ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Уральский государственный экономический университет

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методический комплекс

Екатеринбург
2011

Составители:
Н.В. Коржавина, С.Н. Петрова, В.П. Степин

Рецензент:
доктор физико-математических наук, профессор
Леонид Дмитриевич Сон

Учебно-методический комплекс по линейной алгебре подготовлен в соответствии с требованиями ФГОС к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированных бакалавров по циклу «Общие математические и естественнонаучные дисциплины» государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования.

СОДЕРЖАНИЕ

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ КОМПОНЕНТ ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ГСЭ ЕН.Ф.01

Линейная алгебра. Понятие матрицы. Умножение матрицы на число. Сложение матриц. Умножение матриц. Транспонирование матриц. Определитель матрицы и его свойства. Обратная матрица. Ранг матрицы. Понятие системы линейных уравнений. Методы решения систем линейных уравнений: метод Гаусса, метод Крамера, метод обратной матрицы. Системы координат. Декартовы координаты на плоскости. Декартовы координаты в пространстве. Вектор: основные понятия. Действия над векторами. Скалярное произведение двух векторов. Векторное и смешанное произведение векторов.

Аналитическая геометрия. Прямая на плоскости. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой. Плоскость в пространстве. Прямая в пространстве. Плоскость и прямая в пространстве. Эллипс. Гипербола. Парабола. Классификация линий второго порядка.

Комплексные числа. Понятие комплексного числа. Представления комплексных чисел. Геометрическое изображение комплексного числа. Формы записи комплексных чисел. Формула Эйлера. Действия над комплексными числами: сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней.

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития общества предъявляет все более высокие требования к уровню подготовки специалистов различного профиля. Выпускники вузов должны владеть математическими методами и постоянно использовать их в своей профессиональной деятельности. В государственных образовательных стандартах высшего профессионального образования всех гуманитарных специальностей предусмотрены дисциплины математики.

Математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки бакалавра и специалиста. Обусловлено это тем, что математика является не только мощным средством решения прикладных задач, но и элементом общей культуры современного человека.

Курс «Линейная алгебра» является обязательным в цикле естественнонаучных дисциплин Федерального компонента государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Основные положения дисциплины «Линейная алгебра» являются фундаментом математического образования дипломированного специалиста, имеющим важное значение для успешного изучения специальных дисциплин, которые предусмотрены учебной программой для каждой специальности.

Цели изучения математики:

- *воспитание* математической культуры, как составной части общекультурных ценностей человека;
- *формирование* у обучаемых общих математических знаний для успешного овладения естественнонаучными дисциплинами на достаточно высоком научном уровне;
- *привитие* навыков решения основных математических и на их основе профессионально ориентированных задач;
- *развитие* у студентов логического и алгоритмического мышления, умения строго излагать свои мысли;
- *формирование* способностей к самостоятельному освоению математических знаний и овладению математическим анализом прикладных экономических задач;
- *выработка* позитивного отношения к естественным наукам и, в первую очередь, к математике.

Задачи изучения курса:

- *обеспечение* фундаментальной подготовки в одной из важнейших областей современной науки – математике;
- *раскрыть* вопросы, касающиеся фундаментальности науки математики;
- *ознакомить* с историей развития математики и с вкладом российских ученых в развитие современной математической науки;
- *ознакомить* студентов с основными понятиями и категориями в соответствии с государственным образовательным стандартом;
- *обучить* основным математическим методам решения задач, возникающих в различных математических и прикладных дисциплинах;
- *дать* общее представление о применении математики в экономической науке и практике;
- *привить* навыки самостоятельной деятельности по подготовке и решению профессионально ориентированных задач.

До начала изучения дисциплины студент должен:

- *иметь представление* об основных математических понятиях и категориях, базирующихся на школьном курсе;
- *уметь* правильно интерпретировать условие задачи, подобрать необходимые математические методы ее решения и проанализировать полученный результат;
- *иметь навыки* решения типовых математических задач по основным разделам математики общеобразовательной школы.

В результате изучения математики студент должен:

знать:

- основные математические понятия и категории, положения и теоремы, предусмотренные государственным образовательным стандартом в соответствии с той или иной специальностью;
- основные математические методы решения дисциплинарных и прикладных задач;

уметь:

- решать задачи линейной алгебры и аналитической геометрии;
- анализировать условие задачи, выбирать необходимые математические методы ее решения;
- определять возможности применения теоретических положений и применять математические методы к решению основных дисциплинарных и прикладных задач;
- производить оценку качества полученных решений;
- использовать математический аппарат в процессе проведения самостоятельных научно-практических исследований;

иметь навыки:

- поиска и применения теоретических основ математики;
- анализа условий прикладных задач, с целью выбора необходимых математических методов и алгоритмов последующего решения;
- изложения и аргументации полученного решения;
- применения стандартных математических алгоритмов решения к профессионально ориентированным задачам.

обладать математической культурой.

Место дисциплины в учебном процессе.

Дисциплина относится к циклу математических и естественнонаучных дисциплин. Изучение данной дисциплины базируется на знаниях студентами курса «Линейная алгебра» в объеме средней общеобразовательной школы.

Основные положения дисциплины «Линейная алгебра» являются фундаментом математического образования дипломированного специалиста, имеющим важное значение для успешного изучения специальных дисциплин, которые предусмотрены учебной программой для данной специальности.

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Тема 1. Матрицы и определители

Понятие матрицы. Умножение матрицы на число. Сложение матриц. Умножение матриц. Транспонирование матриц. Определитель матрицы и его свойства. Обратная матрица. Ранг матрицы.

Тема 2. Системы линейных уравнений

Понятие системы линейных уравнений. Методы решения Систем линейных уравнений: метод Гаусса, метод Крамера, метод обратной матрицы.

Тема 3. Векторная алгебра

Системы координат. Декартовы координаты на плоскости. Декартовы координаты в пространстве. Вектор: основные понятия. Действия над векторами. Скалярное произведение двух векторов. Векторное и смешанное произведение векторов.

II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тема 4. Уравнения прямой и плоскости

Прямая на плоскости. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой. Плоскость в пространстве. Прямая в пространстве. Плоскость и прямая в пространстве.

Тема 5. Линии второго порядка

Эллипс. Гипербола. Парабола. Классификация линий второго порядка.

III. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Тема 6. Комплексные числа

Понятие комплексного числа. Представления комплексных чисел. Геометрическое изображение комплексного числа. Формы записи комплексных чисел. Формула Эйлера. Действия над комплексными числами: сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Н.Ш. Кремера и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.:ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2003. – Ч. I.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1999. – Ч. II.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2006. – Ч. 1 и 2.
5. Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики / под ред. А.И. Карасёва и Н.Ш. Кремера. – М.: Экономическое образование, 1989.
6. Шипачев В.С. Основы высшей математики / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 1998.
7. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2006.

Дополнительная литература

1. Баврин И.И. Высшая математика – И.И. Баврин. – М.: Академия, Высшая школа, 2000.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1987.
3. Высшая математика. Общий курс / под ред. А.И. Яблонского. – Минск: Высшая школа, 1993.
4. Гюнтер Н.М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике / Н.М. Гюнтер, Р.О. Кузьмин. – М.: Физматгиз, 1959.
5. Задачи и упражнения по математическому анализу / под ред. В.П. Демидовича. – М.: Наука, 1970.
6. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов / А.И. Карасев [и др.]. – М.: Высшая школа, 1982. – Ч. 1 и 2.
7. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов / А.Н. Колесников. – М.: Инфра-М, 1997.
8. Красс М.С. «Математика для экономических специальностей» / М.С. Красс. – М.: Инфра-М, 1999.

9. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике для студентов 2 курса / К.Н. Лунгу [и др.]. – М.: Айрис-пресс, 2006.
10. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике для студентов 1 курса / К.Н. Лунгу [и др.]. – М.: Айрис-пресс, 2005.
11. Малыхин В.И. Математика в экономике / В.И. Малыхин. – М.: Инфра-М, 2001.
12. Математика: контрольные задания и методические указания для студентов I курса всех специальностей заочной формы обучения / Сост. Н.И. Чвялева, В.П. Степин, А.А. Кныш. – Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2008.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1976.
14. Практикум по высшей математике для экономистов. / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
15. Сборник задач по математике / под редакцией А.В.Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1990.
16. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике / А.С. Солодовников [и др.]. – М.: Финансы и статистика, 1998. – Ч. 1.
17. Трикоми Н.М. Дифференциальные уравнения / Н.М. Трикоми. – Н: ИЛ, 1962.
18. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970.
19. Шелобаев С.И. Математические методы и модели / С.И. Шелобаев. – М.: ЮНИТИ, 2000.
20. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики / В.Е. Шнейдер [и др.]. – М.: Высшая школа, 1978. – Ч. 1 и 2.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению работы по переаттестации
и вариант заданий по переаттестации

В институте непрерывного образования Уральского государственного экономического университета обучаются студенты, имеющие среднее и высшее профессиональное образование, и, следовательно, изучившие некоторые теоретические и практические основы математики.

Для перезачета изученного материала такие студенты должны выполнить контрольные задания по одному из предлагаемых ниже вариантов. По номеру варианта необходимо выбрать порядковый номер примера в каждом задании. Например, для 2 варианта необходимо решить все вторые примеры всех шести заданий.

Выбор варианта производится по начальной букве фамилии студента:

Начальная буква фамилии студента	Вариант
А, Б	1
В, Г	2
Д, Е, Ж	3
З, И, К	4
Л, М	5
Н, О, П	6
Р, С	7
Т, У, Ф, Х	8
Ц, Ч, Ш, Щ	9
Э, Ю, Я	10

Работа по переаттестации состоит из шести практических заданий. Условия задач необходимо переписать в тетрадь; подробно описать решение; при необходимости сделать чертеж. В завершении необходимо написать полученный ответ и при необходимости сделать его проверку. В конце работы должен быть приведен список фактически использованной литературы в алфавитном порядке, указана дата выполнения работы и поставлена подпись студента.

Выполненная работа может быть зачтена при условии, что она решена с соблюдением распределения вариантов, написана самостоятельно, в соответствии с изученным теоретическим материалом.

Решенные и правильно оформленные задания сдаются на проверку и рецензирование в университет в сроки, установленные учебным планом и графиком изучения дисциплины.

В тех случаях, когда работа не зачтена, следует ее доработать, вновь направить на проверку преподавателю вместе с рецензией и незачтенной работой. Кроме того, в том случае, если работа не зачтена, разрешается выполнить задание по переаттестации другого варианта (по выбору студента).

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ПО ПЕРЕАТТЕСТАЦИИ

ТЕМА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Вычислить AB-BA, если матрицы A и B заданы:

1. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 5 & -4\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 4\\ 3 & -4 & 7\end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix}3 & 6 & -2\\ -1 & 5 & -7\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-4 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -5\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & 4 & 9\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -6\\ -4 & -1 & 5\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix}9 & 4 & -2\\ -3 & 0 & -1\\ -1 & -3 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & -3 & 4\\ 1 & -7 & 0\\ -3 & 5 & 1\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}0 & -4 & 1\\ -1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ 5 & -6 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix}7 & -1 & -3\\ 1 & -4 & 3\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -5 & -6\\ 0 & 6 & 0\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -3 & 4 & 3\\ -8 & 0 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}11 & -2 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ -3 & -5 & -2\\ -5 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -5 & 6\\ 1 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}12 & 3 & -2\\ -4 & 0 & -3\\ 0 & -4 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 0 & 5 & -3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 3\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 7 & 6\\ 0 & -2 & -3\\ 8 & 1 & -2\end{pmatrix}$

ТЕМА 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решить систему уравнений методом Крамера:

1. $\begin{cases}2x-3y+3z=-10\\ x+3y-3z=13\\ x+z=0\end{cases}$

2. $\begin{cases}x-y+z=3\\ 2x+y+z=11\\ x+y+2z=8\end{cases}$

3. $\begin{cases}x+2y+z=8\\ -2x+3y-3z=-5\\ 3x-4y+5z=10\end{cases}$

4. $\begin{cases}2x+y-z=0\\ 3y+4z+6=0\\ x+z=1\end{cases}$

5. $\begin{cases}-2x+y+6=0\\ x-2y-z=5\\ 3x+4y-2z=13\end{cases}$

6. $\begin{cases}x-2y-3z=-4\\ 4x+y+2z=13\\ 2x+5y+z=-7\end{cases}$

7. $\begin{cases}3x+y+5z=0\\ 2x+3y+3z=3\\ 2x+y+4z=-1\end{cases}$

8. $\begin{cases}3x+4y+3z=9\\ x+2y+z=5\\ x+2z=-3\end{cases}$

9. $\begin{cases}2x+y-z=1\\ x+y+z=8\\ y+2z=11\end{cases}$

10. $\begin{cases}2x+y+3z=3\\ 3x+2y+4z=7\\ 2x-3y+z=1\end{cases}$

ТЕМА 3 - 4. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

По координатам вершин треугольника ABC найти:

1. уравнения сторон AB и AC;
2. уравнение высоты AD;
3. угол BAC;
4. периметр треугольника;
5. площадь треугольника.

Сделать чертеж.

1. *A(-3;4); B(-3;0); C(3;0).*
2. *A(2;5); B(-3;5); C(2;0).*
3. *A(-4;4); B(5;4); C(5;7).*
4. *A(-3;2); B(-3;-6); C(-1;2).*
5. *A(0;3); B(5;3); C(5;7).*
6. *A(7;0); B(7;2); C(-2;2).*
7. *A(-1;4) B(-1;2); C(-7;4).*
8. *A(2;-1); B(2;3); C(5;-1).*
9. *A(3;-3); B(7;-3); C(7;5).*
10. *A(5;0); B(5;-3); C(0;-3).*

ТЕМА 5. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определить тип кривой второго порядка и ее основные геометрические характеристики. Сделать чертеж.

1. $25x^2 + 9y^2=225$
2. $16x^2 - 4y^2=72$
3. $9x^2 - 16y^2=144$
4. $16x^2 + 25y^2=400$
5. $4x^2 + 9y^2=36$
6. $9x^2 + 9y^2=81$
7. $4x^2-25y^2-100=0$
8. $x^2-4y^2-4=0$
9. $x^2+4x-4y+8=0$
10. $3x^2+12x+2y+14=0$

ТЕМА 6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Выполнить действия:

1. $\dfrac{(3+2i)i^{126}-(1-3i)\cdot(2+3i)}{-4+2i}$

2. $\dfrac{(-3+2i)(1-i)+i^{205}(4+5i)}{3+2i}$

3. $\dfrac{(7+2i)i^{123}+(4+i)(5-i)}{3+2i}$

4. $\dfrac{(1-i)(3+5i)+i^{167}(3+i}{7-3i}$

5. $\dfrac{(4-3i)^2-(3-i)(2+5i)}{(-3+i)(-i)^{20}}$

6. $\dfrac{(2+7i)(-1+i)+i^{208}(-5+2i)}{i(1+i)}$

7. $\dfrac{(8+4i)\cdot 2i-4\cdot(3+i)\cdot i}{3-i}$

8. $\dfrac{(11+3i)i^{207}-(2+3i)}{-1-i}$

9. $\dfrac{(3+5i)(-i)^{125}+(2-i)^2}{1+3i}$

10. $\dfrac{(1+2i)^3+(4-i)(1+i)}{(-1+3i)\cdot i^{62}}$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по самостоятельной работе студентов

Самостоятельная работа студентов является одной из важнейших составляющих учебного процесса, в ходе которого происходит формирование знаний, умений и навыков и в дальнейшем обеспечивается усвоение студентом приемов познавательной деятельности, появляется интерес к творческой работе и, в конечном итоге, формируются способности решать профессиональные и научные задачи.

При изучении математики в вузе основой самостоятельной работы студентов является решение задач по изучаемому теоретическому материалу, выработка необходимых умений и навыков.

В данном разделе в соответствии с учебной программой содержатся краткие теоретические основы и примеры решения типовых задач по основным темам курса. Самостоятельная работа над предложенным учебным материалом поможет студентам выполнить необходимые контрольные работы и подготовиться к сдаче итогового экзамена.

I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ТЕМА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Матрицей размера m x n называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Обозначается: $\underset{m\times n}{A}$.

Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Индекс *i*– номер строки, индекс *j* – номер столбца. *i=1,2…m, j=1,2…n.*

В общем виде матрицу можно записать:

$$\underset{m\times n}{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то такая *матрица* называется *квадратной*.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца совпадает с номером строки, называются *диагональными.*

Если в квадратной *матрице* все диагональные элементы равны 1, а остальные элементы равны 0, то она называется *единичной (обозначается Е).*

Над матрицами можно проводить следующие действия:

1.1 Умножение матрицы на число

Чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

Если дана матрица $A=(a_{ij})$, которая умножается на число λ, то результирующей матрицей будет $B=(b_{ij})=(\lambda\cdot a_{ij})$.

ПРИМЕР.

Вычислить $3\cdot A$, *если* $A=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

Используя правила вычитания матриц и умножения матрицы на число, имеем:

$$3\cdot A=3\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 4 \\ 3\cdot 1 \\ 3\cdot(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

1.2 Сложение матриц

Складываются матрицы одинаковой размерности. Получается матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов исходных матриц.

Пусть даны матрицы $A=(a_{ij})$ $B=(b_{ij})$. Результатом их сложения будет матрица $C=(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$. Аналогично проводится вычитание матриц.

ПРИМЕР.

Найти сумму и разность матриц:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Складывая и вычитая соответствующие элементы матриц, находим:

$$A+B=\begin{pmatrix} 2+1 & -3+5 \\ 3+5 & 7+4 \\ 5+0 & -2+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 11 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A-B=\begin{pmatrix} 2-1 & -3-5 \\ 3-5 & 7-4 \\ 5-0 & -2-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

1.3 Умножение матриц

Умножение матриц возможно, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда каждый элемент полученной матрицы равен сумме произведений элементов i – ой строки первой матрицы на соответствующие элементы j-го столбца второй.

Пусть даны матрицы $\underset{m\times k}{A}=(a_{ij})$ $\underset{k\times n}{B}=(b_{ij})$. Результатом их умножения получится матрица $\underset{m\times n}{C}=\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times n}{B}$, каждый элемент которой находится по правилу $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

ПРИМЕР.

Найти произведение матриц:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы, поэтому произведение этих матриц существует. Используем правило умножения матриц: каждый элемент результирующей матрицы равен сумме произведений элементов соответствующей строки первой матрицы на элементы соответствующего столбца второй матрицы:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot3+2\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0+2\cdot(-1) & 1\cdot2+0\cdot2+2\cdot1\\ 3\cdot2+(-1)\cdot3+0\cdot1 & 3\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot(-1) & 3\cdot2+(-1)\cdot2+0\cdot1\\ 1\cdot2+1\cdot3+(-2)\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot0+(-2)\cdot(-1) & 1\cdot2+1\cdot2+(-2)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 4\\ 3 & 3 & 4\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

1.4 Транспонирование матриц

Матрица A^T называется транспонированной к матрице А, если в ней поменяли местами строки и столбцы.

ПРИМЕР.

Транспонировать матрицу:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -3 & 1\\ -6 & 5\end{pmatrix}$$

Решение:

По определению операции транспонирования, меняем в исходной матрице строки и столбцы местами:

$$A^T=\begin{pmatrix}3 & -3 & -6\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

1.5 Определитель матрицы

Определитель – это число, характеризующее квадратную матрицу.

Обозначается: $|A|, \Delta$.

Определителем первого порядка матрицы $A=(a_{11})$ называется число

$$|A|=\Delta A=|a_{11}|.$$

ПРИМЕР.

Определителем матрицы $A=(-5)$ будет само число $|A|=|-5|=-5$

Определителем второго порядка матрицы $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ называется число, которое находится по правилу:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

ПРИМЕР.

Вычислить определитель второго порядка матрицы: $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$

Решение:

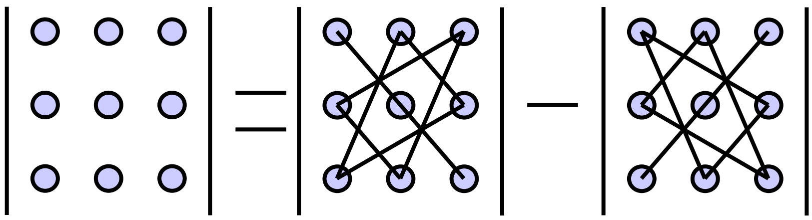
Определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагонали:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) = 17$$

Определителем третьего порядка матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число, которое определяется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Для вычисления определителей третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников:



ПРИМЕР.

Вычислить определитель третьего порядка матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Определитель третьего порядка находится по правилу треугольников:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 0 = -40$$

Свойство 1: Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов стоящих на главной диагонали.

Свойство 2: Определитель единичной матрицы равен единице.

Свойство 3: Определитель верхней треугольной матрицы равен произведению элементов стоящих на главной диагонали.

Свойство 4: При транспонировании величина определителя не изменяется т.е. $|A^T| = |A|$.

Свойство 5: При перестановки местами двух радом стоящих строк или столбцов определитель сохраняет свою абсолютную величину, но меняет знак на противоположный.

Свойство 6: Линейное свойство определителя:

$$\begin{vmatrix} a'_{1j}+a''_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{vmatrix}$$

Свойство 7: Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

Свойство 8: Умножение всех элементов строки или столба на число λ равносильно умножению определителя на это числоλ.

Свойство 9: Если все элементы некоторой строки или столбца равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Свойство 10: Если элементы двух строк или столбцов пропорциональны, то определитель равен нулю.

Свойство 11: Если к элементам некоторой строки определителя прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на произвольный множитель λ, то величина определителя не изменится.

Свойство 12 (Теорема Якоби): Если к элементам некоторого столбца определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на произвольный множитель λ, то величина определителя не изменится.

<u>*Минором*</u> некоторого элемента определителя называется определитель, полученный из исходного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Минор элемента a_{ij} обозначается m_{ij}.

<u>*Алгебраическим дополнением*</u> некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^S$, где S – сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Обозначается: $A_{ij} = (-1)^S m_{ij}$, где $S = i + j$.

<u>*Определитель любого порядка может быть найден по правилу:*</u>

<u>*Определитель*</u> равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \dots + a_{in}\cdot A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot A_{ik}$$

ПРИМЕР.

Вычислить определитель матрицы, используя разложение определителя по строке или столбцу:

$$A=\begin{pmatrix}5&1&3&3\\2&3&1&6\\9&3&7&11\\3&1&3&5\end{pmatrix}$$

Решение:

Запишем разложение определителя по первой строке:

$$\Delta A=\begin{vmatrix}5&1&3&3\\2&3&1&6\\9&3&7&11\\3&1&3&5\end{vmatrix}=5\cdot A_{11}+1\cdot A_{12}+3\cdot A_{13}+3\cdot A_{14},$$ где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Найдем алгебраические дополнения по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot m_{ij}$, где m_{ij} - минор элемента a_{ij}, который получается из исходного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot m_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}3&1&6\\3&7&11\\1&3&5\end{vmatrix}=3\cdot7\cdot5+1\cdot1\cdot11+3\cdot3\cdot6-1\cdot7\cdot6-1\cdot3\cdot5-3\cdot3\cdot11=14$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot m_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2&1&6\\9&7&11\\3&3&5\end{vmatrix}=-(2\cdot7\cdot5+3\cdot1\cdot11+9\cdot3\cdot6-3\cdot7\cdot6-1\cdot9\cdot5-2\cdot3\cdot11)=-28$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot m_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2&3&6\\9&3&11\\3&1&5\end{vmatrix}=3\cdot2\cdot5+3\cdot3\cdot11+1\cdot9\cdot6-3\cdot3\cdot6-9\cdot3\cdot5-2\cdot1\cdot11=-28$$

$$A_{14}=(-1)^{1+4}\cdot m_{14}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2&3&1\\9&3&7\\3&1&3\end{vmatrix}=-(3\cdot2\cdot3+3\cdot3\cdot7+1\cdot9\cdot1-3\cdot3\cdot1-9\cdot3\cdot3-2\cdot1\cdot7)=14$$

Подставляем полученные значения в разложение определителя:

$$|A|=5\cdot A_{11}+1\cdot A_{12}+3\cdot A_{13}+3\cdot A_{14}=5\cdot14+1\cdot(-28)+3\cdot(-28)+3\cdot14=0\,.$$

Замечание.

Если в матрице имеются нулевые элементы, то удобнее раскладывать определитель по той строке или столбцу, который содержит большее число нулей.

1.6 Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если AB=BA=E, где E – единичная матрица.

<u>*Для нахождения обратной матрицы используется следующий алгоритм:*</u>

1. Определяют, квадратная ли матрица. Если нет, то обратной матрицы для нее не существует.
2. Находят определитель исходной матрицы. Если он равен нулю, то обратной матрицы для нее не существует.
3. Заменяют каждый элемент матрицы его алгебраическим дополнением.
4. Полученную матрицу транспонируют.
5. Каждый элемент полученной матрицы делят на определитель исходной матрицы. Результирующая матрица является обратной для исходной матрицы.
6. Делают проверку: перемножают исходную и полученную матрицы. В результате должна получиться единичная матрица.

ПРИМЕР.

Для данной матрицы найти обратную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>*Решение:*</u>

Используем алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. Матрица квадратная (число строк равно числу столбцов), следовательно обратная к ней матрица существует.

2. Находим определитель исходной матрицы:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \cdot 3 = -49 \neq 0$$

3. Находим матрицу, состоящую из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -7; \qquad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-1) - 4 \cdot 3) = 14;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (2 \cdot 2 - 4 \cdot 1) = 0; \qquad A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -((-2) \cdot (-1) - 5 \cdot 2) = 8;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 5 = -23; \qquad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 2 - 4 \cdot (-2)) = -14$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 - 1 \cdot 5 = -11; \qquad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 3 - 2 \cdot 5) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)) = 7$$

Таким образом, получаем матрицу:

$$\begin{pmatrix} -7 & 14 & 0 \\ 8 & -23 & -14 \\ -11 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Полученную матрицу транспонируем:

$$\begin{pmatrix} -7 & 14 & 0 \\ 8 & -23 & -14 \\ -11 & 1 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -11 \\ 14 & -23 & 1 \\ 0 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

5. Последнюю матрицу делим на определитель исходной матрицы и получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -11 \\ 14 & -23 & 1 \\ 0 & -14 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{8}{49} & \frac{11}{49} \\ -\frac{2}{7} & \frac{23}{49} & -\frac{1}{49} \\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

6. Осуществляем проверку полученного результата. Для этого находим произведение полученной матрицы на исходную:

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{8}{49} & \frac{11}{49} \\ -\frac{2}{7} & \frac{23}{49} & -\frac{1}{49} \\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{7}\cdot 3+\left(-\frac{8}{49}\right)\cdot 2+\frac{11}{49}\cdot 4 & \frac{1}{7}\cdot(-2)+\left(-\frac{8}{49}\right)\cdot 1+\frac{11}{49}\cdot 2 & \frac{1}{7}\cdot 5+\left(-\frac{8}{49}\right)\cdot 3+\frac{11}{49}\cdot(-1) \\ \left(-\frac{2}{7}\right)\cdot 3+\frac{23}{49}\cdot 2+\left(-\frac{1}{49}\right)\cdot 4 & \left(-\frac{2}{7}\right)\cdot(-2)+\frac{23}{49}\cdot 1+\left(-\frac{1}{49}\right)\cdot 2 & \left(-\frac{2}{7}\right)\cdot 5+\frac{23}{49}\cdot 3+\left(-\frac{1}{49}\right)\cdot(-1) \\ 0\cdot 3+\frac{2}{7}\cdot 2+\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot 4 & 0\cdot(-2)+\frac{2}{7}\cdot 1+\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot 2 & 0\cdot 5+\frac{2}{7}\cdot 3+\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получили в результате единичную матрицу. Следовательно, обратная матрица была найдена верно.

1.7 Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размером m x n:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Выделим в ней *k-строк* и *k-столбцов*.

Из элементов, состоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель *k-го порядка*. Все такие определители называются *минорами этой матрицы.*

Ранг матрицы – наибольший из *порядков* миноров данной матрицы, отличных от нуля. Обозначается ***r***, ***r(A)*** или ***rang(A)***. Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется *базисным.*

ПРИМЕР. *Определить ранг матрицы*:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение: Все миноры третьего порядка равны нулю.

Есть минор второго порядка, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

Значит, *r(A)=2*. Базисный минор стоит на пересечении второй и третьей строки с первым и третьим столбцами.

ТЕМА 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система m линейных уравнений с n переменными в общем случае имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

где числа a_{ij} $(i = 1,2...m, \quad j = 1,2...n)$ называются коэффициентами при переменных,

b_i - свободные члены,

x_j - неизвестные величины.

Решением системы линейных уравнений называется такая совокупность чисел k_1, $k_2, \ldots k_n$ при подстановке которых каждое уравнение обращается в верное равенство.

В матричной форме система уравнений записывается следующим образом:

AX=B,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы, составленная из коэффициентов при неизвестных;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица – столбец неизвестных;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов.

Рассмотрим способы решения системы линейных уравнений.

2.1 *Метод Крамера*

Пусть дана система линейных уравнений. Рассмотрим частный случай, когда число неизвестных равно числу уравнений ($m=n$). Найдем определитель матрицы системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$$

Пусть Δj – определитель матрицы, полученной из матрицы А заменой j–го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

и так далее.

Тогда, если определитель матрицы системы не равен 0, то система уравнений (1) имеет единственное решение, которое определяется по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1,2 \dots n)$$ <u>*- формулы Крамера.*</u>

ПРИМЕР.

Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

<u>*Решение:*</u>

Составляем матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисляем определитель этой матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 2 - 9 - 2 - 4 = -8 \neq 0$$

Находим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3, получающиеся из исходного определителя заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 32 - 2 - 24 - 4 - 4 = -8;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 - 16 + 6 - 16 - 4 = -16;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24 + 12 + 4 + 18 - 32 - 2 = -24$$

Теперь используя формулы Крамера $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, находим решение системы:

$$x_1 = \frac{-8}{-8} = 1; \quad x_2 = \frac{-16}{-8} = 2; \quad x_3 = \frac{-24}{-8} = 3.$$

2.2 Метод обратной матрицы

Пусть дана система линейных уравнений. Снова рассмотрим случай, когда число неизвестных равно числу уравнений.

В матричной форме система имеет вид: $AX=B$. Пусть существует обратная матрица A^{-1} к матрице системы А. Тогда решением матричного уравнения будет матрица-столбец X, который находится по правилу:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

ПРИМЕР.

Решить систему уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение:

Запишем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и матрицу-столбец свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A был найден ранее: $\Delta A = -8$.

Найдем матрицу, обратную к матрице А. Для этого составляем матрицу из алгебраических дополнений элементов определителя матрицы А и транспонируем ее:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{21} = (-1)^3 \cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{23} = (-1)^5 \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 11 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 11 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Полученную матрицу делим на определитель исходной матрицы и записываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 11 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Решением исходной системы уравнений будет матрица-столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$, найденная как произведение обратной матрицы на матрицу-столбец свободных членов:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 11 & 5 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -10-6+8 \\ 8+8-32 \\ 22+10-56 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -8 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом: $x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$

2.3 Метод Гаусса

Этот метод заключается в последовательном исключении переменных из системы уравнений. Рассмотрим его на конкретном примере.

ПРИМЕР. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

<u>*Решение:*</u>

Составляем расширенную матрицу системы, в которую входят коэффициенты при переменных и свободные члены:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Чтобы исключить переменную x_1 из второго и третьего уравнений, умножим первую строку на (-2) и (-3) и полученные строки прибавим ко второй и третьей строке соответственно:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right)(-2)(-3) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Чтобы исключить переменную x_3 из третьего уравнения, умножим вторую строку на (-1) и полученную строку прибавим к третьей строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{array}\right)(-1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Получили систему уравнений, равносильную исходной системе, в которой первое уравнение содержит три переменных, второе – две, а третье – одну переменную:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -7x_2 + 4x_3 = -2 \\ \quad 2x_2 = 4 \end{cases}$$

Отсюда последовательно находим:

$x_2 = 2; \qquad -14 + 4x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 3; \qquad x_1 + 4 - 3 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$

Таким образом, решение системы:

$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3$.

Проверяем полученное решение, подставляя найденные значения в исходную систему:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2 \\ 3 \cdot 1 + 2 + 3 = 8 \end{cases}$$

Получили тождественные равенства, следовательно система решена правильно.

ТЕМА 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

3.1 Системы координат

Прямая линия, с указанным на ней направлением, называется *осью.*

Отрезок на оси называется *направленным*, если указано, какая из его граничных точек является началом и какая – концом. Обозначение $\overrightarrow{AB}$ - направленный отрезок с началом в точке *A* и концом в точке *B*.

Направленный отрезок, у которого точка начала совпадает с точкой конца, называется *нулевым отрезком* или отрезком с *нулевым направлением*.

С каждым направленным отрезком сопоставляется его числовая характеристика – *величина направленного отрезка*. Величиной AB направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется число, равное длине отрезка $\overrightarrow{AB}$, взятое со знаком плюс, если направление $\overrightarrow{AB}$ совпадает с направлением оси, и со знаком минус, если направление $\overrightarrow{AB}$ противоположно направлению оси.

Два ненулевых направленных отрезка называются *равными*, если при совмещении начал этих отрезков совпадают и их концы.

Любые два нулевых направленных отрезка считаются равными.

ТЕОРЕМА 1: Необходимым и достаточным условием равенства двух направленных отрезков на данной оси является равенство величин этих отрезков.

Линейными операциями над направленными отрезками будем называть сложение таких отрезков и умножение направленного отрезка на вещественное число.

Для определения суммы двух направленных отрезков $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ совместим начало C отрезка $\vec{CD}$ с концом B отрезка $\vec{AB}$. Полученный при этом направленный отрезок $\vec{AD}$ называется *суммой* направленных отрезков $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ и обозначается $\vec{AB}+\vec{CD}$.

ТЕОРЕМА 2: Величина суммы направленных отрезков равна сумме величин слагаемых отрезков.

Следствие: При любом расположении точек *A, B, C* на числовой оси величины направленных отрезков $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ и $\vec{AC}$ удовлетворяют соотношению $AB+BC=AC$, которое называется *основным тождеством*.

Произведением направленного отрезка $\vec{AB}$ *на вещественное число* α называется направленный отрезок, обозначаемый $\alpha\vec{AB}$, длина которого равна произведению числа $|\alpha|$ на длину отрезка $\vec{AB}$ и направление которого совпадает с направлением отрезка $\vec{AB}$ при $\alpha>0$ и противоположно направлению $\vec{AB}$ при $\alpha<0$.

Величина направленного отрезка $\alpha\vec{AB}$ равна αAB.

3.2 ***Декартовы координаты на плоскости***

Две перпендикулярные оси на плоскости с общим началом и одинаковой масштабной единицей образуют *декартову прямоугольную систему координат на плоскости (Рис. 3.1).*

Одна из осей называется *осью Ox*, или осью *абсцисс*, другую – осью *Oy,* или осью *ординат*. Эти оси называют также *координатными осями.*

Обозначим через M_x и M_y соответственно проекции произвольной точки *M* плоскости на оси *Ox* и *Oy*.

Декартовыми прямоугольными координатами x и y точки M будем называть соответственно величины направленных отрезков $\vec{OM}_x$ и $\vec{OM}_y$.

Обозначение M(x,y).

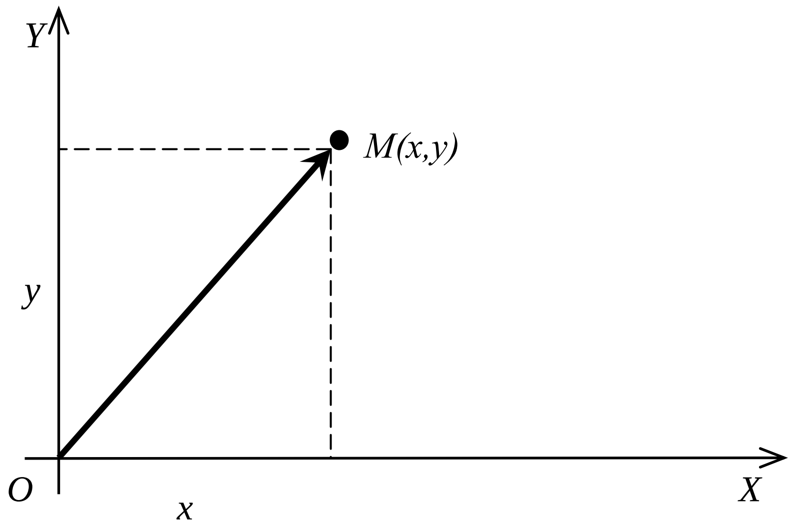


Рис.3.

ТЕОРЕМА 3: Пусть $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$– две точки на оси, тогда расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между точками $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$ может быть найдено по формуле $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

3.3 *Декартовы координаты в пространстве*

Три взаимно перпендикулярных оси в пространстве (координатные оси) с общим началом О и одинаковой масштабной единицей образуют декартову прямоугольную систему координат в пространстве (Рис. 3.2). Одна из осей называется <u>*осью Ox*</u>, или осью <u>*абсцисс*</u>, другую – осью

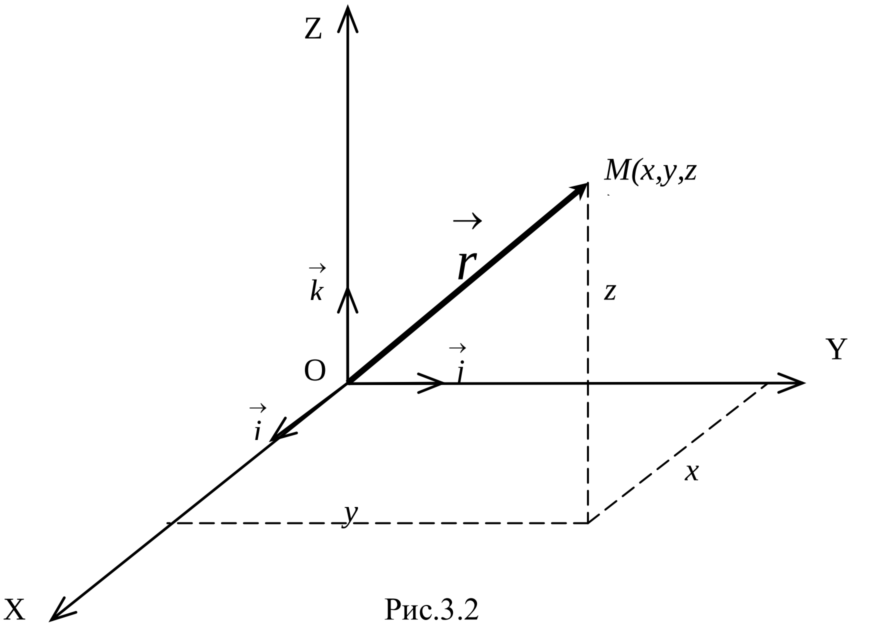


Рис.3.2

<u>*Oy*</u>, или осью <u>*ординат*</u>, третью осью <u>*Oz*</u>, или осью <u>*аппликат*</u>.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - отры (единичные векторы) декартовой система координат.

$\vec{r}$ - радиус-вектор точки *M* $\quad \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

Если на плоскости даны две точки с координатами $A(x_1,\ y_1)$ *и* $B(x_2,\ y_2)$, то расстояние между этими точками вычисляется по формуле:

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,

т.е. длина отрезка равна квадратному корню из суммы квадратов разностей одноименных координат его концов. В частности, расстояние точки $M(x,\ y)$ от начала координат определяется по формуле $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

ПРИМЕР. Найти расстояние между точками А (2; -1) и В (5; 3).

<u>*Решение:*</u> Случае $x_1=2,\ y_1= -1,\ x_2=5,\ y_2=3$, поэтому $AB = \sqrt{(5-2)^2 + (3+1)^2} = 5$.

Если даны координаты трех вершин треугольника $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ и $C(x_3,\ y_3)$, то его площадь может быть вычислена по формуле:

$S = \frac{1}{2}\,|\,x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\,|$.

<u>*Деление отрезка в данном отношении*</u>

Если точка M (x, y) лежит на прямой, проходящей через данные точки M_1 (x_1, y_1), $M_2(x_2, y_2)$, и делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}$, то координаты точки M определяются по формулам

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

В частности, если точка $M(x, y)$ делит отрезок M_1M_2 пополам, то

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

При решении задач следует помнить о том, что в эти формулы вместо x и y нужно ставить координаты той из двух данных точек, которая стоит в числителе отношения, определяющего λ.

3.4 Вектор. Основные понятия.

Геометрическим вектором, или просто *вектором,* будем называть направленный отрезок.

Обозначение вектора, либо как направленный отрезок $\vec{AB}$, где точки A и B обозначают соответственно начало и конец вектора, либо латинской прописной буквой $\vec{a}$

Обозначение длины вектора, либо $\left|\vec{AB}\right|$, либо $\left|\vec{a}\right|$

Вектор называется *нулевым* если его начало и конец совпадают.

Векторы называются *коллинеарными,* если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

Все нулевые вектора считаются равными.

Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ и конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ *(правило треугольника (Рис.3.3)).*

Правило треугольника

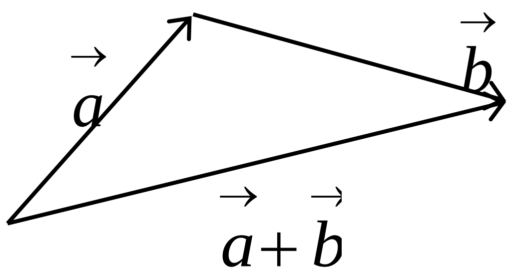


Рис.3.3

Правило параллелограмма

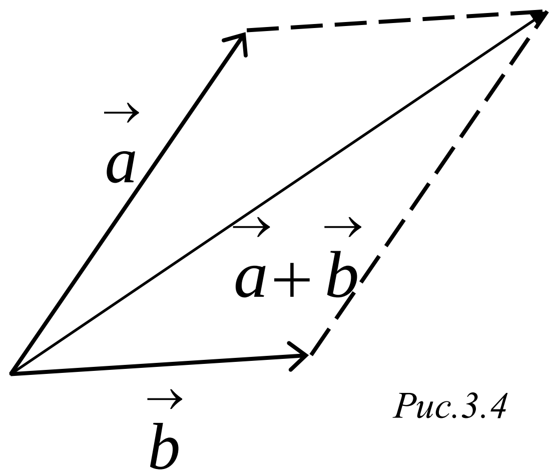


Рис.3.4

<u>*Свойства сложения векторов:*</u>

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительное свойство);

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательное свойство);

3. Существует <u>*нулевой вектор*</u> $\vec{o}$ такой, что $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$

4. Для каждого вектора $\vec{a}$ существует <u>*противоположный*</u> ему вектор $\vec{a}'$ такой, что $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{o}$

<u>*Разностью*</u> $\vec{a}-\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

ТЕОРЕМА 4: Если вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$, то существует вещественное число λ такое, что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

<u>*Линейной комбинацией n векторов*</u> $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ будем называть сумму произведений этих векторов на произвольные вещественные числа, т. е. выражение вида:

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+...+\alpha_n\mathbf{a}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{a}_i\ ,$$

где $\alpha_1, \alpha_2,\ldots \alpha_n$ вещественные числа.

Вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,...,\boldsymbol{a}_n$ называются <u>*линейно зависимыми*</u>, если найдутся такие вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2,\ldots \alpha_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,...,\boldsymbol{a}_n$ с указанными числами обращается в нуль, т.е. имеет место равенство

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+...+\alpha_n\mathbf{a}_n=0 \qquad \text{или} \qquad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{a}_i=0.$$

Вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,...,\boldsymbol{a}_n$ называются <u>*линейно независимыми*</u>, если равенство нулю их линейной комбинации $\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+...+\alpha_n\mathbf{a}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{a}_i$ возможно лишь в случае, когда все числа $\alpha_1, \alpha_2,\ldots \alpha_n$ равны нулю.

ТЕОРЕМА 5: Если хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,...,\boldsymbol{a}_n$ является нулевым, то эти векторы являются линейно зависимыми.

ТЕОРЕМА 6: Если среди n векторов какие-либо $(n-1)$ векторов линейно зависимы, то и все n векторов линейно зависимы.

ТЕОРЕМА 7: Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов является их коллинеарность.

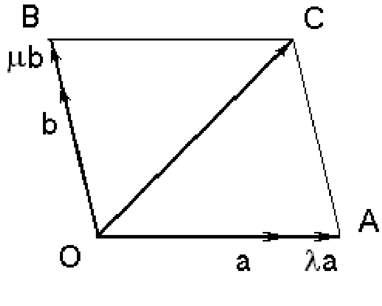
<u>*Следствие 1*</u>: Если вектора ***a** и **b*** не коллинеарны, то они линейно независимы.

<u>*Следствие 2:*</u> Среди двух неколлинеарных векторов не может быть нулевого вектора.

Вектора называются <u>*компланарными*</u>, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

ТЕОРЕМА 8: Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланарность.

<u>*Следствие 1*</u>: Каковы бы ни были неколлинеарные векторы ***a** и **b*** для любого вектора ***c***, лежащего в одной плоскости с векторами ***a** и **b***, найдутся такие вещественные числа λ и μ, что справедливо равенство $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ (Рис. 3.5):



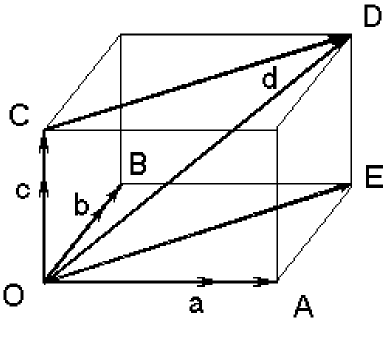


Рис.3.5

<u>*Следствие 2*</u>: Если векторы ***a**, **b** и **c*** не компланарны, то они линейно независимы.

ТЕОРЕМА 9: Любые четыре вектора линейно зависимы.

3.5 *Скалярное произведение двух векторов*

Углом между двумя векторами ***a** и **b*** называется угол, не превосходящий π, между двумя лучами исходящими из одной точки, один из которых имеет направление совпадающее с направлением вектора ***a***, другой имеет направление совпадающее с направлением вектора ***b***.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$(\boldsymbol{ab}) = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot \cos\varphi$

ТЕОРЕМА 10: Необходимым и достаточным условием ортогональности двух ненулевых векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

ТЕОРЕМА 11: Два ненулевых вектора ***a** и **b*** составляют острый (тупой) угол тогда и только тогда, когда их скалярное произведение положительно (отрицательно).

Свойства скалярного произведения:

1. $(\boldsymbol{ab})=(\boldsymbol{ba})$ (переместительное свойство);
2. $((\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{b})=\alpha(\boldsymbol{ab})$ (сочетательное свойство относительно числового множителя);
3. $((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{ac})+(\boldsymbol{bc})$ (распределительное свойство относительно суммы векторов);
4. $(\boldsymbol{aa})>0$, *если* ***a*** – ненулевой вектор, и $(\boldsymbol{aa})=0$, если ***a*** – нулевой вектор.

Следствие: $(\boldsymbol{aa}) = |\boldsymbol{a}|^2$

ТЕОРЕМА 12: Если два вектора ***a** и **b*** определены своими декартовыми прямоугольными координатами $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$, то скалярное произведение этих векторов равно сумме попарных произведений их соответствующих координат – $(\boldsymbol{ab})= x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Следствие 1: Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ является равенство - $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

Следствие 2: Угол φ между векторами $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ *и* $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

ПРИМЕР. *Векторы* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *образуют угол* $\frac{\pi}{3}$. *Зная, что* $|\bar{a}| = 3$ $|\bar{b}| = 4$, *найти длину вектора* $\bar{c} = 3\bar{a} + 2\bar{b}$

Решение: Длину вектора $\bar{c}$ можно найти по формуле $(\boldsymbol{aa}) = |\boldsymbol{a}|2$, если будет известен его скалярный квадрат

$$\bar{c}^2 = (3\bar{a} + 2\bar{b})^2 = 9a^2 + 12\overline{ab} + 4\bar{b}^2.$$

по определению скалярного произведения

$$\bar{a}^2 = |\underline{a}\ |^2 = 9, \bar{b}^2 = |\bar{b}|^2 = 16, \overline{ab} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

следовательно,

$$\bar{c}^2 = 9 \cdot 9 + 12 \cdot 6 + 4 \cdot 16 = 217,$$

тогда $|\bar{c}| = \sqrt{c^{-2}} = \sqrt{217} \approx 14.7$.

ПРИМЕР. *На материальную точку действуют силы*

$$\bar{f}_1 = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}, \bar{f}_2 = -\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}, \bar{f}_3 = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$$

Найти работу равнодействующей этих сил $\bar{R}$ *при перемещении точки из положения*

A(2;-1;0) в положении B(4;1;-1).

<u>*Решение:*</u> Найдем равнодействующую $\bar{R}$

$$\bar{R} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \bar{f}_3 = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$$

Вектор перемещения

$$\bar{s} = \overline{AB} = (4-2)\bar{i} + (1+1)\bar{j} + (-1-0)\bar{k} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$$

Искомую работу найдем как скалярное произведение силы на перемещение:

A=$(\bar{R}; \bar{s}) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1(-1) = 4 + 4 - 1 = 7.$

ПРИМЕР. *Даны вершины треугольника A (3; 2; 3), B(5; 1; —1) и C(1; 2; 1). Найти внутренний угол при вершине A.*

<u>*Решение:*</u> Искомый угол φ есть угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. По координатам концов найдем эти векторы

$$\overline{AB} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}, \overline{AC} = -2\bar{i} - 4\bar{j} + 4\bar{k}.$$

Отсюда $|\overline{AB}| = \sqrt{4+1+4} = 3, |\overline{AC}| = \sqrt{4+16+16} = 6.$

Найдем скалярное произведение

$$(\overline{AB}; \overline{AC}) = 2(-2) - 1(-4) + 2 \cdot 4 = -4 + 4 + 8 = 8.$$

Применяя теперь формулу, получим

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{AB}; \overline{AC})}{|\overline{AB}||\overline{AC}|} = \frac{8}{3 \cdot 6} = \frac{4}{9};$$

$$\varphi = \arccos\frac{4}{9} \approx 63^0 36'.$$

3.6 Векторное и смешанное произведение двух векторов

<u>Векторным произведением</u> вектора ***a*** *на вектор* **b** называется вектор ***c***, обозначаемый символом ***c***=*[**ab**]* и удовлетворяющий следующим требованиям:

1. длина вектора ***c*** равна произведению длин векторов ***a*** *и* ***b*** на синус угла φ между ними, т.е. $|\mathbf{c}|=|[\mathbf{ab}]|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot \sin\varphi$

2. вектор ***c*** ортогонален каждому из векторов ***a*** *и* ***b***;

3. вектор ***c*** направлен так, что тройка векторов ***abc*** является правой.

ТЕОРЕМА 13: Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

<u>*Свойства векторного произведения.*</u>

1. ***[ab]= -[ba]*** (антиперестановочное свойство сомножителей);

2. $[(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}]=\alpha[\mathbf{ab}]$ (сочетательное свойство относительно числового множителя);

3. ***[(a+b)c]=[ac]+[bc]*** (распределительное свойство относительно суммы двух векторов);

4. ***[aa]***=0 для любого вектора ***a***.

ТЕОРЕМА 14: Если два вектора ***a*** *и* ***b*** определены своими декартовыми прямоугольными координатами ***a***$=(x_1,y_1,z_1)$, ***b***$=(x_2,y_2,z_2)$, то векторное произведение этих векторов равно

$$[\mathbf{ab}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1,\ z_1x_2-z_2x_1,\ x_1y_2-x_2y_1).$$

<u>*Следствие*</u>: Если два вектора ***a***$=(x_1,y_1,z_1)$, ***b***$=(x_2,y_2,z_2)$ коллинеарны, то координаты их пропорциональны, т.е.

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Пусть даны три произвольных вектора ***a***, ***b*** *и* ***c***. Если вектор ***a*** векторно умножить на вектор ***b***, а затем получившийся при этом вектор *[**ab**]* скалярно умножить на вектор ***c***, то получившиеся в результате число*[**ab**]**c***, называется <u>*смешанным произведением*</u> векторов ***a***, ***b*** *и* ***c***.

ТЕОРЕМА 15: Смешанное произведение ***[ab]c*** равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах ***a***, ***b*** и ***c***, взятому со знаком плюс, если тройка векторов ***abc*** правая, и со знаком минус, если тройка ***abc*** левая.

<u>*Следствие*</u>: Справедливо равенство ***[ab]c = a[bc].***

ТЕОРЕМА 16: Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

ТЕОРЕМА 17: Если три вектора ***a, b*** *и* ***c*** определены своими декартовыми прямоугольными координатами ***a***$=(x_1,y_1,z_1)$, ***b***$=(x_2,y_2,z_2)$, ***c***$=(x_3,y_3,z_3)$, то смешанное произведение этих векторов равно определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов, т.е.

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

ТЕОРЕМА 18: Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$ является равенство нулю определителя, строками которого служат координаты этих векторов, т.е. равенство

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

ПРИМЕР. *Найти площадь треугольника с вершинами А (1; 2; О),*

В (3 0, -3) и С(5; 2; 6).

<u>*Решение:*</u> Площадь треугольника АВС равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$

$$S\Delta = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB}\,\overline{AC}\right\|.$$

Найдем векторы $\overline{AB} и \overline{AC}$

$$\overline{AB} = 2\bar{i} - 2\bar{j} - 3\bar{k}, \overline{AC} = 4\bar{i} + = 6\bar{k}$$

Их векторное произведение

$$\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\right| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k} = 4(-3\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}).$$

Поэтому

$\left\|\left[\overline{AB}\,\overline{AC}\right]\right\| = 4\left|-3\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}\right| = 4\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 2^2} = 4\sqrt{49} = 28$, и, следовательно $S\Delta = 14$*кв.ед.*

ПРИМЕР. *Доказать, что векторы*

$\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}, \bar{c} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 7\bar{k}$ *компланарны.*

<u>*Решение:*</u> Вычислим смешанное произведение $\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}$:

$$\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 + 1\cdot 16 + 2\cdot(-10) = 0$$

Определитель был раскрыт разложением по первой строке. Поскольку $\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}$ =0, векторы $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны.

II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ТЕМА 4. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

4.1 *Прямая на плоскости*

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, будем называть *направляющим* вектором этой прямой.

Любой ненулевой вектор, перпендикулярный направляющему вектору данной прямой, будем называть *нормальным* вектором этой прямой.

Рассмотрим прямую проходящую через точку $M(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(A,B)$. Рассмотрим любую точку на прямой $M(x,y)$ и вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$ Условием перпендикулярности прямой MM_0 и вектора $\overline{N}$ является равенство нулю их скалярного произведения

$$\overline{N}\cdot\overline{M_0M}=(A,B)\cdot(x-x_0,y-y_0)=$$

Раскроем скобки и введем обозначение: $C=-Ax_0-By_0$.

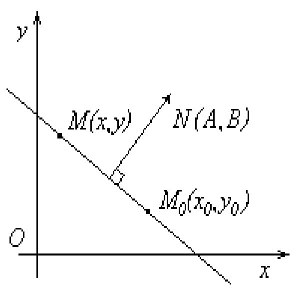


Рис. 4.1

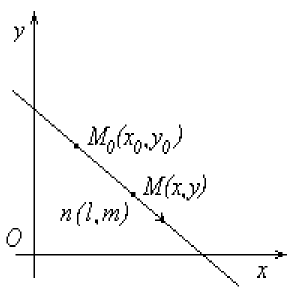


Рис. 4.2

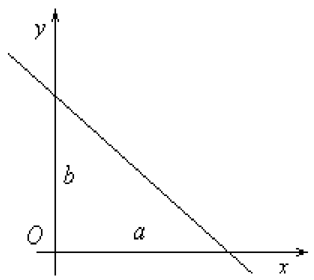


Рис. 4.3

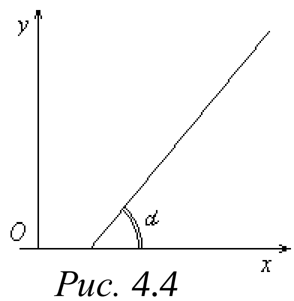


Рис. 4.4

Уравнение вида ***Ax+By+C=0*** называется *общим уравнением прямой на плоскости (Рис. 4.1).*

Общее уравнение прямой называется *полным,* если все его коэффициенты *A, B, C* отличны от нуля.

Рассмотрим все возможные виды неполных уравнений:

1) $C=0$, уравнение вида $Ax+By=0$ определяет прямую, проходящую через начало координат (поскольку координаты начала удовлетворяют этому уравнению).

2) $B=0$, уравнение вида $Ax+C=0$ определяет прямую, параллельную оси Oy (поскольку нормальный вектор $\overline{N}=(A,0)$ ортогонален оси Oy).

3) $A=0$, уравнение вида $By+C=0$ определяет прямую, параллельную оси Ox (поскольку нормальный вектор $\overline{N}=(0,B)$ ортогонален оси Ox).

4) $B=0$ и $C=0$, уравнение вида $Ax=0$ определяет ось Oy (в самом деле, эта прямая параллельна оси Oy и проходит через начало координат).

5) $A=0$ и $C=0$, уравнение вида $By=0$ определяет ось Ox (в самом деле, эта прямая параллельна оси Ox и проходит через начало координат).

Рассмотрим полное уравнение прямой, так как все коэффициенты *A*, *B*, и *C* отличны от нуля, перепишем уравнение в виде:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Обозначим $a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$.

Уравнение вида $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ называется *уравнением прямой на плоскости в отрезках.*

Здесь числа *a* и *b* имеют простой геометрический смысл: они равны величинам отрезков, которые отсекает прямая на осях *Ox* и *Oy* соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат) (Рис. 4.3).

Рассмотрим прямую проходящую через точку $M(x_0,y_0)$ параллельно вектору $\bar{n}=(l,m)$. Рассмотрим любую точку на прямой $M(x,y)$ и вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$ Условием параллельность прямой MM_0 и вектора $\bar{n}$ является коллинеарность векторов $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ или пропорциональность их координат:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

Уравнение вида $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$ называется *каноническим уравнением прямой на плоскости* (Рис. 4.2).

Примем за параметр *t* величину, стоящую в левой и правой частях канонического уравнения, и выразим *x* и *y* через *t*.

Уравнение вида

$$\begin{cases} x=lt+x_0 \\ y=mt+y_0 \end{cases}$$

называется *параметрическим уравнением прямой на плоскости.*

Умножим каноническое уравнение прямой на m, и положим $\frac{m}{l}=k$. Получим $y-y_0=k(x-x_0)$. Обозначим через *b* постоянную $b=y_0-kx_0$

Уравнение вида $y=kx+b$ называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом (Рис. 4.4).*

В этом уравнении *k* обозначает угловой коэффициент данной прямой равный $k=tg\alpha$, где α угол наклона прямой к оси *Ox*. А коэффициент *b* представляет собой величину отрезка, отсекаемого данной прямой на оси *Oy*, начиная от начала координат.

4.2 Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой

Пусть даны две прямые заданные общими уравнениями:

$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Так как $\overline{N_1} = (A_1, B_1)$ и $\overline{N_2} = (A_2, B_2)$, то угол между прямыми L_1 и L_2 равен углу между нормальными векторами к этим прямым. Из определения скалярного произведения имеем:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых L_1 и L_2 эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ этих прямых, т. е. пропорциональности их координат:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 эквивалентно условию ортогональности нормальных векторов $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ этих прямых, т. е. равенство нулю их скалярного произведения:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Пусть две прямые заданы своими каноническими уравнениями:

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} \text{ и } L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}.$$

Так как направляющими векторами прямых L_1 и L_2 являются вектора $\overline{n_1} = (l_1, m_1)$ и $\overline{n_2} = (l_2, m_2)$, то по аналогии получаем:

Угол между двумя прямыми: $\cos\varphi = \dfrac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$.

Условие параллельности двух прямых: $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $l_1l_2 + m_1m_2 = 0$.

Пусть теперь две прямые заданы своими уравнениями через угловые коэффициенты:

$L_1 : y = k_1x + b_1$ и $L_2 : y = k_2x + b_2$.

Если α_1 и α_2 – углы наклона прямых L_1 и L_2 к оси Ox, а φ - один из углов между этими прямыми, то $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$.

Таким образом

$$tg\varphi = tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

И следовательно угол между двумя прямыми $tg\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$.

Условие параллельности очевидно $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 эквивалентно условию обращения в нуль тангенса угла между прямыми и следовательно имеет вид: *$k_1 k_2 + 1 = 0$. Или $k_1 k_2 = -1$.*

Для нахождения расстояния от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой L, необходимо иметь общее уравнение прямой: $L: Ax + By + C = 0$. Формула для нахождения расстояния:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Модуль в формуле дает абсолютное значение расстояния. Применение формулы без модуля делит все точки плоскости на два класса – один с положительным расстоянием, другой с отрицательным. Два класса этих точек лежат по разные стороны относительно данной прямой.

4.3 *Плоскость в пространстве*

Любой ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, будем называть <u>нормальным</u> вектором этой плоскости.

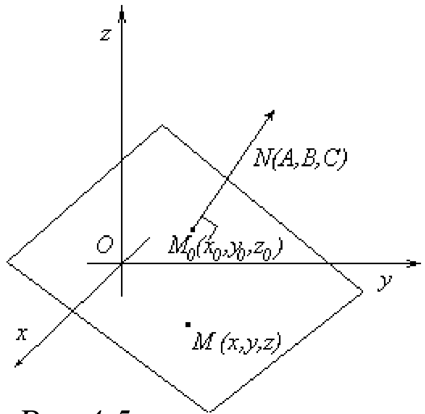


Рис.4.5

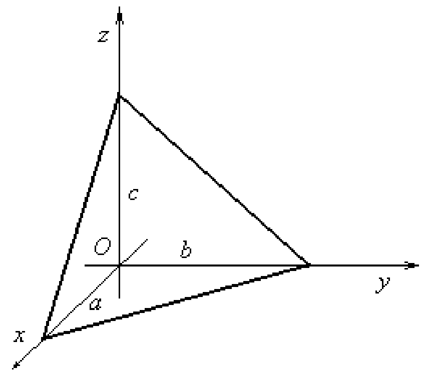


Рис.4.6

Рассмотрим вектор $\overline{N} = (A, B, C)$ нормальный к плоскости, точку $M(x_0, y_0, z_0)$ через которую проходит плоскость, любую точку в плоскости M. Для того чтобы точка $M(x, y, z)$ принадлежала плоскости очевидно необходимо, что бы вектор $\overline{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ был ортогонален нормали $\overline{N}$ к плоскости, следовательно их скалярное произведение должно обращаться в нуль:

$$\overline{(N \cdot \overline{M_0 M})} = (A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) =$$
$$= A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Раскроем скобки и обозначим за $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Уравнение вида $Ax+By+Cz+D=0$ называется *общим уравнением плоскости в пространстве* (Рис. 4.5).

Общее уравнение плоскости называется *полным*, если все его коэффициенты A, B, C, D отличны от нуля.

Рассмотрим все возможные виды неполных уравнений:

1) $D=0$, уравнение $Ax+By+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат (поскольку координаты начала удовлетворяют этому уравнению).

2) $A=0$, уравнение $By+Cz+D=0$ определяет плоскость параллельную оси Ox (поскольку нормальный вектор этой плоскости $\overline{N}=(0,B,C)$ перпендикулярен оси Ox)

3) $B=0$, уравнение $Ax+Cz+D=0$ определяет плоскость параллельную оси Oy (поскольку нормальный вектор этой плоскости $\overline{N}=(A,0,C)$ перпендикулярен оси Oy)

4) $C=0$, уравнение $Ax+By+D=0$ определяет плоскость параллельную оси Ox (поскольку нормальный вектор этой плоскости $\overline{N}=(0,B,C)$ перпендикулярен оси Ox)

5) $A=0$, $B=0$ уравнение $Cz+D=0$ определяет плоскость параллельную координатной плоскости Oxy (ибо эта плоскость параллельна осям Ox и Oy)

6) $A=0$, $C=0$ уравнение $By+D=0$ определяет плоскость параллельную координатной плоскости Oxz (ибо эта плоскость параллельна осям Ox и Oz)

7) $B=0$, $C=0$ уравнение $Ax+D=0$ определяет плоскость параллельную координатной плоскости Oyz (ибо эта плоскость параллельна осям Oy и Oz)

8) $A=0$, $B=0$, $D=0$ уравнение $Cz=0$ определяет координатную плоскость Oxy (ибо эта плоскость параллельна Oxy и проходит через начало координат)

9) $A=0$, $C=0$, $D=0$ уравнение $By=0$ определяет координатную плоскость Oxz (ибо эта плоскость параллельна Oxz и проходит через начало координат)

10) $B=0$, $C=0$, $D=0$ уравнение $Ax=0$ определяет координатную плоскость Oyz (ибо эта плоскость параллельна Oyz и проходит через начало координат)

Рассмотрим полное уравнение плоскости, так как все коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля, перепишем уравнение в виде:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Обозначим $a=-\dfrac{D}{A}$, $b=-\dfrac{D}{B}$, $c=-\dfrac{D}{C}$.

Уравнение вида $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ называется *уравнением плоскости в пространстве в отрезках.*

Здесь числа a, b и c имеют простой геометрический смысл: они равны величинам отрезков, которые отсекает плоскость на осях Ox, Oy и Oz соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат) (Рис. 4.6).

Пусть даны две плоскости заданные общими уравнениями:

$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Так как $\overline{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{N_2} = (A_2, B_2, C_1)$, то угол между прямыми P_1 и P_2 равен углу между нормальными векторами к этим плоскостям. Из определения скалярного произведения имеем:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей P_1 и P_2 эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ этих плоскостей, т. е. пропорциональности их координат:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей P_1 и P_2 эквивалентно условию ортогональности нормальных векторов $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ этих плоскостей, т. е. равенство нулю их скалярного произведения:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Пусть дана точка $M(x_1,y_1,z_1)$ и плоскость L, заданная своим общим уравнением: $L : Ax + By + Cz + D = 0$. Формула для нахождения расстояния от точки M до плоскости L:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Модуль в формуле дает абсолютное значение расстояния. Применение формулы без модуля делит все точки пространства на два класса – один с положительным расстоянием, другой с отрицательным. Два класса этих точек лежат по разные стороны относительно данной плоскости.

4.4 Прямая в пространстве

Рассмотрим прямую проходящую через точку $M(x_0,y_0,z_0)$ параллельно вектору $\overline{n} = (k, l, m)$. Рассмотрим любую точку на прямой $M(x,y,z)$ и вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ Условием параллельность прямой MM_0 и вектора $\overline{n}$ является коллинеарность векторов $\overline{n}$ и $\overline{M_0M}$ или пропорциональность их координат:

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}.$$

Уравнение вида $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}$ называется *каноническим уравнением прямой в пространстве.*

Примем за параметр t величину, стоящую в левой и правой частях канонического уравнения, и выразим x, y и z через t.

Уравнение вида

$$\begin{cases} x=kt+x_0 \\ y=lt+y_0 \\ z=mt+z_0 \end{cases}$$

называется *параметрическим уравнением прямой в пространстве*.

Пусть две прямые заданы своими каноническими уравнениями:

$$L_1:\frac{x-x_1}{k_1}=\frac{y-y_1}{l_1}=\frac{z-z_1}{m_1} \text{ и } L_2:\frac{x-x_2}{k_2}=\frac{y-y_2}{l_2}=\frac{z-z_2}{m_2}.$$

Так как направляющими векторами прямых L_1 и L_2 являются вектора $\overline{n_1}=(k_1,l_1,m_1)$ и $\overline{n_2}=(k_2,l_2,m_2)$, то по аналогии со случаем прямой на плоскости получаем:

Угол между двумя прямыми: $\cos\varphi=\frac{k_1k_2+l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{k_1^2+l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{k_2^2+l_2^2+m_2^2}}$.

Условие параллельности двух прямых: $\frac{k_1}{k_2}=\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $k_1k_2+l_1l_2+m_1m_2=0$.

4.5 Прямая и плоскость в пространстве

Пусть заданы прямая L и плоскость P в пространстве своими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m} \text{ и } Ax+By+Cz+D=0$$

Направляющий вектор прямой имеет координаты $\overline{n}=(k,l,m)$, нормальный вектор плоскости - $\overline{N}=(A,B,C)$.

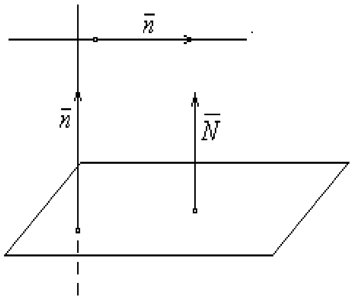


Рис.4.7

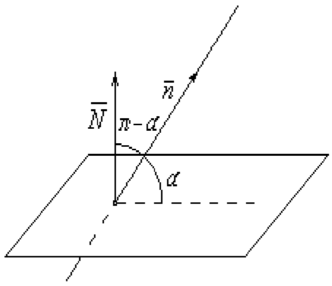


Рис.4.8

<u>Условием параллельности прямой и плоскости</u> является перпендикулярность нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой**:** $Ak + Bl + Cm = 0$

<u>Условием перпендикулярности прямой и плоскости</u> является коллинеарность нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой: $\dfrac{A}{k} = \dfrac{B}{l} = \dfrac{C}{m}$.

<u>Углом между прямой и плоскостью</u> называется угол между направляющим вектором прямой L и проекцией этого вектора на плоскость P.

Очевидно, что угол между прямой и плоскостью есть дополнительный угол между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости, и следовательно для вычисления угла между прямой и плоскостью можно использовать формулу:

$$\sin\alpha = \frac{kA + lB + mC}{\sqrt{k^2 + l^2 + m^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

ПРИМЕР. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку*

M(2; 3; -4) и параллельной плоскости yOz.

<u>Решение:</u> Уравнение плоскости, параллельной *yOz,* имеет вид:

$Ax + D = 0$;

подставляя в него координаты точки *M,* получим:

$A \cdot 2 + D = 0, D = -2A.$

Следовательно, искомое уравнение:

$Ax - 2A = 0$, *или* $x - 2 = 0$.

ПРИМЕР. *Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью*

x + 2y - 3z + 2=0 и координатными плоскостями.

<u>Решение:</u> Объем пирамиды, ограниченной какой-либо плоскостью и координатными плоскостями, равен $\frac{1}{3}Sh$, где S—площадь основания (треугольника OM_1M_2), $h = |OM_3|$ - — высота пирамиды. Если даны числа *a, b, c,* то

$$S=\frac{1}{2}|a||b|, h=|c|*,$$

следовательно, $V_{пир}=\frac{1}{6}|a||b||c|=\frac{1}{6}|abc|.$

Приведем уравнение данной плоскости к виду уравнения в отрезках. Для этого перенесем свободный член вправо и разделим на него

$$x+2y-3z=-2,$$

$$\frac{x}{-2}+\frac{2y}{-2}+\frac{3z}{-2}=1,$$

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{\frac{2}{3}}=1.$$

Отсюда следует, что *a* = - 2, b= - 1, c = 2/3 |abc| =3/4 ,

поэтому

$$V_{пир}=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{9}\,куб.ед.$$

ПРИМЕР. *Провести плоскость, параллельную данной плоскости*

x + y + z - 1=0 и отстоящей от нее на 3 ед. длины.

<u>*Решение:*</u> Приведем данное уравнение к нормальному виду, умножив на $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

Искомая плоскость есть геометрическое место точек M(x, y, z), для которых d $=|\delta|=\sqrt{3}$, поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z-\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

откуда получаем

x + y + z – 4 = 0 и x + y + z + 2= 0.

Эти две плоскости удовлетворяют условию задачи.

ПРИМЕР. *Установить, что плоскости*

$x-y-z-10=0$, 4x+11z+43=0 и 7x-5y-31=0

имеют единственную общую точку. Найти ее.

Решение: Выпишем координаты векторов $\bar{N}_1\bar{N}_2\bar{N}_3$:

$\bar{N}_1\{1,-1,-1\}, \bar{N}_2\{4,0,11\}, \bar{N}_3\{7,-5,0\}$

и вычислим их смешанное произведение

$$\bar{N}_1\bar{N}_2\bar{N}_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 11 \\ 7 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Так как $\bar{N}_1\bar{N}_2\bar{N}_3 \neq 0$, то три данные плоскости пересекаются только в одной точке. Чтобы найти ее, перепишем данные уравнения, перенеся свободные члены вправо

$$\begin{cases} x - y \quad - z = 10, \\ 4x + \quad 11z = -43, \\ 7x - y \qquad = 31. \end{cases}$$

И примем для решения этой системы формулы Крамера. Ранее найдено Δ=-2. Далее,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -43 & 0 & 11 \\ 31 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -6, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & -1 \\ 4 & -43 & 11 \\ 7 & 31 & 0 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 4 & 0 & -43 \\ 7 & -5 & 31 \end{vmatrix} = 10.$$

Поэтому

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-6}{-2} = 3,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{-2} = -2,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{10}{-2} = -5.$$

Итак, данные три плоскости имеют общую точку *P(3; -2; -5).*

ПРИМЕР. *В пространстве даны две точки M_1 и M_2, с координатами (1;0;-1) и (2;3;5) соответственно. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору* $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение: Найдем координаты вектора нормали – $\vec{n}$: $\vec{n} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Для нашей задачи: $x_1=1$; $y_1=0$; $z_1=-1$ *и* $x_2=2$; $y_2=3$; $z_2=5$. Тогда координаты вектора нормали соответственно равны: *x=2-1=1; y=3-0=3; z=5-(-1)=6*: $\vec{n} = (1;3;6)$

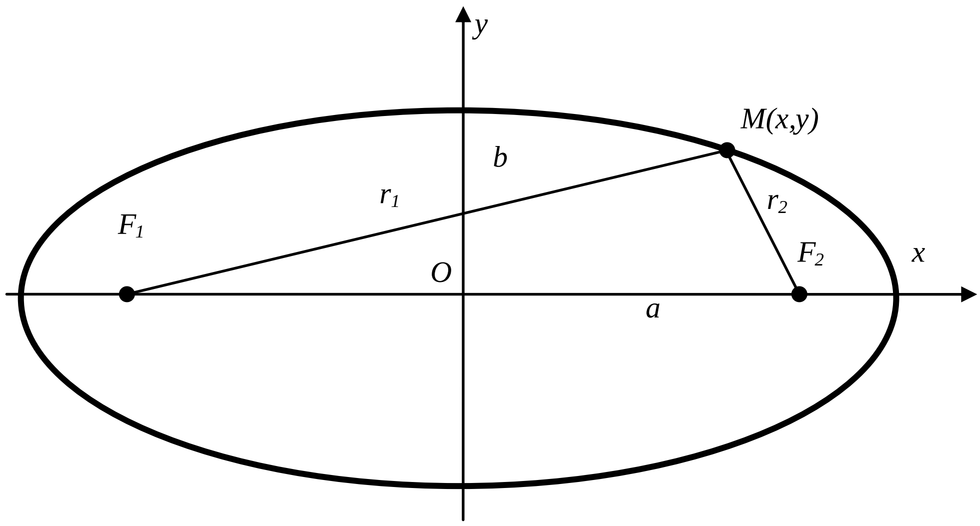
Уравнение плоскости, проходящей через т. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A;B;C)$: $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$. В условиях рассматриваемой задачи: *A=1; B=3; C=6 и* $x_1=1$; $y_1=0$; $z_1=-1$. Искомое уравнение плоскости имеет вид: *1(x-1)+3(y-0)+6(z-(-1))=0.* Раскроем скобки, приведем подобные и в результате получим общее уравнение прямой: *x+3y+6z+5=0.*

ТЕМА 5. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

5.1 Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированный точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

Для вывода уравнения выберем точки F_1 и F_2 лежащими на оси Ox, так что, точка O - начало координат лежит на середине отрезка F_1F_2. Пусть длина отрезка F_1F_2 равна $2c$. Тогда точки F_1 и F_2 имеют координаты $(-c,0)$ и $(c,0)$ соответственно. Обозначим через $2a$ постоянную, о которой говорится в определении эллипса. Очевидно, $2a>2c$, т.е. $a>c$. Пусть M – точка плоскости с координатами (x,y). Обозначим через r_1 и r_2 расстояние от точки M до точек F_1 и F_2 соответственно. Согласно определению эллипса равенство $r_1 + r_2 = 2a$ является необходимым и достаточным условием расположения точки $M(x,y)$ на данном эллипсе.



Уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *называется каноническим уравнением эллипса*.

Величины *a и b* называют соответственно большой и малой полуосями эллипса.

Величина

$\varepsilon=\dfrac{c}{a}<1$

называется *эксцентриситетом* эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, так как выражается через отношение его полуосей:

$$\acute{\varepsilon}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\,.$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого $a=b$, т. е. $\acute{\varepsilon}=0$.

ПРИМЕР. *Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса* $9x^2+4y^2=36$.

<u>Решение</u>: Разделив на 36, приведём данное уравнение к виду:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Отсюда следует, то большая полуось эллипса $a=3$,а малая полуось $b=2$.

При этом большая ось эллипса и его фокусы расположены на оси Oy

Найдём c по формуле $c=\sqrt{a^2-b^2}$:

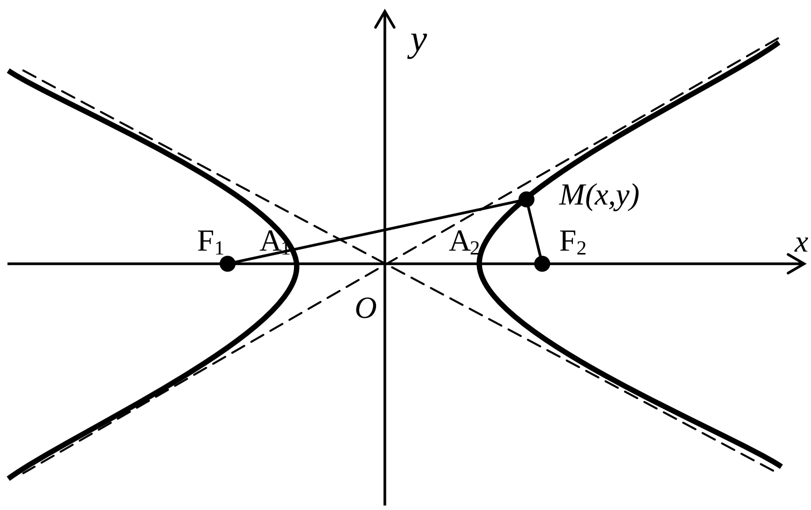
$$c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}\,.$$

Следовательно, координаты фокусов $F_1(0;-\sqrt{5})$ *и* $F_2(0;\sqrt{5})$, а его эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

5.2 Гипербола

<u>Гиперболой</u> называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированный точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *<u>фокусами</u>*, есть величина постоянная.

Для вывода уравнения выберем точки F_1 и F_2 лежащими на оси Ox, так что, точка O - начало координат лежит на середине отрезка F_1F_2. Пусть длина отрезка F_1F_2 равна $2c$. Тогда точки F_1 и F_2 имеют координаты $(-c,0)$ и $(c,0)$ соответственно.



Обозначим через $2a$ постоянную, о которой говорится в определении гиперболы. Очевидно, $2a<2c$, т.е. $a<c$. Пусть M – точка плоскости с координатами (x,y). Обозначим через r_1 и r_2 расстояние от точки M до точек F_1 и F_2 соответственно. Согласно определению эллипса равенство $|r_1-r_2|=2a$ является необходимым и дос-

таточным условием расположения точки $M(x,y)$ на данной гиперболе. Обозначим, $c^2 - a^2 = b^2$, получим: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *называется каноническим уравнением гиперболы.*

Величины a и b называют соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет гиперболы,

$y_1 = \frac{b}{a}x$; $y_2 = -\frac{b}{a}x$ –асимптоты гиперболы.

ПРИМЕР. *Определить тип кривой второго порядка $25x^2 - 4y^2 - 100=0$. Найти координаты вершин, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнение асимптот.*

Решение: Приведем заданное уравнение к каноническому виду: для этого перенесем свободный член в правую часть: $25x^2 - 4y^2 = 100$, затем разделим полученное уравнение на *100(свободный член)*. В результате получим уравнение вида: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$- уравнение гиперболы $(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, где \quad c = \sqrt{a^2 + b^2})$. $a^2=4$, $b^2=25$, $c^2 = 4 + 25$, $c = \sqrt{29}$. Тогда координаты фокусов гиперболы соответственно равны: $F_1 = (-\sqrt{29};0)$ и $F_2 = (\sqrt{29};0)$.

Эксцентриситет гиперболы, определим по формуле: $\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sqrt{29}}{2}$

Асимптоты гиперболы задаются уравнениями: $y_1 = \frac{b}{a}x$; $y_2 = -\frac{b}{a}x$. В нашем случае:

$a=2$; $b=5$. Уравнения асимптот примут вид: $y_1 = \frac{5}{2}x = 2{,}5x$ и $y_2 = -\frac{5}{2}x = -2{,}5x$

5.3 Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, также расположенной в рассматриваемой плоскости. Точка F называется фокусом параболы, прямая – директрисой параболы.

Для вывода уравнения выберем точки F и D лежащими на оси Ox, так что, точка O - начало координат лежит на середине отрезка FD. Пусть длина отрезка FD равна p. Тогда точка F имеет координаты $(\frac{p}{2},0)$. Через точку D проведем прямую перпендикулярно оси Ox. Пусть M – точка плоскости с координатами (x,y). Обозначим через r и d расстояние от точки M до точки F и директрисы соответственно. Согласно определению параболы равенство $r = d$ является необходимым и достаточным условием расположения точки $M(x,y)$ на данной параболе.

Используя формулу расстояния между двумя точками, получим:

$$r = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}\ ,\quad d = \frac{p}{2} + x$$

Согласно определению:

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x\,,$$

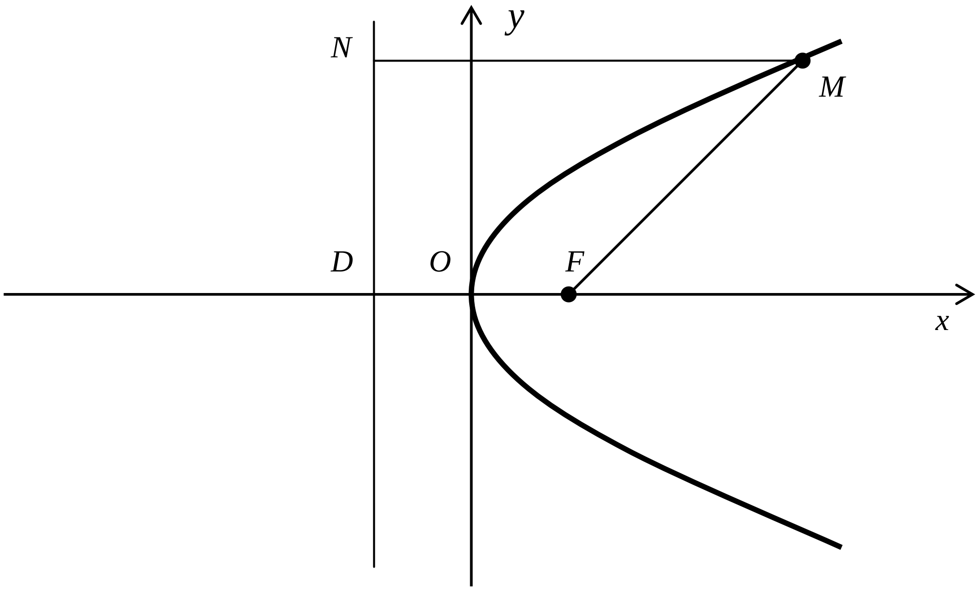
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2\,,$$

и окончательно получим:

$$y^2 = 2px\,.$$

Уравнение $y^2 = 2px$ <u>*называется каноническим уравнением параболы.*</u>

Величина *p* называется параметром параболы.



ПРИМЕР. *Определить тип кривой второго порядка $x^2+10x-y+4=0$ и вычислить ее основные геометрические характеристики.*

<u>*Решение:*</u> Приведем уравнение $x^2+10x-y+4=0$ к каноническому виду, для этого выделим полный квадрат: $(x^2+10x+25)-y+4-25=0 \Rightarrow (x+5)^2-y-21=0 \Rightarrow y+21=(x+5)^2$. Таким образом, получили параболу с вершиной в точке $x_0=-5$, $y_0=-21$, симметричную относительно прямой $x=-5$, ветви направлены вверх.

Уравнение директрисы параболы имеет вид: $y - y_0 = \frac{p}{2}$, но так как в нашем случае $2p=1$ $((y-y_0)=2p(x-x_0)^2) \Rightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow y + 21 = \frac{1}{4}$ – директриса.

5.4 ***Линии второго порядка***

Рассмотрим общее алгебраическое уравнение второго порядка:

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

Если точки, удовлетворяющие данному уравнению образуют геометрическую линию, то данная линия называется *линией второго порядка.*

Эллипс, гипербола, парабола являются линиями второго порядка.

Группа слагаемых $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ называется группой старших членов или квадратичной формой.

Группа слагаемых $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$ называется линейной частью уравнения второго порядка.

Инвариантом уравнения линии второго порядка относительно преобразований декартовой системы координат называется такая функция $f(a_{11}, a_{12}, ..., a_{33})$ от коэффициентов a_{ij} этого уравнения, значения которой не меняется при переходе к новой декартовой прямоугольной системе координат.

Таким образом, если $f(a_{11}, a_{12}, ..., a_{33})$ инвариант и a'_{ij} - коэффициенты уравнения линии второго порядка в новой системе декартовых координат, то

$f(a_{11}, a_{12}, ..., a_{33}) = f(a'_{11}, a'_{12}, ..., a'_{33})$

ТЕОРЕМА 1. Величины

$$I_1 = a_{11} + a_{22},\ I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\ I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

являются инвариантами уравнения линии второго порядка относительно преобразований декартовой системы координат.

ТЕОРЕМА 2. В случае I_2=0 и I_3=0, величина

$$I'_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

так же будет инвариантом уравнения линии второго порядка относительно преобразований декартовой системы координат.

Величина I'_3 называется семиинвариантом уравнения линии второго порядка.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

N	Признак линии	Наименование	Каноническое уравнение
1.	$I_2 > 0,\ I_1 I_3 < 0$	Эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2.	$I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0$	Мнимый эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$

3.	$I_2>0$, $I_3=0$	Две мнимые пересекающиеся прямые	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
4.	$I_2<0$, $I_3\neq 0$	Гипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$
5.	$I_2<0$, $I_3=0$	Две пересекающиеся прямые	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
6.	$I_2=0$, $I_3\neq 0$	Парабола	$x^2=2py$, $y^2=2px$
7.	$I_2=0$, $I_3=0$, $I_3'<0$	Две параллельные прямые	$x^2=a^2$, $y^2=a^2$
8.	$I_2=0$, $I_3=0$, $I_3'>0$	Две мнимые параллельные прямые	$x^2=-a^2$, $y^2=-a^2$
9.	$I_2=0$, $I_3=0$, $I_3'=0$	Две совпадающие прямые	$x^2=0$, $y^2=0$

III. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

ТЕМА 6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

6.1 Понятие и представления комплексных чисел

Комплексным числом z называется выражение вида $z=x+iy$, где x и y — действительные числа, а i — так называемая *мнимая единица*, $i^2=-1$.

Если x=0, то число 0+iy = iy называется *чисто мнимым*; если y = 0, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество R всех действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, т. е. $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

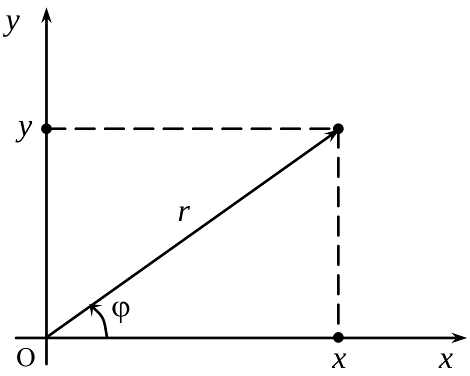
Число называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $x=\operatorname{Re}z$, а y – *мнимой частью* z, $y=\operatorname{Im}z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1+iy_1$ и $z_2 = x_2+iy_2$ называются *равными*

$(z_1 = z_2)$ тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $z=x+iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся. Два комплексных числа $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z=x+iy$ можно изобразить точкой *M(x; y)* плоскости *Oxy* такой, что $x=\mathrm{Re}\,z$, $y=\mathrm{Im}\,z$. И, наоборот, каждую точку *M(x; y)* координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z=x+iy$.



Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, так как на ней лежат действительные числа $z=x+0i$.

Комплексное число $z=x+iy$ можно задавать с помощью радиус-вектора $\bar{r}=\overline{OM}$ = *(x; y)*. Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число *z*, называется *модулем* этого числа и обозначается |*z*| или *r*. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором *r*, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого комплексного числа, обозначается Arg *z* или φ.

Аргументом комплексного числа z = 0 не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ – величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ (k = 0, -1, 1, -2, 2…): Arg *z* = arg *z* + $2\pi k$, где arg *z* – *главное значение аргумента,* заключенное в промежутке (-π;π), т.е. $-\pi < \arg z \leq \pi$ (иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку [0;2π)).

Формы записи комплексных чисел

Запись числа *z* в виде $z=x+iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа. Модуль r и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\bar{r}=\overline{OM}$, изображающего комплексное число $z=x+iy$. Тогда получаем $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$**.** Следовательно, комплексное число $z=x+iy$ можно записать в виде $z=r\cos\varphi+r\sin\varphi$ или $z=r(\cos\varphi+\sin\varphi)$.

Такая запись комплексного числа называется *тригонометрической формой.*

Модуль r = |z| однозначно определяется по формуле

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Например, $|\,i\,|=\sqrt{0^2+1^2}=1$.

Аргумент φ определяется из формул:

$$\cos\varphi=\frac{x}{r},\ \sin\varphi=\frac{y}{r},\ tg\varphi=\frac{y}{x}$$

Так как

$$\varphi=\arg z=\arg z+2k\pi,$$

то

$\cos\varphi = \cos(\arg z + 2k\pi) = \cos(\arg z),\ \ \sin\varphi = \sin(\arg z)$

Поэтому при переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа z, т.е. считать $\varphi = \arg z$.

Так как $-\pi < \arg z \le \pi$, то из формулы $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ получаем, что

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} & \text{для внутренних точек I, IV четвертей,} \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних точек II четверти,} \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних точек III четверти.} \end{cases}$$

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то arg z можно найти непосредственно. Например, arg z_1=0 для $z_1 = 2$; $\arg z_2 = \pi$ для $z_3 = -3$; $\arg z_3 = \dfrac{\pi}{2}$ для $z_3 = i$ и $\arg z_4 = -\dfrac{\pi}{2}$ для $z_4 = -8i$

Используя *формулу Эйлера* $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,}$

комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в так называемой *показательной* (или экспоненциальной) *форме* $z = re^{i\varphi}$, где $r = |x|$ – модуль комплексного числа, а угол $\varphi = \arg z = \arg z + 2k\pi$ (*k*=0, -1, 1, -2, 2…).

В силу формулы Эйлера, *функция* $e^{i\varphi}$ *периодическая с основным периодом* 2π. Для записи комплексного числа z в показательной форме, достаточно найти главное значение аргумента комплексного числа, т.е. считать $\varphi = \arg z$.

ПРИМЕР. *Записать комплексные числа $z_1 = -1+i$ и $z_2 = -1$ в тригонометрической и показательной формах.*

Решение: Для z_1 имеем $|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

$\arg z = arctg\left(\dfrac{1}{-1}\right) + \pi = -\dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$, т.е. $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$, поэтому

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Для z_2 имеем $r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1,\quad \arg z = \arg(-1) = \pi,$

т.е. $\varphi = \pi$. Поэтому $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$

6.2 Действия над комплексными числами

6.2.1 Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).}$$

Сложение комплексных чисел обладает *переместительным* (коммутативным) $z_1+z_2 = z_2+z_1$,

и *сочетательным* (ассоциативным) свойствами:

$(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$

14.2.2 Вычитание комплексных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. *Разностью* комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, которое, будучи сложенным с z_2, дает число z_1, т.е. $z=z_1-z_2$, если $z+z_2=z_1$.

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$, то из этого определения легко получить z:

$$\boxed{z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).}$$

6.2.3 Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).}$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение

$$\boxed{i^2 = -1.}$$

Действительно, $i^2 = ii = (0+1i)(0+1i) = (0-1) + i(0+0) = -1.$

Например,

$(2-3i)(-5+4i) = -10+8i+15i-12i^2 = -10+23i+12 = 2+23i.$

Заметим, что $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$ – действительное число.

Умножение комплексных чисел обладает переместительным, сочетательным и распределительным (дистрибутивным) свойствами:

$z_1 z_2 = z_2 z_1$

$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

Найдем произведение комплексных чисел $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, заданных в тригонометрической форме:

$$z_1z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$

$$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2))=$$

$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

т.е.

$$\boxed{z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).}$$

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Это правило распространяется на любое конечное число множителей. В частности, если есть n множителей и все они одинаковые, то

$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$ – *Формула Муавра.*

ПРИМЕР. *Найти* $(1+\sqrt{3}i)^9$.

Решение: Запишем сначала число $z=1+\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме:

$$r=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2;\ \arg z=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\arg z=\frac{\pi}{3},\ \ z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

По формуле Муавра имеем:

$$z^9=(1+\sqrt{3}i)^9=2^9\left(\cos 9\frac{\pi}{3}+i\sin 9\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=2^9(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=2^9(-1)=-512.$$

6.2.4 Деление комплексных чисел

Деление определяется как действие, обратное умножению. *Частным двух комплексных чисел* z_1 и $z_2\neq 0$ называется комплексное число z, которое, будучи умноженным на z_2, дает число z_1, т.е. $\frac{z_1}{z_2}=z$, если $z_2z=z_1$.

Если положить $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2\neq 0$, $z=x+iy$, то из равенства $(x_2+iy_2)(x+iy)=x_1+iy_1$ следует:

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения x и y:

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

$$\boxed{z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.}$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

ПРИМЕР: *Выполнить деление* $\frac{1+3i}{2+i}$.

<u>*Решение:*</u> $\frac{1+3i}{3+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+6i+3}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i.$

Для тригонометрической формы комплексного числа формула деления имеет вид

$$\boxed{\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).}$$

При делении комплексных чисел их модули, соответственно делятся, а аргументы, соответственно, вычитаются.

<u>*6.2.5 Извлечение корней из комплексных чисел*</u>

Извлечение корня n-й степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

<u>*Корнем n-й степени из комплексного числа*</u> z называется комплексное число ω, удовлетворяющее равенству $\omega^n = z$, т.е. $\sqrt[n]{z} = \omega$, если $\omega^n = z$.

Если положить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z = \omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда имеем $p^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k, k = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots$ То есть $\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ и $\rho = \sqrt[n]{r}$ (арифметический корень).

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = \omega$ принимает вид

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

k = 0, 1, …, n-1

Получим n различных значений корня. При других значениях k, в силу периодичности косинуса и синуса, получатся значения корня, совпадающие с уже найденными. Так, при $k=n$ имеем

$$\omega_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi n}{n}\right) =$$

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) = \omega_0$$

Для любого $z \neq 0$ корень n-й степени из числа z имеет ровно n различных значений.

ПРИМЕР: *Найти значения а)* $\sqrt[3]{i} = \omega$; *б)* $\sqrt{-1} = \omega$.

Решение: а) Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме: $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом,

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right),$$

k= 0, 1, 2.

При $k = 0$ имеем

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

при $k = 1$ имеем

$$\omega_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

при $k = 2$ имеем

$$\omega_2 = \cos\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i\ .$$

б) Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:

$-1 = \cos\pi + i\sin\pi.$

Поэтому

$$\sqrt{-1} = \sqrt{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2},\ k = 0,\ 1.$$

При $k = 0$ получаем $\omega_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$ а при $k = 1$ получаем $\omega_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$ Таким образом, $\sqrt{-1} = i$ и $\sqrt{-1} = i.$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению контрольной работы и варианты контрольных работ

В соответствии с учебным планом студенты, обучающиеся в институте непрерывного образования, в процессе изучения курса «Линейная алгебра» должны выполнить контрольную работу, которая является важной формой самостоятельной работы студентов. Она способствует углубленному изучению соответствующих тем курса. Ее цель – оказать помощь студентам в изучении математики, проверить усвоение ими отдельных вопросов курса, умение самостоятельно работать с литературой, наличие соответствующих умений и навыков.

При подготовке к контрольной работе студенту необходимо научиться работать со справочной и учебной литературой; усвоить основные теоретические положения; уметь анализировать условия задач, выбрать необходимые алгоритм и методы ее решения; оценить и проверить правильность полученного результата.

Для повышения эффективности самостоятельной работы студента в ходе выполнения им контрольной работы в данном комплексе приведены пояснения к решению типовых заданий и необходимые теоретические сведения, расположенные в разделе методических указаний по самостоятельной работе студентов в соответствии с темами курса.

При оформлении контрольной работы студенту необходимо соблюдать следующие требования:

1. Заполнить титульный лист по правилам, предусмотренным в институте непрерывного образования.
2. Аккуратно переписать условие задания.
3. Подробно описать решение задачи, при необходимости выполнить чертеж. Решение должно содержать необходимые комментарии и вычисления.
4. Исследования функций проводить в соответствии с предложенным алгоритмом.
5. В завершении необходимо написать полученный ответ и при необходимости сделать его проверку.
6. В конце работы должен быть приведен список фактически использованной литературы в алфавитном порядке, указана дата выполнения работы и поставлена подпись студента.

Контрольная работа выполняется в соответствии с предлагаемыми ниже вариантами. По номеру варианта необходимо выбрать порядковый номер примера в каждом задании каждой темы контрольной работы. Например, для 5 варианта необходимо решить все пятые примеры всех заданий из всех тем контрольной работы.

Выбор варианта производится по начальной букве фамилии студента:

Начальная буква фамилии студента	Вариант

А, Б	1
В, Г	2
Д, Е, Ж	3
З, И, К	4
Л, М	5
Н, О, П	6
Р, С	7
Т, У, Ф, Х	8
Ц, Ч, Ш, Щ	9
Э, Ю, Я	10

Выполненные контрольные работы сдаются на проверку и рецензирование в университет в сроки, установленные учебным планом и графиком изучения дисциплины.

При проверке контрольной работы учитываются понимание сути вопроса, знание фактического материала, умение логично и ясно изложить решение. По качеству выполнения работы преподаватель судит об усвоении студентом изучаемых тем, делает замечания и пожелания по процессу изучения дисциплины.

Контрольная работа оценивается по принципу «зачтено / незачтено» и может быть зачтена при условии, что она выполнена с соблюдением распределения вариантов, написана самостоятельно, в соответствии с изученным теоретическим материалом.

Проверенная работа может быть возвращена на доработку. В этом случае студент должен провести работу над ошибками в этой же тетради и вновь сдать ее на проверку, указав на обложке, что она сдается повторно. Если рецензент предлагает переделать работу, то необходимо приложить к новой еще и незачтенную работу.

Получив зачет по контрольной работе, студент допускается к сдаче экзамена.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

<u>КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1</u>

ТЕМА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1 Вычислить определитель:

1. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & -9 \\ 3 & 4 & -7 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 15 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 0 \\ 8 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ -10 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & -3 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

1.2 Найти обратную матрицу для матрицы A и сделать проверку:

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -7 \\ 1 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 5. $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 0 \\ 1 & -4 & -7 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 8. $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 11 & -1 \end{pmatrix}$ 9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & -5 & -2 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

ТЕМА 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решить систему линейных уравнений двумя способами: методом обратной матрицы, методом Гаусса:

1. $\begin{cases} 2x-3y+3z=-10 \\ x+3y-3z=13 \\ x+z=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x+y+z=11 \\ x+y+2z=8 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ -2x+3y-3z=-5 \\ 3x-4y+5z=10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3y+4z+6=0 \\ x+z=1 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} -2x+y+6=0 \\ x-2y-z=5 \\ 3x+4y-2z=13 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x-2y-3z=-4 \\ 4x+y+2z=13 \\ 2x+5y+z=-7 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+y+5z=0 \\ 2x+3y+3z=3 \\ 2x+y+4z=-1 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x+4y+3z=9 \\ x+2y+z=5 \\ x+2z=-3 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=8 \\ y+2z=11 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 3x+2y+4z=7 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases}$

ТЕМА 4. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Даны две точки M_1 и M_2.

1. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Определить длины отрезков, отсекаемые плоскостью от осей координат.

Сделать чертеж.

1. *$M_1(4;-2;0)$; $M_2(4;2;5)$*
2. *$M_1(3;-2;3)$; $M_2(3;3;-3)$*
3. *$M_1(-4;4;2)$; $M_2(-4;2;5)$*
4. *$M_1(1;-3;0)$; $M_2(1;-1;3)$*
5. *$M_1(-3;2;4)$; $M_2(2;2;-1)$*
6. *$M_1(5;-1;2)$; $M_2(-2;-1;3)$*
7. *$M_1(-3;2;4)$; $M_2(-5;1;4)$*
8. *$M_1(-2;0;4)$; $M_2(1;0;-4)$*
9. *$M_1(4;2;-1)$; $M_2(0;3;-1)$*
10. *$M_1(3;0;-3)$; $M_2(1;0;-4)$*

МЕТОДИЧЕСКИЕ СОВЕТЫ
по подготовке и сдаче экзамена

Главная задача высшего профессионального образования – подготовка квалифицированных специалистов. Для того чтобы завершить курс обучения конкретной дисциплине, проверить сложившуюся у студента систему понятий и выявить уровень полученных знаний, умений и навыков, проводят итоговую аттестацию в форме зачёта (для проверки практических умений и навыков) или экзамена (оценка уровня теоретической и практической подготовки).

Однако, экзамен – это не только оценка некоторого результата деятельности, это, прежде всего, активный процесс обучения и воспитания. Обучающее значение экзаменов состоит в том, что студент в период экзаменационной сессии вновь обращается к пройденному материалу, перечитывает конспект лекций, учебник, иные источники. Он не только повторяет и закрепляет полученные знания, но и получает новые.

Процесс подготовки и сдачи экзамена стимулирует трудолюбие, принципиальность, ответственное отношение к делу, развивает чувство справедливости, уважения к науке, вузу и преподавателям. Это – воспитательная роль экзамена.

Основное, оценивающее значение экзамена заключается в том, что он подводит итоги как знаниям студентов, так и всей учебной работе по данному предмету. В определенной степени преподаватель-экзаменатор оценивает и себя, результаты своей учебно-педагогической деятельности.

Экзамен по математике предусматривает оценку теоретических знаний студента и практических умений решения типовых задач. Поэтому в ходе подготовки к экзамену студенту необходимо повторить изученный теоретический материал, а также основные методы решения математических задач. В идеале к экзаменам необходимо начинать готовиться с первой лекции, практического занятия. В этом случае приобретаемые знания усваиваются логически последовательно и своевременно подкрепляются приобретением практических умений и навыков решения математических задач.

При подготовке к экзамену лучше всего использовать конспекты лекций, прочитанных ведущим преподавателем. В качестве дополнительного источника теоретических знаний используются учебные пособия из основного списка литературы, а также математические словари и справочники. Для того чтобы выполнить практическую часть экзаменационного билета, необходимо прорешать основные типы задач, которые были разобраны на практических занятиях по математике. В качестве дополнительных источников возможно использование учебных пособий, содержащих примера задач и описания их решения.

Экзаменационные билеты содержат два вопроса: теоретический и практический. В ходе подготовки к ответу необходимо написать основные математические положение, теоремы, формулы, если необходимо, сделать чертежи, а также полностью оформить решение задачи.

На экзамене преподаватель может задать студенту дополнительные и уточняющие вопросы. Дополнительные вопросы задаются помимо вопросов экзаменационного билета и связаны, как правило, с плохим ответом. Уточняющие вопросы задаются в рамках билета и направлены на уточнение мысли студента.

Можно выделить следующие критерии, которыми обычно руководствуются преподаватели на экзамене:

1) правильность ответов на вопросы (верное, четкое и достаточно глубокое изложение основного теоретического материала);

2) полнота, логическая последовательность и одновременно лаконичность ответа;

3) умение связывать теорию с практикой, проанализировать условие и решить типовые задачи;

4) умение оценить и доказать правильность полученного результата;

5) грамотное комментирование, приведение примеров, изображение чертежей;

6) культура речи и поведения.

Критерии выставления оценки за ответ на экзамене:

– оценка «*отлично*»: ответ всесторонне и глубоко освещает теоретический вопрос, устанавливает взаимосвязь теории с практикой, показывает умения решать типовые задачи, оценивать правильность полученных результатов;

– оценка «*хорошо*»: ответ соответствует основным предъявляемым требованиям, студен обстоятельно владеет материалом, однако не всегда обстоятельно проводит изложение и доказательство, либо не полностью или с неточностями решена практическая задача;

– оценка «*удовлетворительно*»: ответ не полно раскрывает поставленные вопросы, студент поверхностно владеет материалом, решение практической задачи вызывает определенные трудности;

– оценка «*неудовлетворительно*»: дан неправильный ответ на теоретический вопрос, студент не показывает необходимых минимальных знаний по предмету, а также не может решить практическую задачу.

Таким образом, преподаватель оценивает как знания, полученные при изучении математики, так и форму их изложения студентом.

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Матрицы, основные понятия
2. Действия над матрицами. (Сложение, умножение на число, произведение матриц, элементарные преобразования матриц)
3. Определители и их свойства
4. Обратная матрица
5. Миноры. Алгебраические дополнения. Вычисление определителей n-го порядка
6. Решение невырожденных систем линейных систем. Формулы Крамера
7. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса
8. Скалярное произведение векторов и его свойства
9. Векторное произведение векторов и его свойства
10. Смешанное произведение векторов и его свойства
11. Уравнения прямой на плоскости (общее уравнение, уравнение с угловым коэффициентом)
12. Уравнения прямой на плоскости (проходящей через данную точку в данном направлении, через две точки, в отрезках)
13. Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых
14. Линии второго порядка на плоскости. Парабола
15. Линии второго порядка на плоскости. Гипербола
16. Линии второго порядка на плоскости. Эллипс
17. Уравнения плоскости в пространстве
18. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей
19. Прямая линия в пространстве. Основные задачи: условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости
20. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи: угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости
21. Комплексные числа

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Формулы сокращенного умножения

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
4) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
5) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

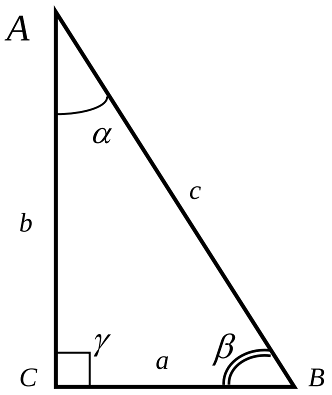
2. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$

$D=b^2-4ac$ – *дискриминант;*

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ – *корни уравнения;*

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ – *разложение квадратного трехчлена на множители*

3. Решение прямоугольного треугольника



1) Теорема Пифагора: $a^2+b^2=c^2$
2) $\sin\alpha=\dfrac{a}{c}$; $\sin\beta=\dfrac{b}{c}$
3) $\cos\alpha=\dfrac{b}{c}$; $\cos\beta=\dfrac{a}{c}$
4) $tg\alpha=\dfrac{a}{b}$; $tg\beta=\dfrac{b}{a}$
5) $ctg\alpha=\dfrac{b}{a}$; $ctg\beta=\dfrac{a}{b}$

4. Основные свойства показательной функции

1) $a^0=1$
2) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$
3) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$
4) $a^n\cdot b^n=(ab)^n$
5) $\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
6) $(a^m)^n=a^{mn}$
7) $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$
8) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^m$

5. Основные свойства натурального логарифма

1) $lne=1$

2) $ln1=0$

3) $ln(a)+ln(b)=ln(a\cdot b)$

4) $ln(a)-ln(b)=ln\left(\frac{a}{b}\right)$

5) $ln(a^n)=n\cdot ln(a)$

6) $ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} ln(a)$

6. Основные тригонометрические формулы

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ - основное тригонометрическое тождество

2) $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3) $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

5) $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

6) $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

7) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

8) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

9) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

10) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

11) $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$

12) $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$

13) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

14) $cos2\alpha = \begin{cases} cos^2\alpha - sin^2\alpha \\ 1-2sin^2\alpha \\ 2cos^2\alpha - 1 \end{cases}$