвольные постоянные. Подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в общее решение неоднородного уравнения и получим общее решение:

$$y = \left(x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + \tilde{C}_1\right)e^{-2x} + \left(-\ln(e^{2x} + 1) + \tilde{C}_2\right)e^{-4x}$$

или

$$y = \tilde{C}_1 e^{-2x} + \tilde{C}_2 e^{-4x} + \left(x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1)\right)e^{-2x} - \ln(e^{2x} + 1)e^{-4x}$$

Задание 4. Решите задачи Коши:

4.1. $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$;

4.2. $y'' + 9y = \cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

4.3. $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$.

Решение

4.1. $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$.

Найдем общее решение. Имеем линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \text{ или } (k - 4)(k - 1) = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $k_1 = 4 \in R$, $k_2 = 1 \in R$. Согласно таблице 1 фундаментальная система решений:

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{4x}.$$

Общее решение однородного уравнения $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}.$$

Теперь найдем частное решение, удовлетворяющее условиям $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$. Найдем производную от общего решения:

$$y' = C_1 e^x + 4C_2 e^{4x}.$$

Подставляя в общее решение и его производную начальные значения $x_0 = 0$, $y_0 = 5$, $y'_0 = 8$, находим:

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2, \\ 8 = C_1 + 4C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3C_2, \\ 8 = C_1 + 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = C_2, \\ 4 = C_1. \end{cases}$$

Следовательно, искомым частным решением уравнения будет функция

$$y = 4e^x + e^{4x}.$$

4.2. $y'' + 9y = \cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Имеем линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Будем искать его общее решение как суперпозицию общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $y = y_{00} + \tilde{y}$. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $y'' + 9y = 0$

$$k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 3i \in C.$$

Фундаментальная система решений: $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$.

Общее решение однородного уравнения $y_{00} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

Правая часть уравнения $f(x) = \cos 3x$ имеет специальный вид $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x)$.

Согласно таблице 2:

$$\tilde{y} = x^r e^{\alpha x} (Q_t(x) \cos \beta x + S_t(x) \sin \beta x),$$

где $\alpha \pm \beta i$ равно или не равно корню k характеристического уравнения (будем проверять), r – кратность корня; $t = \max(n, m)$. Для удобства сравнения правой части, запишем ее с недостающими коэффициентами – полиномами: $f(x) = e^{0x} (1 \cdot \cos 3x + 0 \cdot \sin 3x)$ и сравним со специальной правой частью из таблицы 2: $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x)$.

По виду $f(x)$ определим $\alpha \pm \beta i = 0 \pm 3i$, он совпадает с корнем k характеристического уравнения (кратность $r=1$), степени полиномов $P_n = 1$, $R_m = 0$. Видим, что максимальная степень полиномов $P(x)$ и $R(x)$ нулевая. Следовательно, $Q_0(x) = A$ и $S_0(x) = B$. Тогда

$$\tilde{y} = x(A \cdot \cos 3x + B \cdot \sin 3x).$$

Находим две производные от $\tilde{y}$:

$$\tilde{y}' = A \cos 3x + B \sin 3x + x(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x)$$

$$\tilde{y}'' = (A + 3B) \cos 3x + (B - 3A) \sin 3x + x(-9A \cos 3x - 9B \sin 3x)$$

и подставляем в исходное уравнение $y'' + 9y = \cos 3x$:

$$\begin{aligned}(A + 3B)\cos 3x + (B - 3A)\sin 3x + x(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x) + \\ + 9x(A \cdot \cos 3x + B \cdot \sin 3x) = \cos 3x \Rightarrow \\ (A + 3B)\cos 3x + (B - 3A)\sin 3x = \cos 3x\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при $\sin 3x$ и $\cos 3x$ левой и правой частей, находим коэффициенты A и B .

$$\left. \begin{array}{l} \sin 3x \\ \cos 3x \end{array} \right| \begin{array}{l} B - 3A = 0, \\ A + 3B = 1, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1/10, \\ B = 3/10. \end{array}$$

Таким образом, частное решение:

$$\tilde{y} = x \left(\frac{1}{10} \cos 3x + \frac{3}{10} \sin 3x \right).$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y = y_{oo} + \tilde{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x \left(\frac{1}{10} \cos 3x + \frac{3}{10} \sin 3x \right).$$

Теперь найдем частное решение, удовлетворяющее условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Найдем производную от общего решения:

$$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x + \frac{1}{10} \cos 3x + \frac{3}{10} \sin 3x + x \left(\frac{-3}{10} \sin 3x + \frac{9}{10} \cos 3x \right).$$

Подставляя в общее решение и его производную начальные значения $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$, находим:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = C_1, \\ 0 = 3C_2 + \frac{1}{10}, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = C_1, \\ -\frac{1}{30} = C_2. \end{array} \right.$$

Следовательно, искомым частным решением уравнения будет функция

$$y = \cos 3x - \frac{1}{30} \sin 3x + x \left(\frac{1}{10} \cos 3x + \frac{3}{10} \sin 3x \right).$$

$$4.3. \quad y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

Имеем линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью общего вида. Будем искать его общее решение методом вариации произвольной постоянной.

Запишем соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + 4y = 0.$$

Его характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 2i \in C.$$

Фундаментальная система решений: $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$.

Общее решение однородного уравнения $y_{00} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение. Его общее решение может быть записано в виде

$$y = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x.$$

Система для нахождения неизвестных функций $C_1(x), C_2(x)$ будет для данного уравнения иметь вид

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x) \sin 2x + 2C_2'(x) \cos 2x = \frac{4}{\sin 2x}. \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x = 0, \\ -C_1'(x) \sin 2x + C_2'(x) \cos 2x = \frac{2}{\sin 2x}. \end{cases}$$

Из этой системы находим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. Для этого умножим первое уравнение на $\sin 2x$, второе – на $\cos 2x$ и сложим:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x) \frac{\sin 2x}{\cos 2x}, \\ C_2'(x) = \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -2, \\ C_2'(x) = \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x}. \end{cases}$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = -2x + C_1$$

$$C_2(x) = 2 \int \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx = \ln |\sin 2x| + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в общее решение неоднородного уравнения и получим общее решение:

$$y = (-2x + C_1) \cos 2x + (\ln |\sin 2x| + C_2) \sin 2x.$$

Теперь найдем частное решение, удовлетворяющее условиям

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi. \text{ Найдем производную от общего решения:}$$

$$y' = -2 \cos 2x - 2(-2x + C_1) \sin 2x + 2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \sin 2x + 2(\ln |\sin 2x| + C_2) \cos 2x.$$

Подставляя в общее решение и его производную начальные значения $x_0 = \pi / 4$, $y_0 = 2$, $y'_0 = \pi$, находим:

$$\begin{cases} 2 = \left(-\frac{\pi}{2} + C_1\right) \cos \frac{\pi}{2} + (\ln |\sin \frac{\pi}{2}| + C_2) \sin \frac{\pi}{2}, \\ \pi = -2 \cos \frac{\pi}{2} - 2 \left(-\frac{\pi}{2} + C_2\right) \sin \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + 2 (\ln |\sin \frac{\pi}{2}| + C_2) \cos \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = C_2, \\ \pi = -2 \left(-\frac{\pi}{2} + C_1\right). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = C_2, \\ 0 = C_1. \end{cases}$$

Следовательно, искомым частным решением уравнения будет функция

$$y = -2x \cos 2x + 2 \sin 2x + \sin 2x \cdot \ln |\sin 2x|.$$

Задание 5. Укажите структуру общего решения уравнения:

$$y'' + 3y' - 4y = e^{3x} \sin x + e^x.$$

Решение

Имеем линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Запишем соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + 3y' - 4y = 0.$$

Его характеристическое уравнение:

$$k^2 + 3k - 4 = 0 \Rightarrow (k + 4)(k - 1) = 0$$

имеет корни $k_1 = -4$, $k_2 = 1$.

Фундаментальная система решений: $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = e^x$. Общее решение однородного уравнения.

$$y_{00} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x.$$

Правая часть $f(x)$ не имеет специального вида, но она состоит из двух слагаемых, каждое из которых имеет специальный вид. Обозначим $f_1(x) = e^{3x} \sin x$, $f_2(x) = e^x$ и найдем частные решения $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ неоднородных уравнений

$$y'' + 3y' - 4y = e^{3x} \sin x \text{ и } y'' + 3y' - 4y = e^x.$$

Тогда частное решение $\tilde{y}$ исходного уравнения будет равно сумме этих частных решений, т.е.

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2.$$

1) $f_1(x) = e^{3x} \sin x \Rightarrow \alpha \pm \beta i = 3 \pm i \neq k$, $P_n(x) = 1 \Rightarrow n = 0$. Тогда частное решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)$ следует искать в виде

$$\tilde{y}_1 = e^{3x}(A \cos x + B \sin x).$$

2) $f_2(x) = e^x \Rightarrow \alpha \pm \beta i = 1 \pm 0i = k$ ($r = 1$), $P_n(x) = 1 \Rightarrow n = 0$. Тогда частное решение неоднородного уравнения с правой частью $f_2(x)$ следует искать в виде

$$\tilde{y}_2 = Dxe^x.$$

По условию задачи необходимо указать только структуру общего решения (без вычисления коэффициентов). Тогда структура общего решения:

$$y = y_{00} + \tilde{y} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x + e^{3x}(A \cos x + B \sin x) + Dxe^x.$$

**4.8. Варианты индивидуального задания № 4
«Числовые и функциональные ряды»****Вариант 1**

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5};$

1.2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4 - 5n}{n(n-1)(n-2)}.$

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n \sqrt{n}}{n \sqrt{n}};$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1} + n - 1};$

2.3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!};$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2};$

2.5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln^2 (3n+1)};$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n^2}$ с точностью $\alpha = 0,01$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^{-1/5}};$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n};$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3 (x+3)^{2n}}{2n+3}.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1} \cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}, \quad x \in [0, 2].$$

6. Найти сумму ряда:

6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^{n-1};$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (4n^2 + 9n + 5) x^{n+1}.$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 .

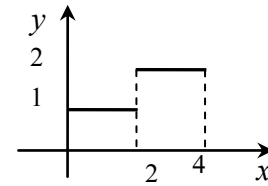
7.1. $f(x) = x^2 \cos(x-3), \quad x_0 = 0;$

7.2. $f(x) = \frac{9}{20 - 2x - x^2}, \quad x_0 = -1.$

8. Вычислить интеграл $\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx$ с точностью до 0,001.

9. Разложить функцию $y = x^2, \quad x \in (-\pi, \pi]$ в ряд Фурье.

10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, 4]$, в ряд Фурье по синусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.

**Вариант 2**

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5};$

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+3)(n+2)}.$

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{2+(-1)^n}{n^3};$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}};$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}};$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2};$

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln^2(2n+1)};$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ с точностью $\alpha = 0,01$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n;$ 4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} x^{4n};$ 4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)5^n}.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}, \quad x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

6. Найти сумму ряда:

6.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)};$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 7n + 4)x^n.$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

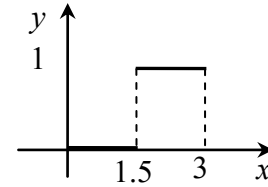
7.1. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4+3x}}, \quad x_0 = 0;$

7.2. $f(x) = \cos(x-3), \quad x_0 = 2.$

8. Вычислить интеграл $\int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx$ с точностью до 0,0001.

9. Разложить функцию $y = x + 1$, $x \in (-\pi, \pi]$ в ряд Фурье.

10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, 3]$, в ряд Фурье по синусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.



Вариант 3

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8};$

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n + 3}{n(n+1)(n+3)}.$

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n\pi/2)}{n(n+1)(n+2)};$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4};$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3 + 1)}{(n+1)!};$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 + 1} \right)^{n^2};$

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)\ln^2(2n+1)};$

2.6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}$ с точностью $\alpha = 0,01$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{(4x+2)^n};$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^{4n};$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \quad x \in [-2, 2].$$

6. Найти сумму ряда:

6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) x^{n+2};$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n + 1) x^{n+3}.$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

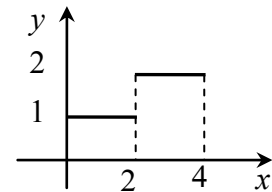
7.1. $f(x) = \ln(1 - 6x^2)$, $x_0 = 0$;

7.2. $f(x) = \frac{x}{x-3}$, $x_0 = -1$.

8. Вычислить интеграл $\int_0^1 \cos x^2 dx$ с точностью до 0,001.

9. Разложить функцию $y = x - 1$, $x \in (-\pi, \pi]$ в ряд Фурье.

10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, 4]$, в ряд Фурье по косинусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.

**Вариант 4**

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8}$;

1.2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$;

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$;

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}$;

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n$;

2.5. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-5) \ln^2(4n-7)}$;

2.6. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln \ln n) \ln n}$.

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)}$ с точностью $\alpha = 0,01$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n (x-2)^n}$;

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3} \right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} x^{2n}$;

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^5} (x-3)^n$.

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2} \right)^n, \quad x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right].$$

6. Найти сумму ряда:

6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{4^n (2n-1)};$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 4n + 3) x^{n+2}.$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

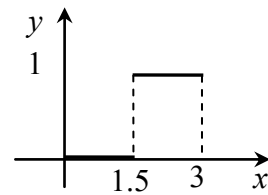
7.1. $f(x) = 2x \cos^2(x/2) - x, x_0 = 0;$

7.2. $f(x) = e^{2x-3}, x_0 = -2.$

8. Вычислить интеграл $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ с точностью до 0,0001.

9. Разложить функцию $y = x, x \in (-\pi, \pi]$ в ряд Фурье.

10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, 3]$, в ряд Фурье по косинусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.



Вариант 5

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3};$

1.2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-1}{(n^2-4)(n+1)}.$

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}};$

2.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}};$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3n+5} \cdot \frac{1}{2^n};$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^{n^2};$

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n+4) \ln^2(5n+2)};$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^3 - n^2 + 1}.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)}$ с точностью $\alpha = 0,01$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot x^n};$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{\sqrt[3]{n}} x^{4n};$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

6. Найти сумму ряда:

$$6.1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1};$$

$$6.2. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 5n + 3) x^n.$$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

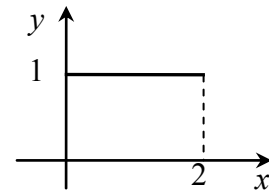
$$7.1. \frac{\sin 2x}{x} - 2, \quad x_0 = 0;$$

$$7.2. f(x) = \ln(x), \quad x_0 = 5.$$

8. Вычислить интеграл $\int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$ с точностью до 0,0001.

9. Разложить функцию $y = x$, $x \in (-2, 2]$ в ряд Фурье.

10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, 2]$, в ряд Фурье по синусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.



Вариант 6

1. Найти сумму ряда:

$$1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{6n^2 - n - 1};$$

$$1.2. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-1}{(n-4)(n-3)(n+1)}.$$

2. Исследовать на сходимость ряды:

$$2.1. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-5}{n(n^2-1)};$$

$$2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg \frac{1+(-1)^n}{2} n}{n^3+2};$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)^2}{n^5 + \ln^4 n};$$

$$2.4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1} \right)^n (n+1)^3;$$

$$2.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1) \ln^2(n\sqrt{5}+2)};$$

$$2.6. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln n}.$$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ с точностью $\alpha = 0,01$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

$$4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+1} \frac{1}{(12x+2)^n}; \quad 4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n} x^{2n}; \quad 4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}.$$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}, x \in [-1, 6].$$

6. Найти сумму ряда:

$$6.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{x^n}; \quad 6.2. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 5n + 3)x^{n+1}.$$

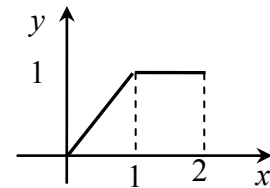
7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

$$7.1. f(x) = \frac{7}{12+x^2}, x_0 = 0; \quad 7.2. f(x) = \cos(x-6), x_0 = 4.$$

8. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\ln(1+x/5)}{x} dx$ с точностью до 0,001.

9. Разложить функцию $y = 1 - x$, $x \in (-\pi, \pi]$ в ряд Фурье.

10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, 2]$, в ряд Фурье по синусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.



Вариант 7

1. Найти сумму ряда:

$$1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}; \quad 1.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}.$$

2. Исследовать на сходимость ряды:

$$2.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2 + \cos n\pi)}{2n^2 - 1}; \quad 2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{n^5 + \sin 2^n};$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg \frac{5}{n}}{n!}; \quad 2.4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1} \right)^{n^3};$$

$$2.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n\sqrt{2}+1)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}; \quad 2.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \arctg(n+1)}.$$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n}$ с точностью $\alpha = 0,01$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)x^{2n}}$; 4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt[4]{3n}} x^{2n}$; 4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n} (x-2)^n$.

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}, \quad [2, 4].$$

6. Найти сумму ряда:

6.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(n-1)}$; 6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 8n + 5) x^{n+2}$.

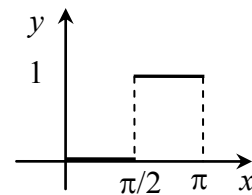
7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

7.1. $f(x) = \frac{x}{27-x^3}$, $x_0 = 0$; 7.2. $f(x) = e^{x^2-2x}$, $x_0 = 1$.

8. Вычислить интеграл $\int_0^{0.2} \sin(25x^2) dx$ с точностью до 0,0001.

9. Разложить функцию $y = 1 - x$, $x \in (-3, 3]$ в ряд Фурье.

10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, \pi]$, в ряд Фурье по синусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.



Вариант 8

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{6n^2 + n - 1}$; 1.2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 4)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3 - 3n}}$; 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n}$;
2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$; 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2}$;
2.5. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-2) \ln(n-3)}$; 2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4 \sqrt{2n+3}}$.

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{3^n}$ с точностью $\alpha = 0,01$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{n+1} \frac{1}{(8x+6)^n}$; 4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{2n} x^{2n}$; 4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$.

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi - x) \cos^2 nx}{\sqrt[4]{n^7 + 1}}, [0, \pi].$$

6. Найти сумму ряда:

6.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1}$;

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 8n + 5) x^n$.

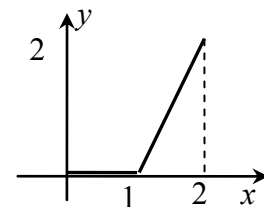
7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

7.1. $f(x) = x \ln(1 - 6x^2)$, $x_0 = 0$; 7.2. $f(x) = \cos(x+1)$, $x_0 = 2$.

8. Вычислить интеграл $\int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx$ с точностью до 0,0001.

9. Разложить функцию $y = -x^2$, $x \in (-\pi, \pi]$ в ряд Фурье.

10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, 2]$, в ряд Фурье по синусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.



Вариант 9

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}$;

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$;

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \cos^2 6n}$;

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}$;

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \arcsin^n \frac{\pi}{4n}$;



$$2.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\ln^2(2n)};$$

$$2.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2}$ с точностью

$\alpha = 0,001$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

$$4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+x)^n}{n+3};$$

$$4.2. \sum_{n=1}^{\infty} 8^n x^{3n};$$

$$4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n (2n-1)}.$$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}, \quad x \in [-1, 3].$$

6. Найти сумму ряда:

$$6.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)};$$

$$6.2. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 7n + 5)x^{n+1}.$$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

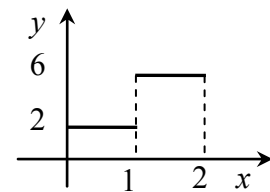
$$7.1. f(x) = (x-1)\sin 5x, \quad x_0 = 0;$$

$$7.2. f(x) = \ln(1-x), \quad x_0 = -1.$$

8. Вычислить интеграл $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$ с точностью до 0,001.

9. Разложить функцию $y = |1-x|$, $x \in (-\pi, \pi]$ в ряд Фурье.

10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, 2]$, в ряд Фурье по синусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.



Вариант 10

1. Найти сумму ряда:

$$1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 8n + 3};$$

$$1.2. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}.$$

2. Исследовать на сходимость ряды:

$$2.1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n^2 + 3n}}{\sqrt{n^2 - n}};$$

$$2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}};$$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2 - 1)}{n!};$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2};$

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \ln^3(2n)};$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{6n}.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}$ с точностью $\alpha = 0,0001$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6x+12)^n}{4^n (n^2+1)};$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} x^n;$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}, \quad x \in [-5, -1].$$

6. Найти сумму ряда:

6.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+2}}{16^n (2n+1)};$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 7n + 5)x^n.$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

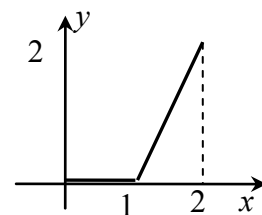
7.1. $f(x) = \frac{\operatorname{ch} 3x - 1}{x^2}, \quad x_0 = 0;$

7.2. $f(x) = \ln(5-x), \quad x_0 = -1.$

8. Вычислить интеграл $\int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx$ с точностью до 0,001.

9. Разложить функцию $y = |x+1|$, $x \in (-\pi, \pi]$ в ряд Фурье.

10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, 2]$, в ряд Фурье по косинусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.



Вариант 11

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 + n - 2};$

1.2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}.$

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arccos \frac{(-1)^n n}{n+1}}{n^2 + 2};$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}};$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!};$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \frac{n}{5^n};$

2.5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)\ln n};$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!!}$ с точностью $\alpha = 0,001$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+12)^n}{5^n(n^3+1)};$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{3n} x^n;$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{(n+1)^2 \ln(n+1)}, \quad [1, 3].$$

6. Найти сумму ряда:

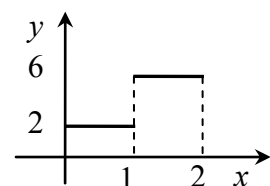
6.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)};$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} n(2n-1)x^{n+2}.$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

7.1. $f(x) = \frac{6}{8+x^2}, \quad x_0 = 0;$

7.2. $f(x) = \cos(x-5), \quad x_0 = 6.$

8. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$ с точностью до 0,001.9. Разложить функцию $y = |x-1|-1, x \in (-\pi, \pi]$ в ряд Фурье.10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, 2]$, в ряд Фурье по косинусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.

Вариант 12

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 4n - 3};$

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+2)(n+1)n}.$

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 n}{n^3 + 5};$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n};$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2};$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{n^2};$

2.5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1) \ln^4(2n+1)};$

2.6. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5} \right)^n$ с точностью $\alpha = 0,001$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(x+1)^n};$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{3n};$

4.3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n(x-2)^n}{(5n-8)^3}.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in [-3, 3]$.

6. Найти сумму ряда:

6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) x^n;$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n + 1) x^n.$

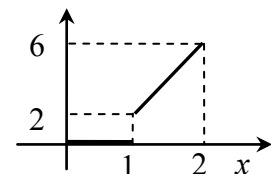
7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

7.1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-x}}, x_0 = 0;$

7.2. $f(x) = \cos(x-4), x_0 = -2.$

8. Вычислить интеграл $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$ с точностью до 0,001.9. Разложить функцию $y = x^2 + 1$, $x \in (-\pi, \pi]$ в ряд Фурье.

10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, 2]$, в ряд Фурье по синусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.



Вариант 13

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3};$

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}.$

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2 - 3};$

2.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \sin \frac{1}{n-1};$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!};$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1} \right)^n (n-1)^2;$

2.5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-3) \ln^2(3n+1)};$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{7^n}$ с точностью $\alpha = 0,0001$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} \cdot (x+1)^n};$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{2n};$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^n}.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}, \quad x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right].$$

6. Найти сумму ряда:

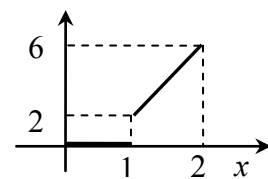
6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)};$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n - 1)x^n.$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

7.1. $f(x) = (x-1)\sin(12x^2), \quad x_0 = 0;$

7.2. $f(x) = \cos(x+3), \quad x_0 = 1.$

8. Вычислить интеграл $\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x} dx$ с точностью до 0,001.9. Разложить функцию $y = 1 - x^2, \quad x \in (-\pi, \pi]$ в ряд Фурье.10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, 2]$, в ряд Фурье по косинусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.

Вариант 14

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 8n + 3};$

1.2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+5}{(n^2-1)(n+2)}.$

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2 - 3};$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n} + 2} \operatorname{arctg} \frac{n+3}{n^2+5};$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n!)};$

2.4. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3} \right)^{n^2};$

2.5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2) \ln^2 n};$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3} \right)^n$ с точностью $\alpha = 0,01$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n^2+1)(x-2)^n};$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n x^{3n};$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x+11)^n}{5^n (n^2+5)}.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n 3^n \ln n}, \quad x \in [-2, 2].$$

6. Найти сумму ряда:

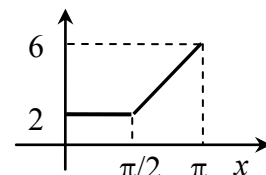
6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n};$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 5n + 4)x^{n+1}.$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

7.1. $f(x) = (3 + e^{-x})^2, \quad x_0 = 0;$

7.2. $f(x) = \sin(x-3), \quad x_0 = 1.$

8. Вычислить интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$ с точностью до 0,001.9. Разложить функцию $y = 1 - x^2, \quad x \in (-2, 2]$ в ряд Фурье.10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, \pi]$, в ряд Фурье по синусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.

Вариант 15

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 20};$

1.2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{8n-10}{(n-1)(n-2)(n+1)}.$

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{n^3}} \sin \frac{2+(-1)^n}{6} \pi;$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} (e^{1/\sqrt{n}} - 1);$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n (n+1)!};$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{2n+1};$

2.5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3) \ln^2(2n)};$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ с точностью $\alpha = 0,01$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 9^n (x-1)^{2n}};$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n};$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+x)^n}{n^n}.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{n^2 4^n}, \quad x \in [-7, -3].$$

6. Найти сумму ряда:

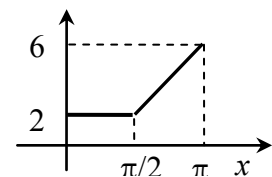
6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)};$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 7n + 4)x^n.$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

7.1. $f(x) = \sin^2(3x^2), \quad x_0 = 0;$

7.2. $f(x) = \sin(x+4), \quad x_0 = -1.$

8. Вычислить интеграл $\int_0^{0,3} e^{-3x^2} dx$ с точностью до 0,001.9. Разложить функцию $y = -x^2, \quad x \in (-1, 1]$ в ряд Фурье.10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, \pi]$, в ряд Фурье по косинусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.

Вариант 16

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{6n^2 - n - 2};$

1.2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n^2-1)}.$

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1};$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 2};$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}};$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{n/2};$

2.5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)\ln^2(n+1)};$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos \frac{\pi}{3\sqrt{n}} \sqrt[3]{3n + \ln n}}.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n)!}$ с точностью $\alpha = 0,01$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x-1)};$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n x^{3n}}{n};$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} (x+5)^n.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}, \quad x \in [-3, -1].$$

6. Найти сумму ряда:

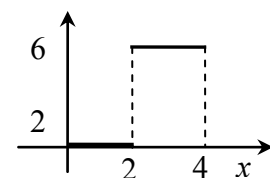
6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{n} \right] x^{2n};$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n - 2) x^{n+1}.$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

7.1. $f(x) = \frac{7}{x-3x^2}, \quad x_0 = 0;$

7.2. $f(x) = e^{3x}, \quad x_0 = -1.$

8. Вычислить интеграл $\int_0^{0,4} \sin(5x/2)^2 dx$ с точностью до 0,0001.9. Разложить функцию $y = |x| + 2, \quad x \in (-\pi, \pi]$ в ряд Фурье.10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, 4]$, в ряд Фурье по синусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.

Вариант 17

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15};$

1.2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-4}{n(n-1)(n-2)}.$

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin \frac{\pi n}{2}}{n^2};$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3};$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1)(2n)!};$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n};$

2.5. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n-1)};$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(3/2)^n}.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot 2n}$ с точностью $\alpha = 0,00001$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{(x+1)^n};$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16^n x^{4n}}{\sqrt[3]{n}};$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

6. Найти сумму ряда:

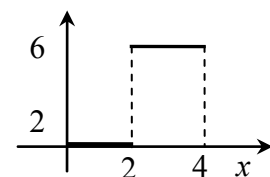
6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right] x^{n-1};$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 2n + 1) x^n.$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

7.1. $f(x) = x^2 \sqrt{4-3x}, \quad x_0 = 0;$

7.2. $f(x) = \ln(3-x), \quad x_0 = -1.$

8. Вычислить интеграл $\int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx$ с точностью до 0,001.9. Разложить функцию $y = |x| - 2, \quad x \in (-1, 1]$ в ряд Фурье.10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, 4]$, в ряд Фурье по косинусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.

Вариант 18

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{2n^2 - 3n - 2};$

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+9}{n(n+1)(n+3)}.$

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{3}}{3^n + 2};$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3}{n^3 + 1};$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n};$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n};$

2.5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}};$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n)! \cdot n!}$ с точностью $\alpha = 0,001$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(1-x)^n};$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \frac{n^2}{4^n};$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!} (x+5)^{2n+1}.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^4 x^{2n}}{2n+1}, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

6. Найти сумму ряда:

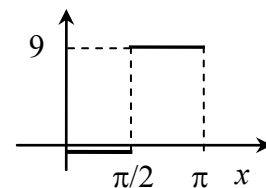
6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)x^{n+1}};$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n - 1)x^{n+1}.$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

7.1. $f(x) = \ln(1+2x-8x^2), \quad x_0 = 0;$

7.2. $f(x) = \cos(x-10), \quad x_0 = 1.$

8. Вычислить интеграл $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$ с точностью до 0,001.9. Разложить функцию $y = |x-2|$, $x \in (-2, 2]$ в ряд Фурье.10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, \pi]$, в ряд Фурье по синусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.

Вариант 19

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6};$

1.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}.$

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + \cos \frac{n\pi}{2})\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7 + 5}};$

2.2. $\sum_{n=3}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n};$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n};$

2.4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n};$

2.5. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-2)\sqrt{\ln^3(n-3)}};$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+4)}.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}$ с точностью $\alpha = 0,001$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{x^n \cdot n^4};$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16^n x^{4n}}{n+1};$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n}, \quad x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right].$$

6. Найти сумму ряда:

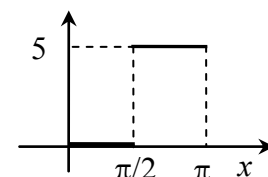
6.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)};$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n + 2)x^{n+2}.$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

7.1. $f(x) = 2x \sin^2(x/2) - x, \quad x_0 = 0;$

7.2. $f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 2.$

8. Вычислить интеграл $\int_0^{0,4} \frac{1 - e^{-x/2}}{x} dx$ с точностью до 0,001.9. Разложить функцию $y = |x + 2|$, $x \in (-2, 2]$ в ряд Фурье.10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, \pi]$, в ряд Фурье по косинусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.

Вариант 20

1. Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9};$

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}.$

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin \frac{n\pi}{4}}{n^2} \operatorname{ctg} \frac{1}{\sqrt{n}};$

2.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(\sqrt[3]{n}-1)(n^4\sqrt{n^3}-1)};$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!};$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\frac{3n^2}{3n^2-1} \right)^{n^3};$

2.5. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)\sqrt{\ln^5(n-2)}};$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$

3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n!}$ с точностью $\alpha = 0,001$.

4. Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-1)^n};$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{64^n x^{3n}}{3(n+3)};$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{4^n}.$

5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^2}, \quad x \in [-6, -4].$$

6. Найти сумму ряда:

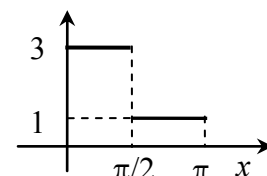
6.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)};$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 4n + 3)x^{n+1}.$

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 :

7.1. $f(x) = (x-1)\operatorname{sh} x, \quad x_0 = 0;$

7.2. $f(x) = \cos(x), \quad x_0 = -1.$

8. Вычислить интеграл $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$ с точностью до 0,001.9. Разложить функцию $y = |x+1|+1, \quad x \in (-1, 1]$ в ряд Фурье.10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, \pi]$, в ряд Фурье по синусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.

**4.9. Решение типового варианта
и образец оформления индивидуального задания № 4****Вариант 0****Задание 1.** Найти сумму ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 25};$

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n(n^2+5n+6)}.$

Решение

1.1. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 25}.$ По определению суммы ряда:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

где S_n – n -я частичная сумма ряда. Таким образом, необходимо найти компактную форму S_n .

Вычислить точно бесконечную сумму ряда можно лишь в некоторых случаях, например, когда ряд является геометрической, арифметической прогрессией или когда общий член ряда представляет собой дробно-рациональную функцию от n .

В нашем случае общий член ряда – рациональная функция со знаменателем $n^2 - 25 = (n-5)(n+5)$. Разложим общий член ряда на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{n^2 - 25} = \frac{1}{(n-5)(n+5)} = \frac{A}{n-5} + \frac{B}{n+5} = \frac{A(n+5) + B(n-5)}{(n-5)(n+5)} \Rightarrow$$
$$1 = A(n+5) + B(n-5) \quad \text{или} \quad 1 = An + 5A + Bn - 5B.$$

Приравнявая коэффициенты при равных степенях n , находим A и B :

$$\begin{array}{l|l} n^1 & 0 = A + B, \\ n^0 & 1 = 5A - 5B; \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1/10, \\ B = -1/10. \end{array}$$

Запишем ряд с новым общим членом:

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 25} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1/10}{n-5} - \frac{1/10}{n+5} \right) = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-5} - \frac{1}{n+5} \right).$$

Запишем S_n – n -ю частичную сумму ряда подробно:

$$S_n = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{11} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{3} - \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{14} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} + \frac{1}{6} - \frac{1}{16} + \frac{1}{7} - \frac{1}{17} + \frac{1}{8} - \frac{1}{18} + \right. \\ \left. + \frac{1}{9} - \frac{1}{19} + \frac{1}{10} - \frac{1}{20} + \frac{1}{11} - \frac{1}{21} + \frac{1}{12} - \frac{1}{22} + \frac{1}{13} - \frac{1}{23} + \frac{1}{14} - \frac{1}{24} + \frac{1}{15} - \frac{1}{25} + \dots \right).$$

Как можно заметить, через 10 членов ряда первые слагаемые u_{16} , u_{17} и т.д. начинают сокращаться со вторыми слагаемыми u_6 , u_7 и т.д. В результате внутреннего сокращения членов ряда с противоположными знаками n -я частичная сумма будет равна

$$S_n = \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{n-5} - \frac{1}{n-4} - \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right).$$

Переходя к определению суммы ряда, находим предел

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{10} \left(\frac{107}{40} + \frac{16}{63} \right).$$

Таким образом, сумма ряда $S = \frac{107}{400} + \frac{16}{630}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n(n^2+5n+6)}$. По определению суммы ряда:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

Найдем компактную форму n -ой частичной суммы ряда S_n . Для этого разложим общий член на сумму простейших дробей:

$$\frac{n-2}{n(n^2+5n+6)} = \frac{n-2}{n(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3} = \\ = \frac{A(n+2)(n+3) + Bn(n+3) + Cn(n+2)}{n(n+2)(n+3)} \Rightarrow \\ n-2 = A(n+2)(n+3) + Bn(n+3) + Cn(n+2).$$

Приравнявая коэффициенты при равных степенях n , находим A , B и C :

$$\begin{array}{l|l} n^2 & 0 = A + B + C, & A = -1/3, \\ n^1 & 1 = 5A + 3B + 2C, & \Rightarrow B = 2, \\ n^0 & -2 = 6A, & C = -5/3. \end{array}$$

Запишем ряд с новым общим членом:

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{n-2}{n(n^2+5n+6)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3n} + \frac{2}{n+2} - \frac{5}{3(n+3)} \right).$$

Запишем S_n – n -ю частичную сумму ряда подробно. Для удобства группировки взаимно сокращающихся членов, выпишем каждый член в новой строке:

$$\begin{aligned} S_n = & \underbrace{-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{5}{12}}_{u_1} - \\ & \underbrace{-\frac{1}{6} + \frac{2}{4} - \frac{5}{15}}_{u_2 \text{ и т.д.}} - \\ & -\frac{1}{9} + \frac{2}{5} - \frac{5}{18} - \\ & -\frac{1}{12} + \frac{2}{6} - \frac{5}{21} - \\ & -\frac{1}{15} + \frac{2}{7} - \frac{5}{24} - \\ & -\frac{1}{18} + \dots \end{aligned}$$

Как можно заметить, по одному слагаемому из u_n , u_{n+1} и u_{n+3} , расположенных на побочной диагонали, взаимно уничтожаются. В результате внутреннего сокращения членов ряда с противоположными знаками n -я частичная сумма будет равна

$$S_n = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{9} - \frac{5}{3(n+1)} + \frac{2}{n+1} - \frac{5}{3(n+2)} + \frac{2}{n+2} - \frac{5}{3(n+3)}.$$

Переходя к определению суммы ряда, находим предел

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

Таким образом, сумма ряда $S = \frac{1}{18}$.

Задание 2. Исследовать на сходимость ряды:

$$\begin{array}{ll} 2.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin \frac{n\pi}{3}}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}; & 2.2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[3]{n} + 1)(n\sqrt[4]{n^3} - 1)}; \\ 2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n^2}{(2n+1)!}; & 2.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{3n}{3n-1} \right)^{n^2}; \\ 2.5. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)\sqrt{\ln(n-3)}}; & 2.6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{\sqrt{n^5}}. \end{array}$$

Решение

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin \frac{n\pi}{3}}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Исследуем сходимость ряда по 1-му признаку сравнения:

$$u_n = \frac{2 + \sin \frac{n\pi}{3}}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{3}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} = a_n,$$

так как значения $\sin \frac{n\pi}{3}$ не превышают единицы.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с членами, меньшими, чем исходный, исследуем на сходимость с помощью предельного признака сравнения. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$ и $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\frac{3}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{3}{n\sqrt{n}} = \frac{3}{n^{3/2}} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^{3/2}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, т.к. является обобщенно-гармоническим $p=3/2 > 1$. Следовательно, по предельному признаку сравнения сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$, значит, по 1-му признаку сравнения

сходится ряд с меньшими членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin \frac{n\pi}{3}}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[3]{n}+1)(n\sqrt[4]{n^3}-1)}$. Исследуем сходимость ряда по

предельному признаку сравнения:

$$u_n = \frac{n}{(\sqrt[3]{n}+1)(n\sqrt[4]{n^3}-1)} \sim \frac{n}{\sqrt[3]{n} \cdot n \cdot \sqrt[4]{n^3}} = \frac{1}{n^{13/12}} = a_n \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13/12}}$ сходится, т.к. является обобщенно-гармоническим $p=13/12>1$. Следовательно, по предельному признаку сравнения сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[3]{n}+1)(n\sqrt[4]{n^3}-1)}$.

Замечание. Предельный признак сравнения можно оформить по-другому – точно следуя формулировке признака. Рассмотрим известный сходящийся обобщенно-гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13/12}}$ ($p=13/12>1$).

Найдем предел отношения общих членов a_n и u_n – исходного ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{(\sqrt[3]{n}+1)(n\sqrt[4]{n^3}-1)}}{\frac{1}{n^{13/12}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot n^{13/12}}{(\sqrt[3]{n}+1)(n\sqrt[4]{n^3}-1)} = 1.$$

Так как предел отношения общих членов равен константе, то по предельному признаку сравнения оба ряда ведут себя одинаково в смысле сходимости. Следовательно, исходный ряд сходится.

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n^2}{(2n+1)!}$. Общий член ряда содержит показательную

функцию и факториал, поэтому исследуем сходимость ряда по признаку Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^{n+1}(n+1)^2}{(2[n+1]+1)!}}{\frac{5^n n^2}{(2n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}(n+1)^2}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{5^n n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Так как предел отношения u_{n+1} к u_n члену меньше единицы, то по признаку Даламбера ряд сходится.

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\frac{3n^2}{3n^2-1} \right)^{n^3}$. Общий член ряда целиком в степени n^3 ,

поэтому исследуем сходимость ряда по радикальному признаку Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4^n} \left(\frac{3n^2}{3n^2-1} \right)^{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{3n^2}{3n^2-1} \right)^{\frac{n^3}{n}} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2}{3n^2-1} \right)^{n^2} = |1^\infty|$$

Имеет место неопределенность $|1^\infty|$, которую раскроем с помощью 2-го замечательного предела:

$$= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-1+1}{3n^2-1} \right)^{n^2} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n^2-1} \right)^{(3n^2-1) \cdot \frac{n^2}{3n^2-1}} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^2}{3n^2-1}} = \frac{1}{4} e^{1/3} < 1.$$

Так как предел корня n -ой степени из u_n меньше единицы, то по радикальному признаку Коши ряд сходится.

2.5. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)\sqrt{\ln(n-3)}}$. Имеем знакочередующийся ряд, поэтому,

исследуем ряд на сходимость и определим характер сходимости: абсолютная или условная сходимость.

1) Абсолютная сходимость: если сходится ряд абсолютных членов $\sum_{n=5}^{\infty} |a_n|$, то исходный ряд сходится абсолютно. Рассмотрим ряд составленный из абсолютных членов:

$$\sum_{n=5}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(3n+1)\sqrt{\ln(n-3)}} \right| = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\sqrt{\ln(n-3)}}.$$

По 1-му признаку сравнения:

$$\frac{1}{(3n+1)\sqrt{\ln(n-3)}} > \frac{1}{(3n+1)\sqrt{\ln(3n+1)}} = b_n.$$

Исследуем сходимость $\sum_{n=5}^{\infty} b_n$ по интегральному признаку:

$$\int_5^{\infty} \frac{dx}{(3x+1)\sqrt{\ln(3x+1)}} = \int_5^{\infty} \frac{d \ln(3x+1)}{(3x+1)\sqrt{\ln(3x+1)} \cdot \frac{3}{3x+1}} = \frac{2}{3} \sqrt{\ln(3x+1)} \Big|_5^{\infty} = \infty.$$

Интеграл расходится, следовательно, по 1-му признаку сравнения расходится и ряд с меньшими членами. Т.о. абсолютной сходимости нет. Исследуем ряд на условную сходимость по признаку Лейбница.

2) Условная сходимость: по признаку Лейбница, если выполняется два условия: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$; б) $|a_n| > |a_{n+1}|$, то ряд сходится. Проверим:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(3n+1)\sqrt{\ln(n-3)}} = 0;$$

$$\text{б) } \frac{1}{(3n+1)\sqrt{\ln(n-3)}} > \frac{1}{(3n+5)\sqrt{\ln(n-2)}}.$$

Оба условия Лейбница выполняются, значит ряд сходится условно.

Замечание. Иногда пункт б) не так очевиден. Поэтому проверить монотонное убывание последовательности можно с помощью аппарата дифференциального исчисления: взять производную от функции $|a_n|$ и определить знак производной для $n > 1$ (начало суммирования).

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$. Имеем знакочередующийся ряд, поэтому,

исследуем ряд на сходимость и определим характер сходимости: абсолютная или условная сходимость.

1) Абсолютная сходимость: если сходится ряд абсолютных членов $\sum_{n=5}^{\infty} |a_n|$, то исходный ряд сходится абсолютно. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных членов:

$$\sum_{n=5}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n+1}{\sqrt{n^5}} \right| = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^5}}.$$

Найдем эквивалентный ряд:

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^5}} \sim \frac{n}{n^{5/2}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Ряд $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ является сходящимся обобщенно-гармоническим ($p=3/2 > 1$). Следовательно, по предельному признаку сравнения ряд, составленный из абсолютных членов, сходится, значит, исходный ряд сходится абсолютно.

Замечание. В данном случае проверять условную сходимость не нужно, т.к. показали абсолютную сходимость. На этом этапе решение задачи заканчивается.

Задание 3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n \cdot (n+1)!}$ с точностью $\alpha = 0,001$.

Решение

Имеем знакочередующийся ряд, поэтому, для вычисления приближенного значения частичной суммы воспользуемся следствием из признака Лейбница: сумма всех отброшенных слагаемых (остатка ряда R_n) не превышает первого отброшенного слагаемого:

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|.$$

Выпишем несколько первых членов данного ряда и найдем слагаемое, меньшее, чем заданная точность. Оно-то и будет первым отброшенным членом.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n \cdot (n+1)!} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{5^1 \cdot 2!} + \frac{1}{5^2 \cdot 3!} - \frac{1}{5^3 \cdot 4!} + \dots \\ \frac{1}{5^3 \cdot 4!} &= \frac{1}{125 \cdot 24} < \frac{1}{1000}. \end{aligned}$$

Таким образом, для достижения точности $\alpha = 0,001$ достаточно взять первые три члена ряда.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n \cdot (n+1)!} \approx \frac{1}{1} - \frac{1}{5^1 \cdot 2!} + \frac{1}{5^2 \cdot 3!} = \frac{68}{75}.$$

Все остальные, начиная с 4-го можно отбросить, т.к. их сумма не превышает $|u_4| = \frac{1}{5^3 \cdot 4!}$ согласно следствию из признака Лейбница.

Задание 4. Найти область сходимости функциональных рядов:

$$4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-1)^n}; \quad 4.2. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n}; \quad 4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4) \cdot 4^n}.$$

Решение

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-1)^n}$. Для нахождения области абсолютной сходимости используем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{(x-1)^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{(x-1)^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{n+1}}{(x-1)^{n+1}} \cdot \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{1}{x-1} \right| < 1.$$

Решим неравенство и найдем область сходимости:

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| < 1 \Rightarrow |x-1| > 1 \Rightarrow -1 > x-1 > 1 \Rightarrow 0 > x > 2.$$

Проверим сходимость ряда на концах интервала:

$$x = 0: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(0-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}. \text{ Проверим необходимый признак}$$

сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n \sqrt{n}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Предел общего члена не равен нулю, следовательно, в точке $x = 0$ ряд расходится. Точка $x = 0$ не входит в область сходимости.

$$x = 2: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(2-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}. \text{ Проверим необходимый признак}$$

сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Предел общего члена не равен нулю, следовательно, точка $x = 2$ не входит в область сходимости.

Таким образом, область сходимости: $x \in (0; 2)$.

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n}$. Для нахождения области абсолютной сходимости используем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{3(n+1)}}{2^n x^{3n}} \right| = |2x^3| < 1.$$

Решим неравенство и найдем область сходимости:

$$|2x^3| < 1 \Rightarrow |x^3| < \frac{1}{2} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Проверим сходимость ряда на концах интервала:

$$x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}: \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[3]{2^{3n}}} (-1)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{3n}.$$

Проверим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{3n} = \nexists.$$

Предел общего члена не равен нулю, следовательно, точка $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ не входит в область сходимости. Аналогичным образом

проверяем сходимость ряда в точке $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и получаем (на основании необходимого признака сходимости) расходимость ряда в этой точке.

Таким образом, область сходимости: $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4) \cdot 4^n}$. Для нахождения области абсолютной сходимости используем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+5) \cdot 4^{n+1}}}{\frac{(x-5)^n}{(n+4) \cdot 4^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-5)(n+4)}{(n+5) \cdot 4} \right| = \left| \frac{x-5}{4} \right| < 1.$$

Решим неравенство и найдем область сходимости:

$$\left| \frac{x-5}{4} \right| < 1 \Rightarrow |x-5| < 4 \Rightarrow -4 < x-5 < 4 \Rightarrow 1 < x < 9.$$

Проверим сходимость ряда на концах интервала:

$$x = 1: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-5)^n}{(n+4) \cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(n+4) \cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4}. \quad \text{Имеем}$$

знакочередующийся ряд, исследуем его на абсолютную и условную сходимость.

1) Абсолютная сходимость. Рассмотрим ряд из абсолютных членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+4} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}. \quad \text{Для общего члена ряда } \frac{1}{n+4} \text{ найдем эквивалент:}$$

$$\frac{1}{n+4} \sim \frac{1}{n} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический расходящийся, следовательно, по предельному признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$ тоже расходится, значит, абсолютной сходимости нет.

2) **Условная сходимость.** Рассмотрим два условия признака Лейбница: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+4} = 0$; б) $|a_n| > |a_{n+1}| \Rightarrow \frac{1}{n+4} > \frac{1}{n+5}$. Оба условия выполняются, следовательно, ряд сходится. Таким образом, точка $x=1$ входит в область сходимости.

$$x=9: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(9-5)^n}{(n+4) \cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4)^n}{(n+4) \cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}. \quad \text{Имеем}$$

знакоположительный ряд, общий член которого эквивалентен гармоническому расходящемуся ряду (предыдущий пункт исследования). Следовательно, ряд расходится, и точка $x=9$ не входит в область сходимости.

Таким образом, область сходимости: $x \in [1; 9)$.

Задание 5. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+4)^n}}{n^3}, \quad [-5, -3].$$

Решение

Согласно признаку Вейерштрасса, если $\forall x \in [-5, -3] \quad |f_n(x)| \leq a_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то исходный функциональный ряд сходится равномерно на отрезке $x \in [-5, -3]$. Найдем мажоранту:

$$\left| \frac{\sqrt[3]{(x+4)^n}}{n^3} \right| \leq \left| \frac{\sqrt[3]{(-5+4)^n}}{n^3} \right| = \frac{1}{n^3} \quad \forall x \in [-5, -3].$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ является сходящимся обобщенно-гармоническим, т. к. $p=3>1$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса исходный

функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+4)^n}}{n^3}$ сходится равномерно на отрезке $[-5, -3]$.

Задание 6. Найти сумму ряда:

$$6.1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+3}; \quad 6.2. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n - 6) x^{n+2}.$$

Решение

6.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+3}$. По свойству степенных рядов, степенной ряд сходится равномерно в каждой точке своей области сходимости $|x| < 1$, следовательно, его можно интегрировать, дифференцировать и сумма степенного ряда $S(x)$ является непрерывной функцией. Рассмотрим ряд

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+3} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1} = x^2 \cdot S_1(x).$$

Продифференцируем ряд $S_1(x)$ по x почленно:

$$S_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{2n+1} (2n+1) x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^{n-1}) x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n.$$

Получили два ряда, каждый из которого является сходящейся геометрической прогрессией ($|x| < 1$). Сумма сходящейся геометрической прогрессии $\sum_{n=0}^{\infty} b_0 q^n = \frac{b_0}{1-q}$, следовательно, можно записать:

$$S_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

Тогда, интегрируя по области сходимости, получим

$$S_1(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \operatorname{arctg} x \Big|_0^x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \operatorname{arctg} x.$$

Окончательно, искомая сумма $S(x)$:

$$S(x) = x^2 S_1(x) = \frac{x^2}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - x^2 \operatorname{arctg} x.$$

6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n - 6)x^{n+2}$. По свойству степенных рядов, степенной ряд сходится равномерно в каждой точке своей области сходимости $|x| < 1$, следовательно, его можно интегрировать, дифференцировать и сумма степенного ряда $S(x)$ является непрерывной функцией. Рассмотрим ряд

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n - 6)x^{n+2} = x^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3)(n-2)x^{n+1/2} = x^{3/2} \cdot S_1(x).$$

Проинтегрируем ряд $S_1(x)$ по x почленно:

$$\begin{aligned} \int_0^x S_1(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3)(n-2) \int_0^x x^{n+1/2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3)(n-2) \left. \frac{x^{n+3/2}}{(n+3/2)} \right|_0^x = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(n-2)x^{n+3/2}. \end{aligned}$$

Преобразуем полученный ряд так, чтобы при следующем интегрировании получилась геометрическая прогрессия, сумму которой нам известна:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n-2)x^{n+3/2} = 2x^{3+3/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)x^{n-3} = 2x^{3+3/2} \cdot S_2(x).$$

Проинтегрируем ряд $S_2(x)$ по x почленно:

$$\int_0^x S_2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n-2) \int_0^x x^{n-3} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n-2) \left. \frac{x^{n-2}}{(n-2)} \right|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{-2} x^n$$

Получили ряд – сходящуюся геометрическую прогрессию, где $b_0 = x^{-2}$, $q = x$. Согласно сумме геометрической прогрессии:

$$\int_0^x S_2(x) dx = \frac{x^{-2}}{1-x}.$$

Тогда

$$S_2(x) = \left(\frac{x^{-2}}{1-x} \right)' = \left(\frac{1}{x^2 - x^3} \right)' = -\frac{2x - 3x^2}{(x^2 - x^3)^2} = \frac{3x - 2}{x^3(1-x)^2}.$$

Подставим найденную сумму в выражение для $S_1(x)$:

$$\int_0^x S_1(x) dx = 2x^{3+3/2} \cdot S_2(x) = 2x^{3+3/2} \cdot \frac{3x-2}{x^3(1-x)^2} = 2 \frac{3x^{5/2} - 2x^{3/2}}{(1-x)^2}.$$

Тогда

$$S_1(x) = 2 \left(\frac{3x^{5/2} - 2x^{3/2}}{(1-x)^2} \right)' = 2 \cdot \frac{\frac{-3}{2}x^{5/2} + \frac{13}{2}x^{3/2} - 3x^{1/2}}{(1-x)^3} = \frac{-3x^{5/2} + 13x^{3/2} - 6x^{1/2}}{(1-x)^3}.$$

Возвращаясь к исходной сумме $S(x)$ получим:

$$S(x) = x^{3/2} \cdot S_1(x) = x^{3/2} \cdot \frac{-3x^{5/2} + 13x^{3/2} - 6x^{1/2}}{(1-x)^3} = \frac{-3x^4 + 13x^3 - 6x^2}{(1-x)^3}.$$

Таким образом, сумма ряда $S(x) = \frac{-3x^4 + 13x^3 - 6x^2}{(1-x)^3}.$

Замечание. Первое интегрирование можно было выполнить относительно множителя $(n-2)$. Тогда предварительную сумму следовало бы записать так:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n - 6)x^{n+2} = x^5 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3)(n-2)x^{n-3} = x^5 \cdot S_1(x).$$

Остальные действия аналогичны.

Задание 7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 .

$$7.1. f(x) = x \ln(1-x-6x^2), x_0 = 0; \quad 7.2. f(x) = \sin(x+7), x_0 = -3.$$

Решение

$$7.1. f(x) = x \ln(1-x-6x^2), x_0 = 0.$$

Запишем ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

Чтобы записать ответ, найдем производные функции $f(x) = x \ln(1-x-6x^2)$ в точке $x_0 = 0$ и подставим в ряд Тейлора.

$$f'(x) = \ln(1-x-6x^2) - \frac{x+12x^2}{1-x-6x^2}, \quad f'(0) = 0.$$

Однако выражения производной получаются достаточно сложные. Т.к. $x_0 = 0$, наша задача записать частный случай ряда Тейлора – ряд Маклорена. Воспользуемся стандартным разложением Маклорена:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + \dots, \quad -1 < t \leq 1.$$

Преобразуем заданную функцию:

$$f(x) = x \ln(1-x-6x^2) = x \ln(1-3x)(1+2x) = x(\ln(1-3x) + \ln(1+2x)).$$

Разложим в ряд Маклорена каждое слагаемое в отдельности:

$$\ln(1-3x) = |t = -3x| = -3x - \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-3x)^3}{3} - \frac{(-3x)^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(-3x)^n}{n} + \dots$$

$$\ln(1-3x) = -3x - \frac{3^2 x^2}{2} - \frac{3^3 x^3}{3} - \frac{3^4 x^4}{4} - \dots - \frac{3^n x^n}{n} + \dots,$$

где область сходимости: $-1 < -3x \leq 1 \Rightarrow -1/3 \leq x < 1/3$.

$$\ln(1+2x) = |t = 2x| = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n} + \dots$$

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{2^3 x^3}{3} - \frac{2^4 x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^n x^n}{n} + \dots,$$

где область сходимости: $-1 < 2x \leq 1 \Rightarrow -1/2 < x \leq 1/2$.

Запишем окончательное разложение:

$$\begin{aligned} & x \ln(1-x-6x^2) = \\ & = x \left(-3x - \frac{3^2 x^2}{2} - \frac{3^3 x^3}{3} - \dots - \frac{3^n x^n}{n} + \dots + 2x - \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{2^3 x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^n x^n}{n} + \dots \right) = \\ & = x \left((2-3)x + \left(\frac{2^2}{2} - \frac{3^2}{2} \right) x^2 + \left(\frac{2^3}{3} - \frac{3^3}{3} \right) x^3 + \dots + \left(\frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n} - \frac{3^n}{n} \right) x^n + \dots \right) = \\ & = -x^2 + \frac{2^2 - 3^2}{2} x^3 + \frac{2^3 - 3^3}{3} x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1} 2^n - 3^n}{n} x^{n+1} + \dots \end{aligned}$$

Область сходимости находится как пересечение двух областей $-1/3 \leq x < 1/3$ и $-1/2 < x \leq 1/2$. Таким образом, область сходимости $-1/3 \leq x < 1/3$.

7.2. $f(x) = \sin(x + 7)$, $x_0 = -3$.

Вариант решения № 1.

Запишем ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Чтобы записать ответ, найдем производные функции $f(x) = \sin(x + 7)$ в точке $x_0 = -3$ и подставим в формулу Тейлора.

$$f'(x) = \cos(x + 7) \quad f'(-3) = \cos 4;$$

$$f''(x) = -\sin(x + 7) \quad f''(-3) = -\sin 4;$$

$$f'''(x) = -\cos(x + 7) \quad f'''(-3) = -\cos 4; \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + 4 + \pi n / 2) \quad f^{(n)}(-3) = \sin(4 + \pi n / 2).$$

Тогда ряд Тейлора для функции $f(x) = \sin(x + 7)$ имеет вид:

$$f(x) = \sin 4 + \frac{\cos 4}{1!}(x + 3) - \frac{\sin 4}{2!}(x + 3)^2 - \dots + \frac{\sin(4 + \pi n / 2)}{n!}(x + 3)^n + \dots$$

Для ряда вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!}$ область сходимости $x \in \mathbb{R}$.

Вариант решения № 2. Запишем стандартное разложение Маклорена:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad t \in \mathbb{R}$$

Преобразуем заданную функцию так, чтобы выделить степень $t = x + 3$:

$$f(x) = \sin(x + 7) = \sin([x + 3] + 4) = \sin(x + 3)\cos 4 + \cos(x + 3)\sin 4.$$

Полагая в стандартном разложении Маклорена $t = x + 3$, подставим его в заданную функцию $f(x) = \sin(x + 7)$ и запишем ответ:

$$f(x) = \left((x + 3) - \frac{(x + 3)^3}{3!} + \frac{(x + 3)^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x + 3)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right) \cos 4 + \\ + \left(1 - \frac{(x + 3)^2}{2!} + \frac{(x + 3)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(x + 3)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) \sin 4.$$

Задание 8. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$ с точностью до 0,00001.

Решение

Интеграл берется в окрестности точки $x_0 = 0$. Поэтому, воспользуемся стандартным разложением Маклорена для функции:

$$(1+t)^m = 1 + mt + \frac{m(m-1)t^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)t^3}{3!} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)t^n}{n!} + \dots$$

Приведем функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}}$ к виду $f(t) = (1+t)^m$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{x}{2} \right)^3 \right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Полагая $t = \left(\frac{x}{2} \right)^3$ и $m = -\frac{1}{3}$, запишем разложение для $\frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}} &= \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{x}{2} \right)^3 \right)^{-\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2} \right)^6 - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) \left(-\frac{1}{3} - 2 \right) \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{2} \right)^9 + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 4}{3^2} \frac{x^6}{2^6 \cdot 2!} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3^3} \frac{x^9}{2^9 \cdot 3!} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3^4} \frac{x^{12}}{2^{12} \cdot 4!} + \dots \right] = \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в подынтегральную функцию

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[1 - \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 4}{3^2} \frac{x^6}{2^6 \cdot 2!} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3^3} \frac{x^9}{2^9 \cdot 3!} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3^4} \frac{x^{12}}{2^{12} \cdot 4!} \dots \right] dx =$$

(и проинтегрируем)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{x^4}{3 \cdot 2^3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4}{3^2} \frac{x^7}{2^6 \cdot 2! \cdot 7} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3^3} \frac{x^{10}}{2^9 \cdot 3! \cdot 10} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3^4} \frac{x^{13}}{2^{12} \cdot 4! \cdot 13} \dots \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 4}{3^2} \frac{1}{2^6 \cdot 2! \cdot 14} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3^3} \frac{1}{2^9 \cdot 3! \cdot 20} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3^4} \frac{1}{2^{12} \cdot 4! \cdot 13} \dots \end{aligned}$$

Получили знакопередающийся числовой ряд, поэтому, для вычисления приближенного значения частичной суммы воспользуемся следствием из признака Лейбница: сумма всех отброшенных слагаемых (остатка ряда R_n) не превышает первого отброшенного слагаемого:

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|.$$

Найдем слагаемое, меньшее, чем заданная точность $\alpha=0,00001$. Оно-то и будет первым отброшенным членом.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3 \cdot 2^3 \cdot 8} &\approx 2083 \cdot 10^{-5} > 10^{-5}; \\ \frac{1 \cdot 4}{3^2} \frac{1}{2^6 \cdot 2! \cdot 14} &\approx 25 \cdot 10^{-5} > 10^{-5}; \\ \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3^3} \frac{1}{2^9 \cdot 3! \cdot 20} &\approx 1.69 \cdot 10^{-5} > 10^{-5} \\ \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3^4} \frac{1}{2^{12} \cdot 4! \cdot 13} &\approx 0.27 \cdot 10^{-5} < \frac{1}{10^5}.\end{aligned}$$

Таким образом, для достижения точности $\alpha=0,00001$ достаточно взять четыре слагаемых:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 8 \cdot 8} + \frac{1}{2^5 \cdot 14 \cdot 9} - \frac{7}{2^7 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 27} \approx 0.465159626.$$

Поскольку $\alpha=0,00001$, то в ответе следует оставить цифры до 5-ой значащей цифры, тогда:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}} \approx 0.46516.$$

Задание 9. Разложить функцию $y=|x|-1$, $x \in (-2, 2]$ в ряд Фурье.

Решение

Ряд Фурье имеет вид:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Заданная функция может быть записана как

$$y=|x|-1 = \begin{cases} -x-1, & -2 < x \leq 0, \\ x-1, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Полупериод $l = 2$. Найдем коэффициенты a_0 , a_n , b_n :

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 (-x-1) dx + \int_0^2 (x-1) dx \right) = \\&= \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-2}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^2 \right) = \frac{1}{2} ((2-2) + (2-2)) = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 (-x-1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_0^2 (x-1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \\&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n\pi} (-x-1) \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{2}{n\pi} \int_{-2}^0 \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \frac{2}{n\pi} (x-1) \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \\&= \frac{1}{2} \left(0 - \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-2}^0 + 0 + \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 \right) = \\&= \frac{2}{n^2 \pi^2} (-1 + \cos n\pi + \cos(-n\pi) - 1) = \frac{2}{n^2 \pi^2} (-2 + 2(-1)^n) = \frac{-4}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 (-x-1) \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_0^2 (x-1) \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \\&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n\pi} (x+1) \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{2}{n\pi} \int_{-2}^0 \cos \frac{n\pi x}{2} dx - \frac{2}{n\pi} (x-1) \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \\&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n\pi} (1 - (1-2) \cos(-n\pi)) + \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-2}^0 - \right. \\&\quad \left. - \frac{2}{n\pi} ((2-1) \cos n\pi + 1) + \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 \right) = \frac{1}{n\pi} ((1 + (-1)^n - (-1)^n - 1)) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье для функции $y = |x| - 1$ имеет вид:

$$S(x) = \frac{-4}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$$

или

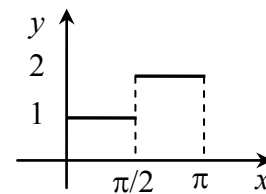
$$S(x) = \frac{-4}{\pi^2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{2}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{2}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \frac{2}{7^2} \cos \frac{7\pi x}{2} + \dots \right).$$

Можно заметить, что все четные слагаемые сокращаются и записать более компактную форму ряда, без четных номеров:

$$S(x) = \frac{-8}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

Замечание. Функция $y = |x| - 1$ является четной, поэтому до начала вычисления коэффициентов можно было сделать вывод о том, что ряд Фурье будет не полным – коэффициенты $b_n = 0$ и b_n можно было не вычислять (из свойства определенного интеграла по симметричному промежутку).

Задание 10. Разложить функцию, заданную графически на интервале $x \in (0, \pi]$, в ряд Фурье по синусам. Указать значения суммы ряда в точках разрыва. Построить разложение функции на графике.



Решение

Запишем функцию $y = y(x)$ в аналитическом виде:

$$y = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq \pi/2, \\ 2, & \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$$

По условию задачи необходимо записать неполный ряд Фурье – по синусам, следовательно, доопределим функцию нечетным образом на симметричный промежуток $x \in (-\pi, 0]$. Тогда функция будет иметь вид:

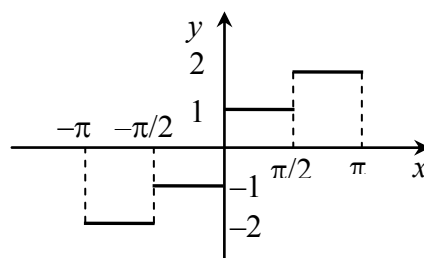


Рис. 8. Доопределенная нечетным образом функция

Полупериод $l = 2$. Коэффициенты для нечетной функции: $a_0 = 0$ и $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 2 \cdot \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx \right) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{n} \cos nx \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi n} \left(-\cos \frac{n\pi}{2} + 1 - 2 \cos n\pi + 2 \cos \frac{n\pi}{2} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi n} \left(1 - 2(-1)^n + \cos \frac{n\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье имеет вид:

$$S(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2(-1)^n + \cos(n\pi/2)}{n} \sin nx.$$

Заметим, что при нечетных $n = 2k-1$

$$\cos \frac{n\pi}{2} = 0 \text{ и } b_n = \frac{6}{\pi n}.$$

При четных $n = 2k$

$$\cos \frac{n\pi}{2} = \cos \frac{2k\pi}{2} = (-1)^k, \quad b_n = \frac{-4}{\pi k}, \text{ если } k \text{ кратно } 2$$

и $b_n = 0$, если k кратно 4. Таким образом, каждый 4-ый член ряда Фурье будет обращаться в ноль, и ряд Фурье во всех точках непрерывности будет иметь вид:

$$S(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{3}{1} \sin x - \frac{2}{2} \sin 2x + \frac{3}{3} \sin 3x + \frac{3}{5} \sin 5x - \frac{2}{6} \sin 6x + \frac{3}{7} \sin 7x + \frac{3}{9} \sin 9x + \dots \right).$$

Рассмотрим точки разрыва и граничные точки. По условию Дирихле:

$$S(x) = \frac{y(x_0 - 0) + y(x_0 + 0)}{2}, \text{ если } x_0 - \text{точка разрыва};$$

$$S(x) = \frac{y(l - 0) + y(-l + 0)}{2}, \text{ если } l - \text{граничная точка функции}.$$

Тогда в точке $x_0 = 0$:

$$S(0) = \frac{y(0 - 0) + y(0 + 0)}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0.$$

В точке $x_0 = \pi/2$:

$$S(\pi/2) = \frac{y(\pi/2 - 0) + y(\pi/2 + 0)}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}.$$

В точке $x_0 = -\pi/2$:

$$S(-\pi/2) = \frac{y(-\pi/2 - 0) + y(-\pi/2 + 0)}{2} = \frac{-1 - 2}{2} = -\frac{3}{2}.$$

В точках $x_0 = \pi$ и $-\pi$:

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{y(-\pi + 0) + y(\pi - 0)}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = 0.$$

Построим разложение Фурье на графике. Так как по условию Дирихле ряд Фурье сходится к своей функции в каждой точке непрерывности, а тригонометрические функции синус и косинус – периодические функции с общим периодом $2l$, то разложение Фурье на графике будет представлять собой периодическое продолжение заданной функции на всю числовую ось.

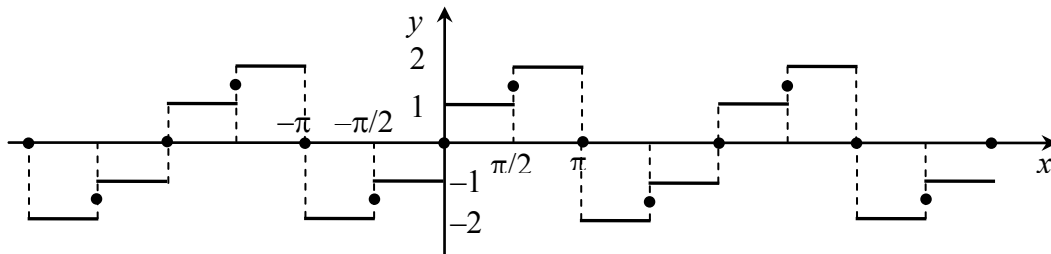


Рис. 9. Фурье разложение

На рис. 9 точками показаны значения суммы в точках разрыва и в граничных точках функции

Для удобства построения значений суммы в точках разрыва, можно использовать среднее арифметическое между левым и правым значением функции в точке скачка. На графике точка ставится на середину величины скачка. Аналогично сумма строится в граничных точках.



5. ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ

5.1. Требования для сдачи экзамена

После завершения изучения дисциплины студенты сдают экзамен. К экзамену допускаются только те студенты, у которых зачтены все индивидуальные задания.

Студенты, изучающие дисциплину по классической заочной форме обучения, сдают экзамен во время экзаменационной сессии по билетам (в устной или письменной форме).

Студенты, изучающие дисциплину с применением дистанционных образовательных технологий, сдают экзамен дистанционно (через Интернет, на сайте ИДО).

5.2. Вопросы для подготовки к экзамену

1. Понятие первообразной. Свойство первообразной (доказать).
2. Понятие неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.
3. Методы вычисления неопределенного интеграла: метод подстановки (замены переменной), интегрирование по частям.
4. Интегрирование рациональных функций. Метод неопределенных коэффициентов при разложении дроби на сумму простейших дробей.
5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.
6. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Понятие определенного интеграла. Необходимый признак интегрируемости.
7. Свойства определенного интеграла. (Теорема о среднем, свойства определенного интеграла, выражаемые неравенствами). Геометрический смысл.
8. Классы интегрируемых функций (три теоремы).
9. Теорема о первообразной непрерывной функции (об определенном интеграле с переменным верхним пределом). Следствие (о непрерывной первообразной).
10. Теорема Ньютона-Лейбница.
11. Теорема об интегрировании по частям.
12. Теорема об интегрировании методом подстановки.
13. Приложения определенного интеграла: вычисление площади плоской фигуры (вывод формулы в полярной системе координат), длины дуги (вывод формулы в декартовой системе координат), объема тела вращения относительно оси Ox .



14. Понятие несобственного интеграла I рода.
15. Признаки сходимости. Первый признак сравнения. Второй (предельный) признак сравнения.
16. Понятие несобственного интеграла II рода.
17. Признаки сравнения.
18. Теорема об абсолютной сходимости несобственного интеграла.
19. Понятие кратного интеграла, его геометрический и физический смысл.
20. Необходимое условие существования кратных интегралов.
21. Классы интегрируемых функций, свойства кратных интегралов.
22. Вывод формул повторного интегрирования для вычисления кратных интегралов.
23. Якобиан перехода при смене координат. Полярные координаты.
24. Понятие дифференциального уравнения первого порядка, решение ДУ, интегральная кривая, частное решение, начальные условия, задача Коши.
25. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Определение общего решения ДУ. Особое решение
26. Основные виды ДУ: с разделяющимися переменными, однородные, линейные первого порядка, Бернулли, в полных дифференциалах (доказать необходимое условие полного дифференциала)
27. Определение общего решения ДУ порядка выше первого, частное решение.
28. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши ДУ порядка выше первого.
29. Понятие линейного ДУ n -го порядка.
30. Однородные линейные ДУ n -го порядка. Две теоремы о свойствах решений ОЛДУ.
31. Определитель Вронского. Теорема о равенстве нулю вронскиана линейно-зависимых функций.
32. Теорема о неравенстве нулю вронскиана линейно-независимых решений ЛОДУ.
33. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ. Понятие ФСР.
34. Линейные однородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Вид частных решений, характеристическое уравнение.
35. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n -го порядка. Теорема о структуре общего решения. Теорема о суперпозиции решений.
36. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных ко-

эффициентов для уравнений со специальной правой частью. Метод вариации произвольных постоянных – метод Лагранжа (вывод рабочей формулы).

37. Основные понятия и определения: определение числового ряда, n -ой частичной суммы, сходящегося и расходящегося ряда.

38. Необходимый признак сходимости.

39. Три свойства сходящихся рядов.

40. Ряды с неотрицательными членами. Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами.

41. Первый признак сравнения.

42. Предельный признак сравнения.

43. Признаки Даламбера, радикальный и интегральный Коши.

44. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Теорема об абсолютно сходящемся ряде.

45. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.

46. Функциональные ряды. Основные понятия: область и точка сходимости, равномерная сходимость. Теорема Вейерштрасса.

47. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

48. Степенные ряды. Теорема Абеля.

49. Свойства степенных рядов.

50. Ряды Тейлора и Маклорена. Теорема о степенном ряде дифференцированной в x_0 функции.

51. Признак сходимости ряда Тейлора к порождающей ее функции.

52. Достаточный признак сходимости ряда Тейлора.

53. Ряды Фурье. Ортогональная система функций (уметь доказывать ортогональность системы функций на отрезке)

54. Тригонометрический ряд Фурье. Нахождение коэффициентов для тригонометрического ряда Фурье (вывести коэффициенты).

55. Теорема Дирихле.

56. Неполные ряды Фурье (показать, как изменятся коэффициенты ряда Фурье для четной и нечетной функции).

57. Ряд Фурье на произвольном интервале $(-l; l)$.

5.3. Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину по классической заочной форме

Билет включает 5 вопросов, из них 2 теоретических вопроса и 3 практических задания.

1. Сформулируйте определение числового ряда, n -ой частичной суммы, сходящегося и расходящегося ряда. Приведите пример рядов, сходимость и расходимость которых устанавливается по определению.

2. Сформулируйте определение ортогональной системы функций. Понятие ряда Фурье. Приведите пример любой ортогональной системы функций.

3. Вычислите площади фигур, ограниченных графиками функций $y = x\sqrt{4-x^2}$, $y = 0$, $(0 \leq x \leq 2)$.

4. Решите задачу Коши $y' + 4x^3y^3 + 2xy = 0$, $y(0) = 1$.

5. Исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n}{(\ln n)^n}$.

5.4. Образец экзаменационного билета для студентов, изучающих дисциплину с применением дистанционных образовательных технологий

В данном разделе приведены примеры заданий из экзаменационного билета для студентов, сдающих экзамен в онлайн режиме (через Интернет на сайте ИДО).

Экзаменационный билет включает 20 заданий следующих типов: задания на выбор единственного ответа; задания на выбор множественных ответов; задания на установление последовательности; задания на установление соответствия; задания для краткого ответа.

1. Задания на выбор единственного ответа

Укажите подстановку, которая приводит интеграл $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$ к табличному.

1) $t = \ln(x+1)$

2) $t = \ln x$

3) $t = x+1$

4) $t = \frac{1}{x+1}$

2. Задания на выбор множественных ответов

Перейдите от двойного интеграла $\iint_D xy \, dx \, dy$ к повторному, где область D ограничена линией: $4x^2 + y^2 \leq 4$.

$$1) \int_{-2}^2 y dy \int_{\frac{-\sqrt{4-y^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}} x dx$$

$$2) \int_{-1}^2 y dy \int_{\frac{-\sqrt{4-y^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}} x dx$$

$$3) \int_{-1}^1 y dy \int_{\frac{-\sqrt{4-y^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}} x dx$$

$$4) \int_{-1}^1 x dx \int_{-2\sqrt{4-x^2}}^{2\sqrt{4-x^2}} y dy$$

3. Задания на установление последовательности

Расположите приближения функции $y = \sin x$ формулой Маклорена на отрезке $(-1; 1)$ в порядке увеличения точности приближения разложения Маклорена к заданной функции.

$$1) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$3) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$4) \sin x = x$$

4. Задания на установление соответствия

Установите соответствие между функцией и ее рядом Маклорена.

Функция

Ряд Маклорена

$$1) y = e^x$$

$$1) x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots;$$

$$2) y = \sin x$$

$$3) y = \cos x$$

$$2) x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots;$$



4) $y = (1+x)^m$

5) $y = \ln(1+x)$

3) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots;$

4) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots;$

5) $1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$

5. Задания для краткого ответа

Найти абсолютную погрешность приближения функции $y = \sin x$ рядом Маклорена (до членов I порядка) на отрезке $[-1/2; 1/2]$.



6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Литература обязательная

1. Терехина Л.И., Фикс И.И. Высшая математика. Часть 3. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Дифференциальные уравнения. Ряды: учебное пособие. – Томск, 2008. – 203 с.
2. Терехина Л.И., Фикс И.И. Высшая математика. Часть 4. Кратные интегралы. Теория поля. Функции комплексного переменного. Операционный метод: учебное пособие. – Томск, 2009. – 192 с.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников. – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.
4. Шипачев В.С. Основы высшей математики: учебник для вузов. – 3-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 1996. – 479 с.

Литература дополнительная

5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для втузов: в 2 томах. – М.: Интеграл-Пресс. – Т. 1, 2001. – 416 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебное пособие для втузов: в 2 томах. – М.: Интеграл-Пресс. – Т. 2., 2000. – 544 с.

Учебно-методические пособия

7. Ефремова О.Н. Высшая математика. Ч. III. Руководство к решению задач. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Двойной интеграл. Тройной интеграл. Криволинейные интегралы. Поверхностные интегралы. Векторный анализ: учебное пособие / О.Н. Ефремова, Г.П. Столярова, Е.Д. Глазырина – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – 242 с.
8. Имас О.Н. Лекции курсу «Дифференциальные уравнения»: учебное пособие / О.Н. Имас, Е.Г. Пахомова, С.В. Рожкова, И.Г. Устинова. – Томск: Изд-во ТПУ, 2012. – 192 с.
9. Харлова А.Н. Томск. Ряды и комплексный анализ: учебное пособие / А.Н. Харлова, Е.А. Молдованова. – Томск: Изд. ТПУ, 2009.

Internet-ресурсы

10. Сайт кафедры высшей математики (заочное отделение). – Режим доступа: <http://portal.tpu.ru/departments/kafedra/vm/rabota/Tab2>, вход свободный.



Учебное издание

МАТЕМАТИКА 3

Методические указания и индивидуальные задания

Составитель

ИМАС Ольга Николаевна

Рецензент

*доктор физико-математических наук,
профессор кафедры ВМ*

К.П. Арефьев

Компьютерная верстка *М.Ю. Дорофеева*

Подписано к печати . Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать Хероx. Усл.печ.л. 5,29. Уч.-изд.л. 4,79.

Заказ . Тираж экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества

Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  **ТПУ**. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru